Tema 2: Funciones de una variable real. Generalidades

Asignatura: Cálculo en una variable real

Prof.: I. V. Toranzo **GII**

2.1. Introducción

Puede decirse que la noción de **función** constituye un pilar fundamental en matemáticas. Es por este motivo que su definición resulta muy general y que, con el fin de acotar este vasto campo de estudio, nos centremos en este tema en un tipo particular de funciones, que de por sí incluye una amplia variedad de las mismas.

La definición que se dará a continuación de función será suficientemente general como para permite el estudio de numerosas funciones, y además se ilustrará dicha noción, con el objeto de aclarar su significado.

2.2. Definición de función. Nociones básicas

Definición 1: Definición de función

Una **función real de variable real** es una **regla o correspondencia** arbitraria entre dos conjuntos de números reales, D y C, que asigna a cada elemento del primer conjunto, D, exactamente un elemento del segundo conjunto, C.

El **valor** de la función f evaluada en el número real x (elemento del primer conjunto) se denota como $f(x)$ (elemento del segundo conjunto) y se lee como "*f de x*".

El conjunto $\mathrm{dom}(f)$ recibe el nombre de **dominio** de la función f y se define como el conjunto de números reales para los cuales está definida f, i.e., existe el número real $f(x)$. En notación de conjuntos, el dominio de una función se expresa como,

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x) \in C\} \tag{2.1}$$

El conjunto $\mathrm{codom}(f)$ recibe el nombre de **codominio** de la función f y se define como el conjunto que contiene a los números reales que están en relación con algún o algunos elementos del conjunto $\mathrm{dom}(f)$.

El conjunto $\mathrm{rang}(f)$ recibe el nombre de **rango** de la función f y se define como el conjunto de números que están en relación con algún o algunos elementos del conjunto $\mathrm{dom}(f)$.
En notación de conjuntos, el rango de una función se expresa como,

$$\mathrm{rang}(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathrm{dom}(f)\} \tag{2.2}$$

La relación entre el rango y el codominio de una función, f, es de **inclusión**, i.e.,

$$\mathrm{rang}(f) \subseteq \mathrm{codom}(f)$$

Nota 1:
Si el dominio de una función, no se restringe de forma explícita, este se considera el subconjunto de números reales para los cuales la definición de la función tiene sentido.

Las funciones pueden representarse de formas diversas:

1. Expresiones matemáticas explícitas.
2. Definiciones *piecewise* ("a trozos") sin expresión matemática explícita
3. Mediante tablas de valores

Ejemplo 1:
Los siguientes son ejemplos de funciones reales que ilustran las diferentes formas de representación de una función:

1. La regla que asigna a todo número su cuadrado, i.e.,
$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
2. La regla que asigna a todo número real x, el número
$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 7}{x^2 - 1}$$
3. La regla que asigna a cada número real x perteneciente al intervalo $[-\frac{\pi}{3}, -18]$ el número x^5.
4. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z}^+ \\ -1, & x \in \mathbb{Z}^- \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$
5. $S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt$, $C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$ (Funciones de Fresnel)
6. $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ (función zeta de Riemann)
7.

Estación	**Temperatura media**
Invierno	5^oC
Primavera	21^oC
Verano	34^oC
Otoño	14^oC

8. $h(x) = \begin{cases} 7, & x = 3 \\ \frac{\pi}{24}, & x = 18 \\ 47, & x = \frac{21}{\pi^3}, \pi^4 \\ 99, & x \neq 3, 18, \frac{21}{\pi^3}, \pi^4 \text{ y } x = a - b\sqrt{5},\ a, b \in \mathbb{I} \end{cases}$

   que se lee como la regla que asigna

   a 3 el número 7
   a 18 el número $\frac{\pi}{24}$
   a $\frac{21}{\pi^3}$ el número 47
   a π^4 el número 47
   $\forall x \neq 3, 18, \frac{21}{\pi^3}, \pi^4$, el número 99 si x es de la forma $a - b\sqrt{5}$ con $a, b \in \mathbb{I}$

Ejemplo 2:
La función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$, tiene como:

- **Dominio:** $\mathbb{R}^+$
- **Codominio:** $\mathbb{R}$.
- **Rango:** $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$

Nota 2:
Lo importante de la definición de función es que se trata de una regla arbitraria que establece una relación entre elementos de dos conjuntos de números reales. Por tanto, no requiere necesariamente de ser expresada mediante fórmulas algebraicas ni una condición que se aplique de manera uniforme sobre todo número en el qu esté definida[3].

