TEMA 3: POTENCIAL ELECTROESTÁTICO

PROBLEMA 1

$\vec{E} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$

Todos los campos eléctricos son CONSERVATIVOS, es decir, derivan de una función escalar que llamamos POTENCIAL $\Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V$

* Sabemos que el GRADIENTE de un campo escalar viene dado por:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \rightsquigarrow \text{En } \mathbb{R}^3$$

Estos campos cumplen que su rotacional es NULO $\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$

* Sabemos que el ROTACIONAL de un campo vectorial viene dado por:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \rightsquigarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 2x & y & -z \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \checkmark$$

Vamos a obtener el potencial mediante cuadraturas:

Como: $E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$

Igualamos términos: e integramos

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -2x \rightsquigarrow V_1(x,y,z) = -\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + f_1(y,z)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = -y \rightsquigarrow f_1(y,z) = -\frac{y^2}{2} + f_2(z)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} = +z \rightsquigarrow f_2(z) = \frac{z^2}{2} + k \rightsquigarrow \text{constante}$$

El potencial será: $\underline{\underline{V_1(x,y,z) = -x^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + k}}$

Comprobamos el resultado:

$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -(-2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}) \checkmark$

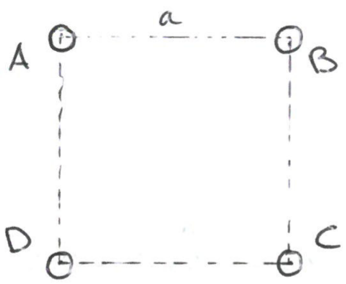
PROBLEMA 2

Sabemos que el potencial creado por una carga puntual q a

Vemos que V_1 es una función RACIONAL con

A.V en "0" y en "a"

PROBLEMA 3



Sabemos que el trabajo realizado para trasladar una carga Q de un punto A a un punto B viene dado por: $W = Q(V_f - V_0)$

Como, inicialmente, todas las cargas están en el ∞ $\Rightarrow V_0 = 0$

* Primera carga en A $\rightsquigarrow W_A = 0 \rightsquigarrow$ Ya que en el cuadrado, todavía, no hay potencial.

* Segunda carga en B $\rightsquigarrow W_B = q(V_B - 0) = q \cdot k\frac{q}{a} = k\frac{q^2}{a}$

 $V_B \rightsquigarrow$ Potencial que genera la 1° carga en B

* Tercera carga en C $\rightsquigarrow W_C = q(V_C - 0) = q\left(k\frac{q}{\sqrt{2}a} + k\frac{q}{a}\right)$

 $V_C \rightsquigarrow$ Pot. que generan la 1° y 2° carga en C

 $W_C = k\frac{q^2}{a}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

* Cuarta carga en D $\rightsquigarrow W_D = q(V_D - 0) = q\left(k\frac{q}{a} + k\frac{q}{\sqrt{2}a} + k\frac{q}{a}\right)$

 $V_D \rightsquigarrow$ Pot. que generan el resto de cargas en D

 $W_D = k\frac{q^2}{a}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\underline{W_{TOTAL}} = W_A + W_B + W_C + W_D = \underline{k\frac{q^2}{a}\left(4 + \sqrt{2}\right)}$$

Usando la expresión $W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot V_i^{*}$

$$W = \frac{1}{2}\left(q_A V_A + q_B V_B + q_C V_C + q_D V_D\right) = \frac{1}{2}k\frac{q}{a}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(q+q+q+q)$$

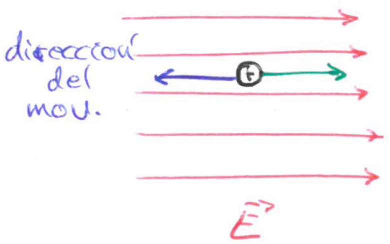
* Siendo V_i el potencial generado por el resto de cargas en el punto "i" en su posición final, es decir:

$$V_i = V_A = V_B = V_C = V_D = k\frac{q}{a}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \underline{W_T = k\frac{q^2}{a}\left(4 + \sqrt{2}\right)} \checkmark$$

PROBLEMA 4

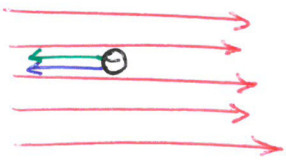
Para llevar una quinta carga al centro del cuadrado (desde el ∞), debemos calcular el potencial en ese punto:

