Tema 3: Límites y continuidad de funciones de una variable real

I. V. Toranzo

Cálculo (GII)

Límites de una función

El concepto de límite permite analizar el comportamiento de una función en un **entorno reducido**[1].

Definición: Se dice que el límite de una función, f, cuando x tiende a x_0 es l, que se denota como $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, si $\forall \epsilon>0$, $\exists \delta>0$ tal que

$$|f(x)-l|<\epsilon \quad \text{si} \quad 0<|x-x_0|<\delta$$

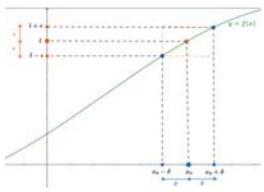

Fig. 1: Representación gráfica del límite de una función.

Se dice que l es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se acerca a x_0.

- l no depende de los valores de f en puntos lejanos a x_0,
- l no depende del valor de f en x_0 ($0<|x-x_0|<\delta$, excluye esta posibilidad)
- puede ocurrir que el valor $f(x_0)$ no esté definido.

Propiedades:

Si existen $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$, se tiene que:

1. **Unicidad del límite.** Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=l_1$ y $\lim_{x\to x_0} f(x)=l_2$, entonces $l_1=l_2$
2. **Suma.** $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$
3. **Producto.** $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$
4. **Cociente.** $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, si $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$
5. **Potencia.** $\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=(\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, si $l\neq 0^0$
6. **Logaritmo.** $\lim_{x\to x_0}\log_a f(x)=\log_a \lim_{x\to x_0} f(x)$, $a>0$ y $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$
7. **Función acotada**[2] Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ y g está acotada en un **entorno reducido** de x_0, entonces
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$$
8. **Lema del sandwich.** Si $\lim_{x\to\alpha} h_1(x)=\lim_{x\to\alpha} h_2(x)=l$ y $h_1(x)\le f(x)\le h_2(x)$ en un entorno reducido de α, entonces
$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=l$$
con $\alpha=x_0, x_0^\pm, \pm\infty$.

Otros tipos de límites:

- **Límites laterales.**
  - **Por la izquierda.** Se dice que el límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a x_0^- es l, que se denota $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$ si
  $\forall\,\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ $ tal que $|f(x)-l|<\epsilon$ si $x\in(x_0-\delta,x_0)$
  - **Por la derecha.** Se dice que el límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a x_0^+ es l, que se denota $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$ si
  $\forall\,\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ $ tal que $|f(x)-l|<\epsilon$ si $x\in(x_0,x_0+\delta)$

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x)=l, \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$$

- **Límites infinitos.**
  - **Eje y.** Se dice que $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty(-\infty)$ si $\forall M\in\mathbb{R}$ $\exists\delta>0$ tal que
  $$f(x)>(<)M \quad \text{si} \quad 0<|x-x_0|<\delta$$
  - **Eje x.** Se dice que $\lim_{x\to+\infty(-\infty)} f(x)=l$ si $\forall\epsilon>0$, $\exists M\in\mathbb{R}$ tal que
  $$|f(x)-l|<\epsilon \quad \text{si} \quad x>(<)M$$

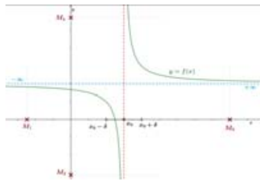

Fig. 2: Límites infinitos en el eje x e y.

Expresiones con ∞.

$a+\infty=\infty$	$a-\infty=-\infty$
$+\infty+\infty=+\infty$	$-\infty-\infty=-\infty$
$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$	$\frac{a}{0}=\pm\infty,\ a\neq 0$
$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$	$\frac{a}{\pm\infty}=0$
$(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$	
$a^\infty=\infty,\ a>1$	$a^\infty=0,\ 0\le a<1$

Indeterminaciones. Son expresiones cuyo valor numérico no se puede determinar *a priori*, pues este depende del límite en particular[3].