Definición 2: Gráfica de una función
La **gráfica** de una función f, es el conjunto de pares ordenados de números reales,

$$\text{graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{dom}(f),\ \ y = f(x) \in \text{rang}(f)\}$$

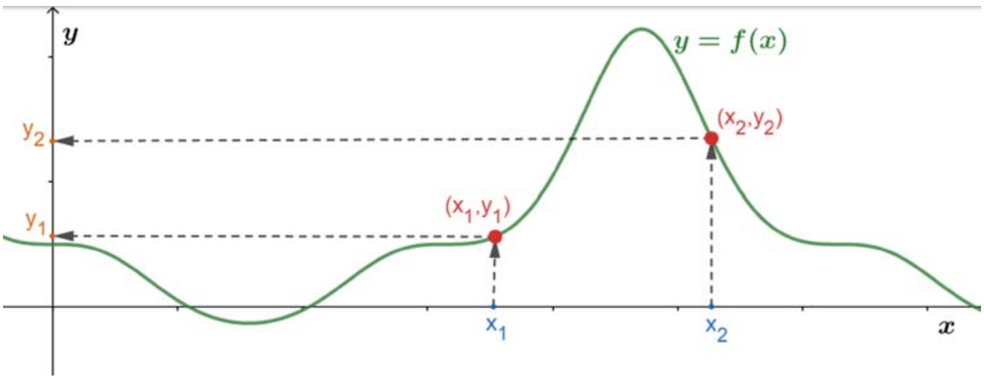


Fig. 2.1: Gráfica de una función

Definición 3: función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

1. Función **inyectiva**:
   Una función f es inyectiva sii

   $$\forall x_1, x_2 \in \text{dom}(f), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

   Esto significa que a cada elemento del ran(f) le corresponde un único elemento del dom(f).

2. Función **sobreyectiva**:
   Una función f es sobreyectiva sii
   $$\text{rang}(f) = \text{codom}(f)$$
   Esto significa que todo elemento del codominio de f está en correspondencia con al menos un elemento del dominio de f.

3. Función **biyectiva**:
   Una función biyectiva es una función inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 3:

- La función $f(x) = x^3$ con $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{codom}(f) = \mathbb{R}$ es una función **biyectiva** dado que es:

  1. **inyectiva**.

     Suponemos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 \neq x_2$. Si f es inyectiva debe ocurrir que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Para demostrarlo, aplicamos la **técnica de reducción al absurdo**, esto es, suponemos que $f(x_1) = f(x_2)$ y se ha de llegar a una contradicción.

     $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \textbf{CONTRADICCIÓN!}$$

     Dado que se ha llegado a una contradicción (i.e., $x_1 = x_2$ cuando la hipótesis de partida es $x_1 \neq x_2$) se concluye que si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por lo tanto, la función $f(x) = x^3$ es inyectiva.
  2. **sobreyectiva**, dado que $\text{rang}(f) = \mathbb{R} = \textbf{codom}(f)$

- La función $g(x) = x^2$ con $\text{dom}(g) = \mathbb{R}$ y $\text{codom}(g) = \mathbb{R}$ **no** es:

  1. **inyectiva**
     Suponemos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 \neq x_2$. Si f es inyectiva debe ocurrir que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Para demostrarlo, aplicamos la **técnica de reducción al absurdo**, esto es, suponemos que $f(x_1) = f(x_2)$ y se ha de llegar a una contradicción.

     $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2} \Rightarrow \pm x_1 = \pm x_2$$

     Esto quiere decir que, si $f(x_1) = f(x_2)$ pueden darse los casos:
     i) $x_1 = -x_2$
     ii) $-x_1 = x_2$

     en los que $x_1 \neq x_2$. Por lo tanto, no se llega a ninguna contradicción y se concluye que la función $f(x) = x^2$ no es inyectiva.
  2. **sobreyectiva**, dado que $\text{rang}(f) = \mathbb{R}^+ \subseteq \textbf{codom}(f) = \mathbb{R}$

2.3. Funciones elementales

2.3.1. Funciones polinómicas

Las funciones **polinómicas** son de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con coeficientes reales, i.e., $\{a_i\}_{i=0}^n \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$ (coeficiente principal).

Se denomina **grado** del polinomio p al exponente de la potencia más alta de x con coeficiente no nulo.