PROBLEMA 5



Un protón ⊕ tiende a moverse en la dirección de $\vec{E}$ ($\longrightarrow$) por lo que, para moverlo en la dirección opuesta debemos imprimirle un trabajo externo aumentando así su potencial: $\underline{W_{ext} > 0}$,, $\underline{\Delta V > 0}$

PROBLEMA 6



En este caso, el electrón ⊖ tiende a moverse en la dirección opuesta al $\vec{E}$ ($\longleftarrow$) por lo que es el $\vec{E}$ el que realiza el trabajo de moverlo disminuyendo así su potencial

$\underline{W_{ext} < 0}$,, $\underline{\Delta V < 0}$

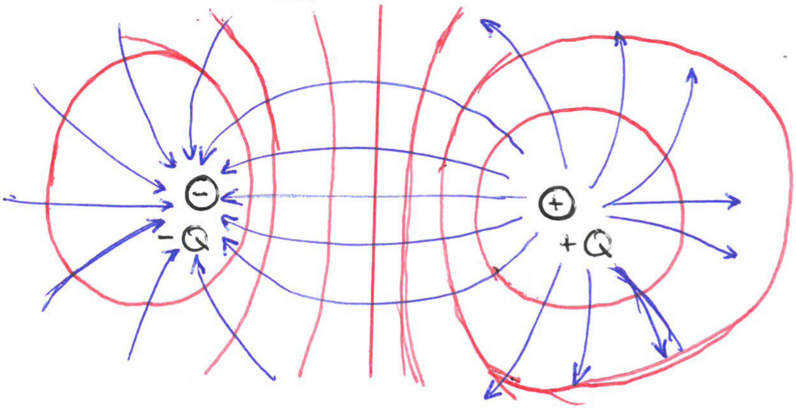
PROBLEMA 7

Si en una región el $V = k \Rightarrow \underline{\vec{E} = -\vec{\nabla} V} = \underline{\vec{0}} \rightsquigarrow$ No hay campo.

PROBLEMA 8

No. Debido a que el $\vec{E}$ se define como una variación del potencial, es decir, $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, debemos conocer un valor inicial (potencial en un punto) y un valor final (potencial en otro punto)

PROBLEMA 9



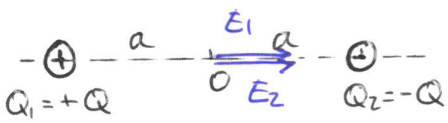
$\longrightarrow$ Líneas de campo $\vec{E}$

~ Curvas de nivel de superficies EQUIPOTENCIALES

Las curvas de nivel de las superficies EQUIPOTENCIALES son PERPENDICULARES a las líneas del campo.

PROBLEMA 10

PROBLEMA 11



$\vec{E_1} = k\dfrac{Q}{a^2}\vec{i}$; $\vec{E_2} = k\dfrac{-Q}{a^2}(-\vec{i}) = k\dfrac{Q}{a^2}\vec{i}$

$\vec{E_T} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = 2k\dfrac{Q}{a^2}\vec{i}$ $\boxed{c)}$

$V_1 = k\dfrac{Q}{a}$; $V_2 = k\dfrac{-Q}{a} \Rightarrow V_T = V_1 + V_2 = 0$

PROBLEMA 12

$q = +2\mu C$

a) V a 4 m ? $\Rightarrow V = k\dfrac{q}{x} = k\dfrac{2.10^{-6}}{4} = 4{,}5.10^{3}\ V$

b) W para desplazar una $q_1 = +3\mu C$ desde el ∞ hasta 4 m de q

$W = q_1(V - \underbrace{V_\infty}_{0}) = 3.10^{-6}.\ 4{,}5.10^{3} = 1{,}35.10^{-2}\ J$

PROBLEMA 13

$\vec{E} = 2.10^3\,\vec{i}\ (N/C)$

$Q = +3\mu C$

a) ¿$V(4m) - V(0)$? Como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\dfrac{dV}{dx}\vec{i}$

$\Delta V = -\int_0^4 E.dx = -2.10^3.\ x\Big|_0^4 = -8.10^3\ V$

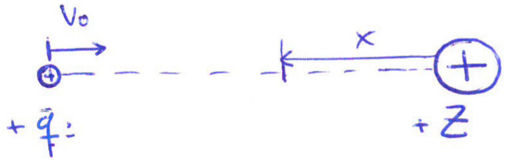
b) La variación de E. Potencial será el trabajo realizado para llevar la carga del punto $x=0$ al $x=4$