Las indeterminaciones más importantes son:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 1^{\pm\infty},\ \frac{0}{0},\ 0^0,\ 0\cdot\infty,\ \infty^0$$

Sugerencias:

- $\frac{\infty}{\infty}$ + f cociente de polinomios o raíces + $x\to\pm\infty$ $\Rightarrow$ dividir numerador y denominador por la variable elevada a la mayor potencia que aparecen en el denominador (numerador).
- $\infty-\infty\Rightarrow$ reducir a común denominador (f es una diferencia de fracciones) o multiplicar y dividir por el conjugado (f es una diferencia de raíces cuadradas).
- $\frac{0}{0}$ + f un cociente de polinomios + $x\to\pm\infty\Rightarrow$ factorizar numerador y denominador y simplificar las potencias de $x-x_0$.
- $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ y $0\cdot\infty\Rightarrow$ regla de Bernouilli-L'Hôpital.
- Si $\lim_{x\to\alpha} f(x)=1$ y $\lim_{x\to\alpha} g(x)=\pm\infty$, entonces
$$\lim_{x\to\alpha}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim_{x\to\alpha}(f(x)-1)g(x)}, \quad \alpha=x_0,x_0^\pm,\pm\infty$$

Continuidad de funciones

Definición: Se dice que una función f es **continua** en un punto x_0 si

1. $\exists f(x_0)$
2. $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)$
3. $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Gráficamente, si f es continua en x_0, la gráfica de f no tiene un **"salto"** en el punto x_0.

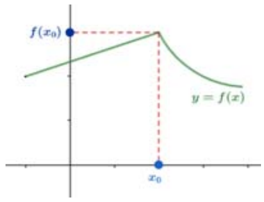

Fig. 3: Gráfica de una función continua.

f es **continua en un abierto**, (a,b), si es continua en todos y cada uno de los puntos de dicho intervalo (sin incluir los extremos).

Propiedades:

Sea f y g funciones continuas en x_0, se tiene que:

- **Suma.** $f(x)+g(x)$ es continua en x_0
- **Producto.** $f(x)\cdot g(x)$ es continua en x_0
- **Cociente.** $\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en x_0, si $g(x_0)\neq 0$.
- **Potencia.** $(f(x))^{g(x)}$ es continua en x_0, si $(f(x))^{g(x)}$ está definida en x_0.
- **Composición.** Si $\lim_{x\to\alpha} f(x)=l$ y $g(x)$ es continua en l, entonces $\lim_{x\to\alpha} g(f(x))=g(l)$, con $\alpha=x_0,x_0^\pm,\pm\infty$.

Otros tipos de continuidad:

- Continuidad lateral:
  - **Por la izquierda.** Se dice que f es continua por la izquierda en x_0 si $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.
  - **Por la derecha.** Se dice que f es continua por la derecha en x_0 si $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

La continuidad lateral permite definir la continuidad de una función f en un **cerrado**.

- Se dice que f es **continua en un cerrado**, $[a,b]$, si:
  - es continua en (a,b)
  - es continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Funciones continuas:

1. Los polinomios, las funciones a^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\arctan(x)$, $|x|$ son continuas en $\mathbb{R}$.
2. Las funciones x^a, $\log_a(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$, $\mathrm{cosec}(x)$, $\arccos(x)$ y $\arcsin(x)$ son continuas en su dominio.

Discontinuidades: existen tres situaciones en las que una función f **no es continua** en un punto x_0:

1. **discontinuidad evitable.**
$$\nexists f(x_0)$$
$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0\\ \lim_{x\to x_0} f(x), & x=x_0\end{cases}$$
es **continua** en x_0.
2. **discontinuidad inevitable.**
$$\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$$
   1. **tipo salto finito.**
   $$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim_{x\to x_0^+} f(x)<\infty$$
   2. **tipo salto infinito.**
   $$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$$

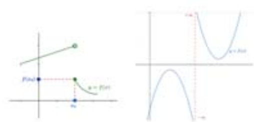

Fig. 4: Gráfica de funciones discontinuas.

[1] Dado el punto x_0, se define un **entorno reducido** como el conjunto $(x_0-\delta_1,x_0+\delta_2)\setminus\{x_0\}$, para ciertos $\delta_1,\delta_2>0$

[2] Una función f se dice que está **acotada** en un conjunto $A\subseteq \mathrm{codom}(f)$ si $\exists M\in\mathbb{R}$ tal que $|f(x)|\le M\ \forall x\in A$.

[3] **No existe** un criterio general para resolver indeterminaciones. Cada indeterminación requerirá un abordaje particular.