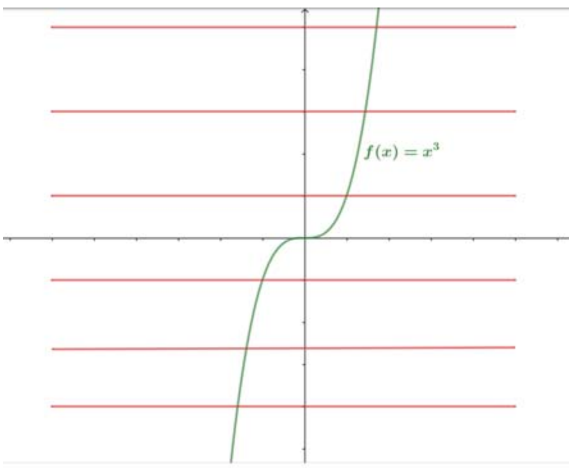


Fig. 2.2: $f(x) = x^3$

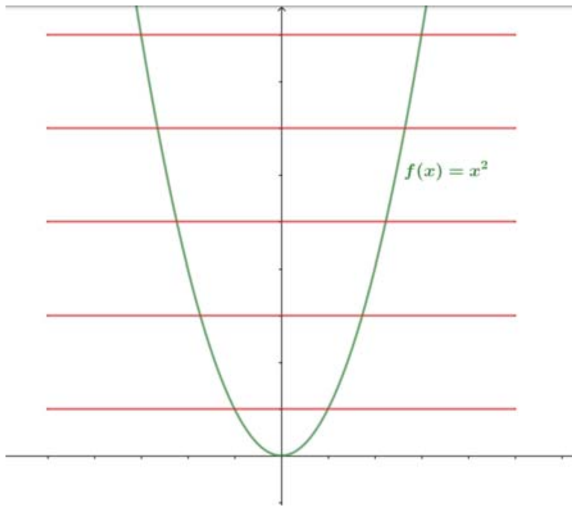
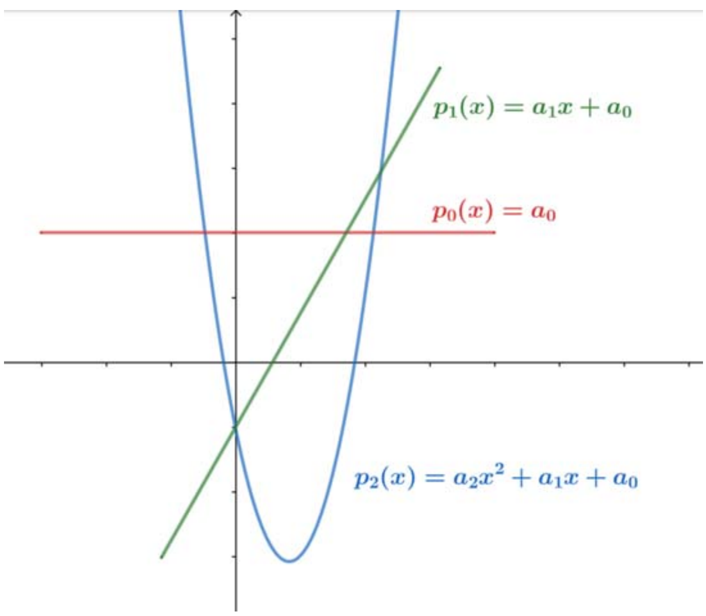


Fig. 2.3: $f(x) = x^2$

- **Dominio:** $\mathrm{dom}(p) = \mathbb{R}$
- **Rango:** $\mathrm{rang}(p) \begin{cases} \subseteq \mathrm{codom}(p) = \mathbb{R}, & \text{si grado par} \\ = \mathrm{codom}(p) = \mathbb{R}, & \text{si grado impar} \end{cases}$

Casos particulares:

- Polinomios de grado 0: función **constante**.
  Gráfica: recta horizontal
- Polinomios de grado 1: función **lineal**.
  Gráfica: recta oblicua
- Polinomios de grado 2: función **cuadrática**.
  Gráfica: parábola



2.3.2. Funciones racionales

Las funciones **racionales** son de la forma

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

con coeficientes reales, i.e., $\{a_i\}_{i=0}^n, \ \{b_j\}_{j=0}^m \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$ (coeficientes principales).

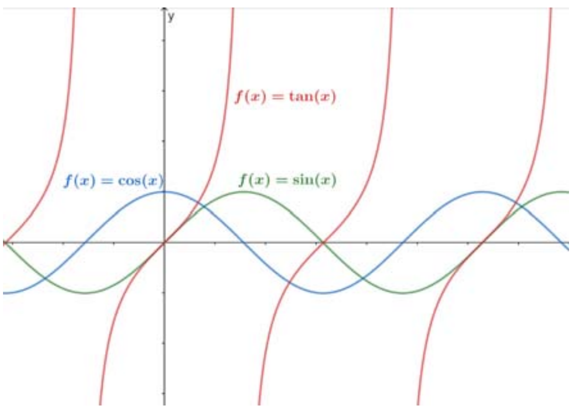
- **Dominio:** $\mathrm{dom}(R) = \mathbb{R} \setminus \{x^* \in \mathbb{R} : q(x^*) = 0\}$
- **Rango:** $\mathrm{rang}(R)$ depende de $p(x)$ y $q(x)$.

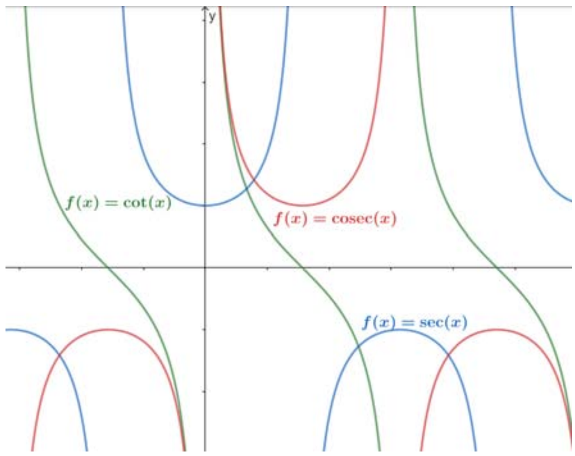
2.3.3. Funciones trigonométricas

- **seno**, $f(x) = \sin(x)$ y **coseno**, $f(x) = \cos(x)$
  - **Dominio:** $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$
  - **Rango:** $\mathrm{rang}(f) = [-1, 1]$
- **tangente**, $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
  - **Dominio:** $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$
  - **Rango:** $\mathrm{rang}(f) = \mathbb{R}$
- **cosecante** ($f(x) = \mathrm{cosec}(x)$), **secante** ($f(x) = \sec(x)$) y **cotangente** ($f(x) = \cot(x)$)

donde,

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad \mathrm{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$