$\Delta U = W = Q(V(4) - V(0)) = Q\Delta V = 3.10^{-6}.(-8.10^3) = -2{,}4.10^{-2}\ J$

c) La E. Cinética será la variación de E. Potencial que se ha transformado $\rightsquigarrow E_c = 2{,}4.10^{-2}\ J$

b) $V(x) = -\int_0^x E.dx = -2.10^3 x\Big|_0^x = -2000x\ (V)$

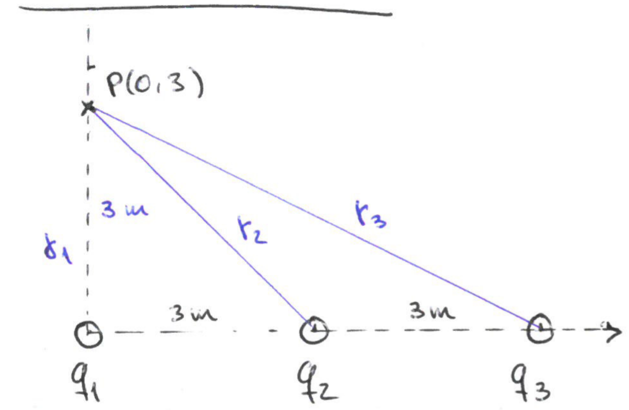
PROBLEMA 14



Como q está muy alejada (∞) $\Rightarrow V_\infty = 0$

El potencial que genera Z a una distancia "x" será: $V(x) = k\dfrac{Z}{x}$

PROBLEMA 15



a) $q_1 = q_2 = q_3 = 2\mu C = q$

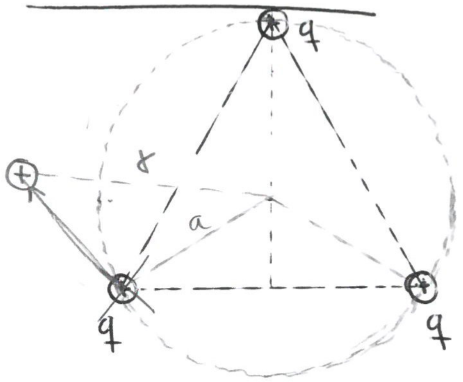
$$V_1 = k\frac{q}{3} \quad ; \quad V_2 = k\frac{q}{3\sqrt{2}} \quad ; \quad V_3 = k\frac{q}{3\sqrt{5}}$$

$$V_T = \sum_{i=1}^{3} V_i = kq\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{5}}\right)$$

b) $q_1 = q_2 = 2\mu C = q \quad q_3 = -2\mu C = -q$

$$V_T = kq\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{5}}\right)$$

PROBLEMA 16



$q = +3\mu C$
$a = 60$ cm

a) V_{centro}

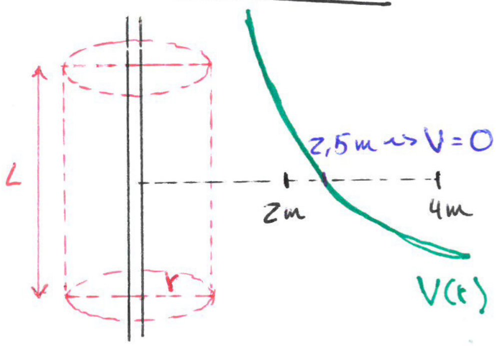
$$V_1 = V_2 = V_3 = k\frac{q}{a} \Rightarrow V_T = 3k\frac{q}{a}$$

$$V_T = 3 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-6}}{0{,}6} = 1{,}35 \cdot 10^5 \text{ V}$$

b) $V_1 = V_2 = k\frac{q}{a} \quad ; \quad V_3 = k\frac{q}{r}$

$$V_T = 2k\frac{q}{a} + k\frac{q}{r} = kq\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{r}\right)$$

PROBLEMA 17



$\lambda = 1{,}5\ \mu C/m$

Calculamos $\vec{E}$ con el Tª Gauss:

$$E \cdot 2\pi r \cancel{L} = \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}$$

Como nos dicen que $V(2{,}5) = 0$

$$V(r) - \underbrace{V(2{,}5)}_{0} = -\int_{2{,}5}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln|r| \Big|_{2{,}5}^{r} =$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left|\frac{r}{2{,}5}\right| \Rightarrow V(2) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left|\frac{2}{2{,}5}\right| = -27 \cdot 10^3 \ln\left|\frac{2}{2{,}5}\right|$$

$$V(4) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left|\frac{4}{2{,}5}\right| = -27 \cdot 10^3 \ln\left|\frac{4}{2{,}5}\right|$$