Relaciones trigonométricas básicas:

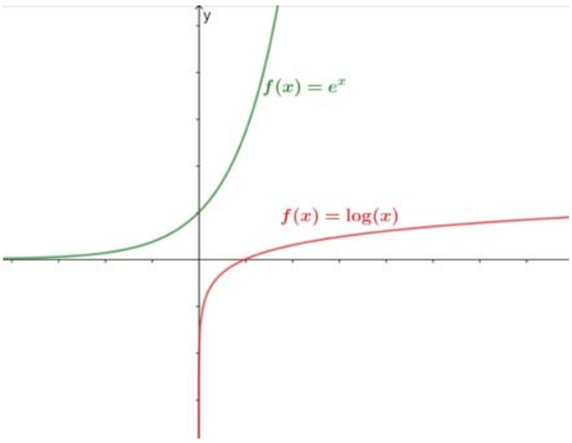
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cot(x)$

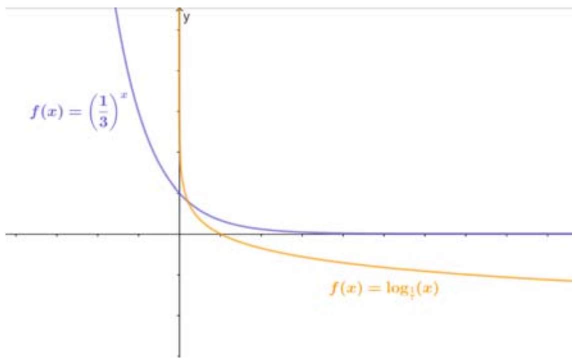
2.3.4. Funciones exponenciales y logarítmicas

- Función **exponencial**, $f(x) = a^x$, $a > 0$
  - **Dominio:** $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
  - **Rango:** $\text{rang}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
- Función **logarítmica**, $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$
  - **Dominio:** $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
  - **Rango:** $\text{rang}(f) = \mathbb{R}$

Caso particular: base *e*

- Exponencial: $f(x) = e^x$
- Logaritmo neperiano: $f(x) = \log(x)$





Propiedades de los logaritmos

1. $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$
2. $log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $log_a(x^c) = c\log_a(x)$
4. $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$ (cambio de base)

Propiedades de la exponencial

- $a^0 = 1$, $a^1 = a$
- $a^x a^y = a^{x+y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$, $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$

A partir de la función exponencial se definen las funciones **hiperbólicas**,

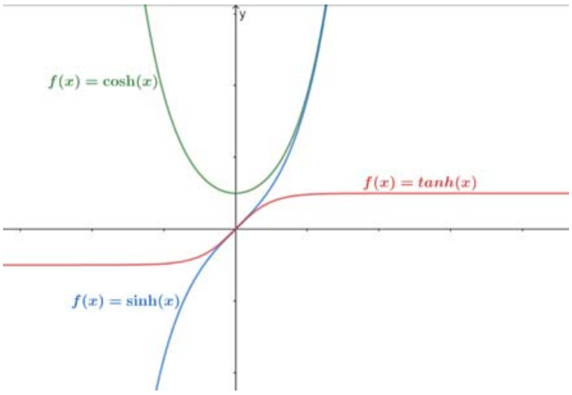
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \begin{cases} \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \\ \mathrm{rang}(f) = [1, +\infty) \end{cases} \quad , \quad \mathrm{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \begin{cases} \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \\ \mathrm{rang}(f) = (0, 1] \end{cases}$$

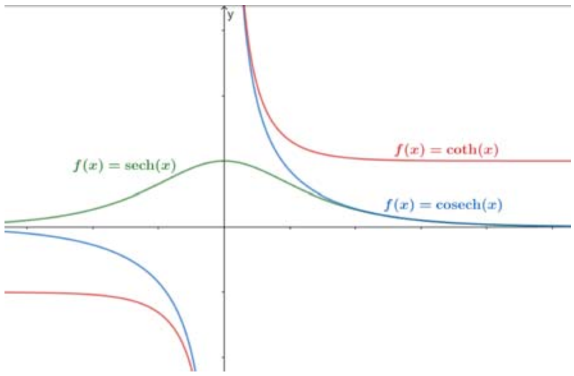
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \begin{cases} \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \\ \mathrm{rang}(f) = \mathbb{R} \end{cases} \quad , \quad \mathrm{cosech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} \begin{cases} \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \mathrm{rang}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \begin{cases} \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \\ \mathrm{rang}(f) = (-1, 1) \end{cases} \quad , \quad \coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} \begin{cases} \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \mathrm{rang}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $1 - \tanh^2(x) = \mathrm{sech}^2(x)$, $\coth^2 - 1 = \mathrm{cosech}^2(x)$
- $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, $\cosh(-x) = \cosh(x)$, $\tanh(-x) = -\tanh(x)$





Pueden obtenerse funciones más complejas manipulando algebraicamente las funciones elementales anteriores.
Estas operaciones son:

- **Dilataciones.**
  - **Horizontales.**

$$\tilde{f}(x) = f(cx), \quad c > 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < c < 1 & \text{compresión} \\ c > 1 & \text{dilatación} \end{cases}$$

  - **Verticales.**

$$\tilde{f}(x) = cf(x), \quad c > 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < c < 1 & \text{compresión} \\ c > 1 & \text{dilatación} \end{cases}$$

Nota 3:
Un caso particular de dilatación es aquel en el que $c = -1$, que recibe el nombre de **reflexión especular**.
Así,

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(-x) & \Rightarrow \quad \text{reflexión especular respecto del eje y (horizontal)} \\ \tilde{f}(x) = -f(x) & \Rightarrow \quad \text{reflexión especular respecto del eje x (vertical)} \end{cases}$$

- **Traslaciones.**
  - **Horizontales.**

$$\tilde{f}(x) = f(x \pm c), \quad c > 0 \begin{cases} +, & \text{hacia la izquierda} \\ -, & \text{hacia la derecha} \end{cases}$$

  - **Verticales.**

$$\tilde{f}(x) = f(x) \pm c, \quad c > 0 \begin{cases} +, & \text{hacia arriba} \\ -, & \text{hacia abajo} \end{cases}$$

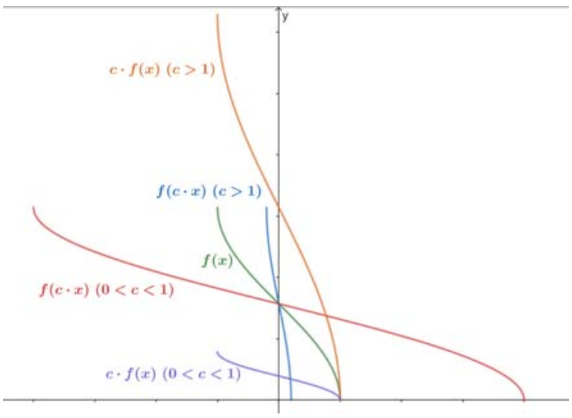


Fig. 2.4: Dilaciones verticales y horizontales de f

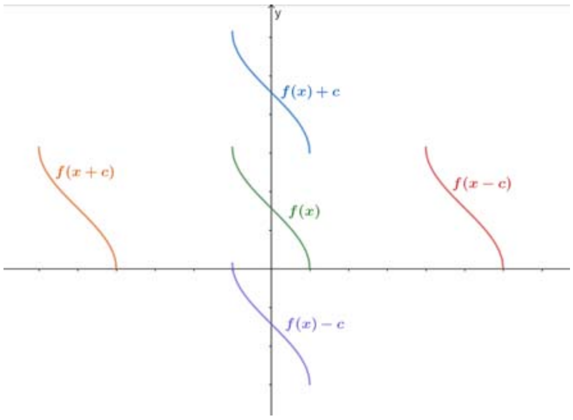


Fig. 2.5: Traslaciones verticales y horizontales de f

- **Suma.**

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \mathrm{dom}(f + g) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$$

- **Producto.**

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \mathrm{dom}(fg) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$$

- **Cociente.**

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \mathrm{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)) \setminus \{x^* \in \mathbb{R} : g(x^*) = 0\}$$

- **Composición.**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad \mathrm{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{dom}(g) : g(x) \in \mathrm{dom}(f)\}$$

En general, la composición de funciones no es conmutativa, i.e.,

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Ejemplo 4:
Sea la función $f(x) = \sqrt{x}$. Esbozar la gráfica de las siguientes funciones

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g_1(x) = \sqrt{x} - 2, \quad g_2(x) = \sqrt{x - 2}, \quad g_3(x) = -\sqrt{x}, \quad g_4(x) = 2\sqrt{x}, \quad g_5(x) = \sqrt{-x}$$