* Si no estamos seguros de que esté bien, al menos, podemos comprobar que $V(2{,}5) = 0 \rightarrow -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{2{,}5}{2{,}5}\right) = 0$ ✓

• Si $b < r$: $\rightarrow \vec{E} = 0$

Ahora calculamos el potencial:

- Si $b<r \Rightarrow V(r)-\cancel{V(\infty)}^{0} = -\int_{\infty}^{r} \cancel{\vec{E}}^{0}\cdot dr = 0 \Rightarrow V(b)=0$

- Si $a<r<b \Rightarrow V(r)-\cancel{V(b)}^{0} = -\int_{b}^{r} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}\cdot dr = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left|\frac{r}{b}\right|$

$$\Rightarrow V(a)-\cancel{V(b)}^{0} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$$

- Si $0<r<a \Rightarrow V(r)-V(a) = -\int_{a}^{r} \cancel{\vec{E}}^{0}\cdot dr = 0 \rightsquigarrow V(r)=V(a) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$

PROBLEMA 19

$\vec{E} = a(yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k})$ .. $a = 10^{-1}\ N/Cm$

a) Para que $\vec{E}$ sea un campo eléctrico, debe ser un campo conservativo que derive de un potencial, $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Para ello $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = a\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = a\cdot\left[(x-x)\vec{i}+(y-y)\vec{j}+(z-z)\vec{k}\right] = \vec{0} \checkmark$$

b) En $A(1,1,1) \rightsquigarrow \vec{E}_A = a\vec{i}+a\vec{j}+a\vec{k}$

En $B(1,1,-1) \rightsquigarrow \vec{E}_B = -a\vec{i}-a\vec{j}+a\vec{k}$

c) Calculamos la expresión del potencial mediante cuadraturas

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -ayz \rightsquigarrow V(x,y,z) = -axyz + f_1(y,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \left[\cancel{-axz} + \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = \cancel{-axz}\right] \rightsquigarrow f_1(y,z) = f_2(z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \left[\cancel{-axy} + \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} = \cancel{-axy}\right] \rightsquigarrow f_2(z) = k$$

Por lo tanto:

$$V(x,y,z) = -axyz + k \rightsquigarrow \text{Como } V(0,0,0) = -0+k = 0$$

PROBLEMA 20

$$\vec{E_1} = a(-x\vec{j} - z\vec{k})$$
$$\vec{E_2} = a(-y\vec{i} - x\vec{j})$$
$$\vec{E_3} = a(-z\vec{i} - y\vec{k})$$

a) Comprobamos que $\vec{\nabla}\times\vec{E_i} = 0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E_1} = a\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & -x & -z \end{vmatrix} = -a\vec{k} \neq \vec{0} \Rightarrow$$ No es un C. Eléctrico

$$\vec{\nabla}\times\vec{E_2} = a\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ -y & -x & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$ Sí es un C. Eléctrico

$$\vec{\nabla}\times\vec{E_3} = a\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ -z & 0 & -y \end{vmatrix} = -a\vec{i} - a\vec{j} \neq \vec{0} \Rightarrow$$ No es un C. Eléctrico

b) En $A(1,1,1) \rightsquigarrow \vec{E_A} = -a\vec{i} - a\vec{j}$

En $B(1,1,-1) \rightsquigarrow \vec{E_B} = -a\vec{i} - a\vec{j}$

c) Por cuadraturas:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -ay \rightsquigarrow V(x,y,z) = -axy + f_1(y,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \left[\cancel{-ax} + \frac{\partial f_1}{\partial y} = \cancel{-ax}\right] \rightsquigarrow f_1(y,z) = f_2(z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} = 0 \rightsquigarrow f_2(z) = k$$

Por lo tanto:

$$V(x,y,z) = -axy + k \rightsquigarrow \text{Como } V(0,0,0) = 0 + k = 0 \rightsquigarrow k = 0$$

$$V(x,y,z) = -axy$$

d) $V_B - V_A = -a\cdot 1\cdot 1 - (-a\cdot 1\cdot 1) = 0 \rightsquigarrow$ Los puntos A y B forman parte de una misma superficie

e) $W = q(V_0 - V_A) = q\cdot a$