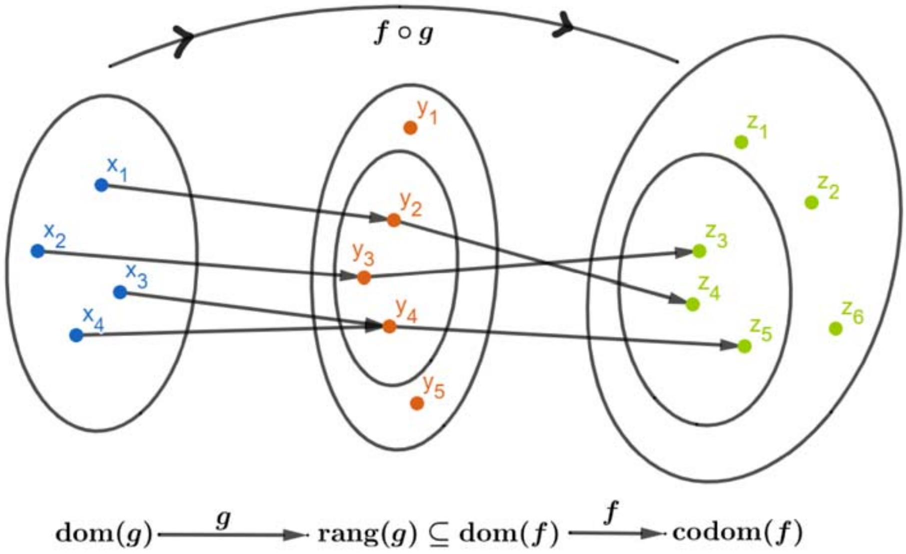


Fig. 2.6: Composición de funciones

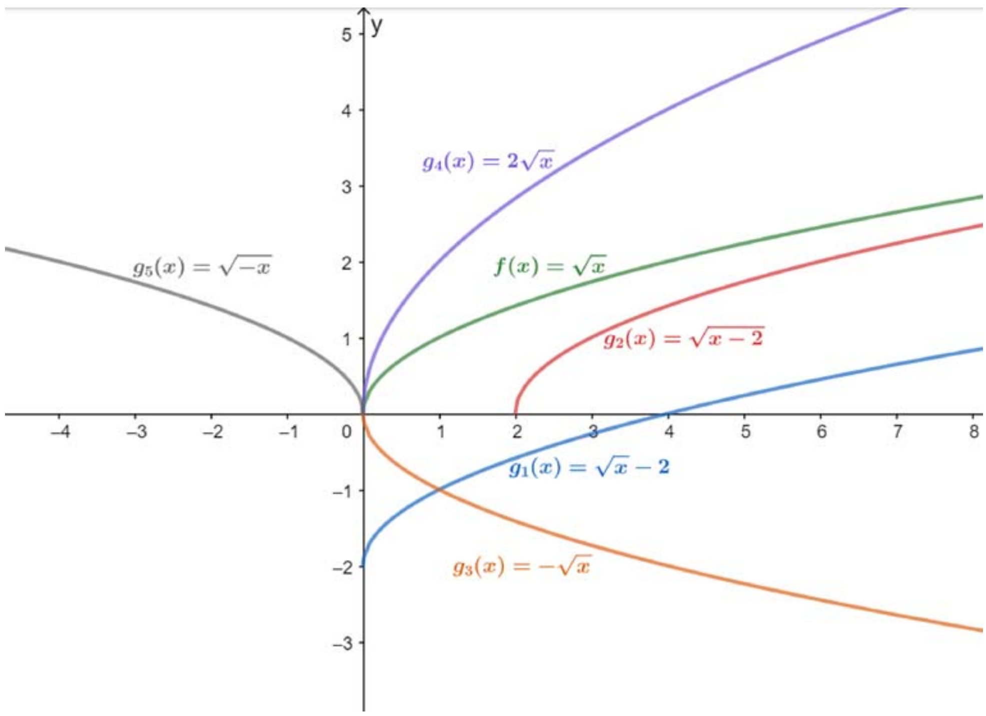


Fig. 2.7: Gráficas del ejemplo 4

Ejemplo 5:

Sean las funciones $f(x) = \sqrt{2-x}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$. Hallar el dominio de la función suma $(f+g)(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+1}$.

- El dominio de la función f es

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \ 2 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 2\} = (-\infty, 2]$$

- El dominio de la función g es

$$\mathrm{dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : \ x + 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq -1\} = [-1, +\infty)$$

- El dominio de la función $f + g$ es

$$\text{dom}(f+g) = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : \; 2-x \geq 0 \;\; \text{y} \;\; x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \; x \leq 2 \;\; \text{y} \;\; x \geq -1\} = [-1, 2]$$

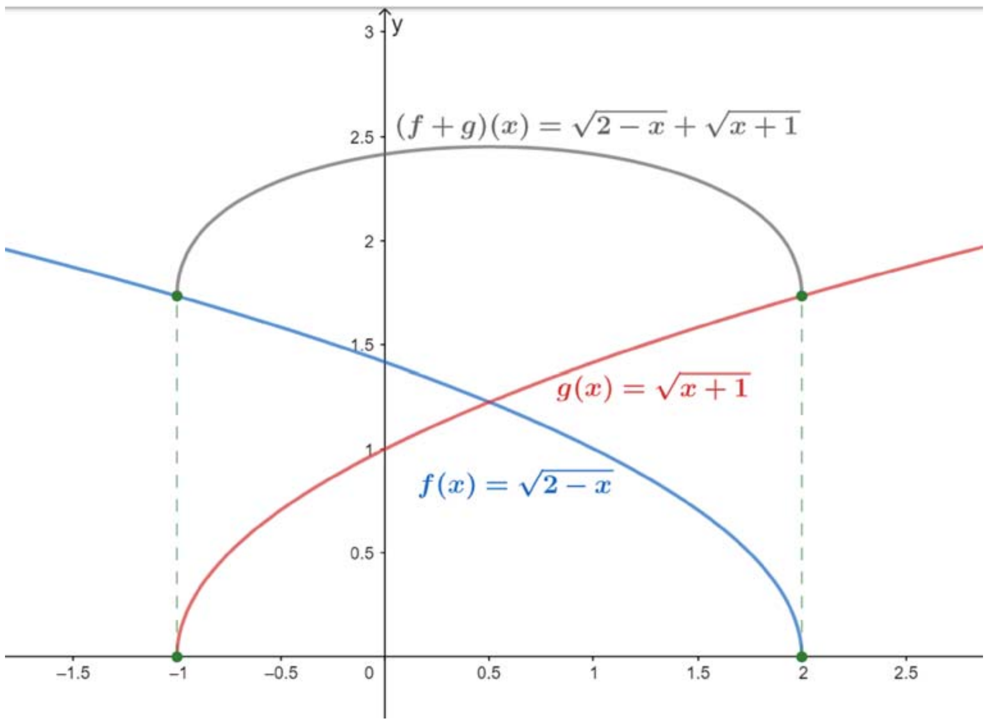


Fig. 2.8: Gráficas del ejemplo 5

Ejemplo 6: Composición de funciones

Determinar el dominio de la composición $h(x) = (f \circ g)(x)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2-x}$.

- $\text{dom}(f) = [0, +\infty) = \mathbb{R}^+$, $\text{dom}(g) = (-\infty, 2]$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x} \quad \Rightarrow \quad \text{dom}(f \circ g) = (-\infty, 2]$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - \sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \text{dom}(g \circ f) = [0, 4]$$

2.4. Función inversa

La función inversa, denotada como f^{-1}, de una cierta función f, es (si existe) otra función tal que

$$(f \circ f^{-1})(x) = x = (f^{-1} \circ f)(x)$$

cuando ambas composiciones tienen sentido.

Para que una función, f, sea invertible, i.e., exista y esté bien definida f^{-1}, ha de ocurrir que f sea **inyectiva**.

Propiedades de la función inversa, f^{-1}

- **Dominio:** $\text{dom}(f^{-1}) = \text{rang}(f)$
  Rango: $\text{rang}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$

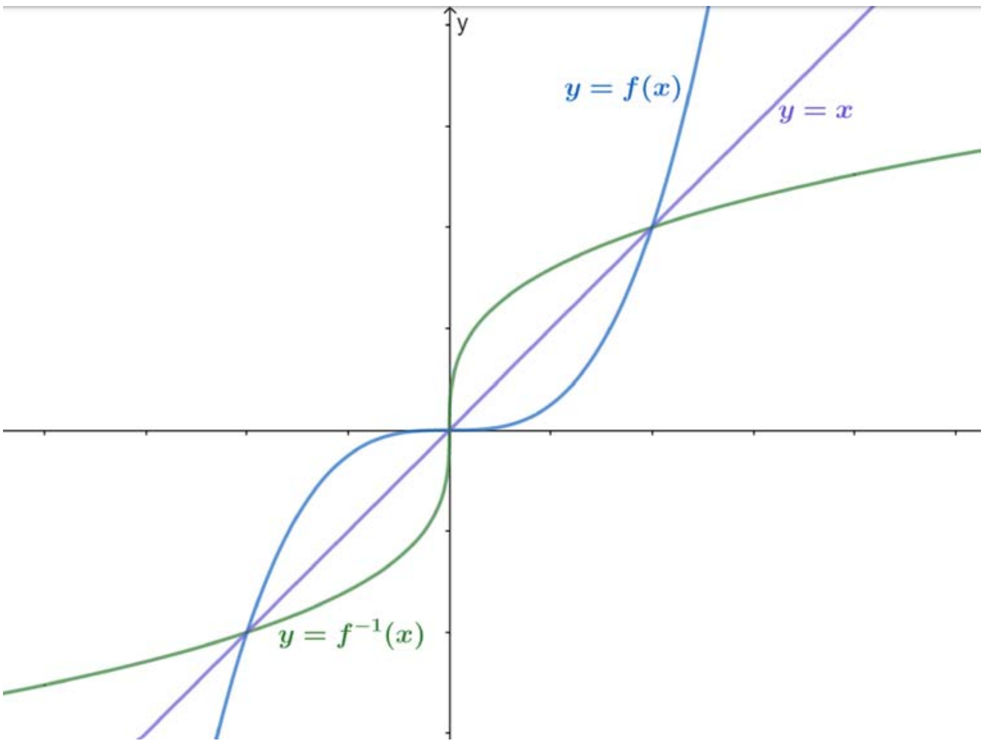
- **Inversa de la composición de funciones.**

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$$

- **Convolución.**

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

- **Gráfica de la función inversa.**
  Las gráficas de f y f^{-1} son **simétricas** respecto de la bisectriz $y = x$



Ejemplo 7: función inversa de funciones trigonométricas
Pueden definirse las funciones inversas de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente restringiendo su dominio y codominio.

- $f(x) = \sin(x)$
  $\Rightarrow$ **Dominio:** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (f inyectiva)

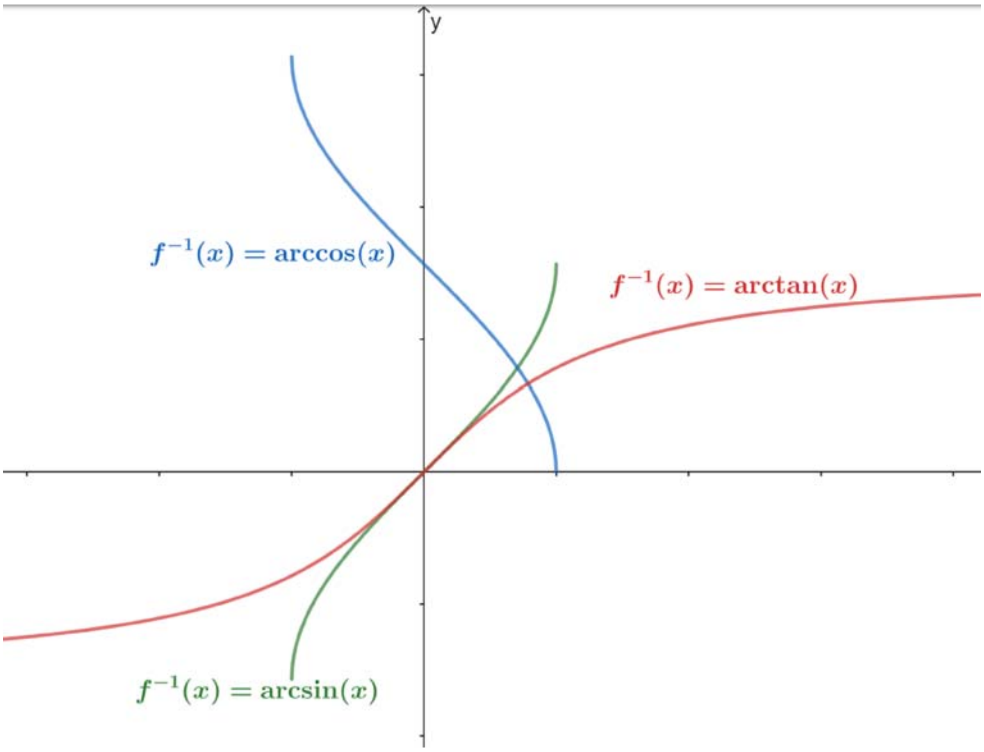
$$f^{-1}(x) = \arcsin(x) \begin{cases} \text{dom}(f) = [-1, 1] \\ \text{rang}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

- $f(x) = \cos(x)$
  $\Rightarrow$ **Dominio:** $[0, \pi]$ (f inyectiva)

$$f^{-1}(x) = \arccos(x) \begin{cases} \text{dom}(f) = [-1, 1] \\ \text{rang}(f) = [0, \pi] \end{cases}$$

- $f(x) = \tan(x)$
  $\Rightarrow$ **Dominio:** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ (f inyectiva)

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x) \begin{cases} \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \\ \mathrm{rang}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$



Ejemplo 8: cálculo de la función inversa
Sea la función $f(x) = 3-5e^{2x}$. Comprobar si cumple la condición de invertibilidad. En caso afirmativo, hallar su función inversa.

- **Dominio.**

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$$

- **Inyectividad.** Para que la f sea invertible debe de ser inyectiva en todo su dominio ($\mathbb{R}$). Vamos a comprobarlo:
  Suponemos $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ tales que $x_1 \neq x_2$. Se ha de llegar a que $f(x_1) \neq f(x_2)$ si f es inyectiva. Haciendo uso de la técnica de reducción al absurdo suponemos que $f(x_1) = f(x_2)$ y buscamos llegar a una contradicción (si es que la hay),

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3 - 5e^{2x_1} = 3 - 5e^{2x_2} \Rightarrow e^{2x_1} = e^{2x_2} \Rightarrow \log(e^{2x_1}) = \log(e^{2x_2}) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

  Como puede comprobarse, se ha llegado a una contradicción, ya que la hipótesis de partida es que $x_1 \neq x_2$. Por lo tanto, se concluye que f es inyectiva en su dominio y, por tanto, invertible.

  Procedemos al cálculo de la función inversa,

$$3 - 5e^{2x} = y \Rightarrow e^{2x} = -\frac{1}{5}y + \frac{3}{5} \Rightarrow \log(e^{2x}) = \log\left(\frac{3-y}{5}\right) \Rightarrow 2x = \log\left(\frac{3-y}{5}\right)$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{3-y}{5}\right) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{3-x}{5}\right)$$