Espacios Vectoriales

1. Definiciones.

1.1. Definición. Espacio vectorial

Sea E un conjunto a cuyos elementos los llamaremos vectores, denotándolos x, y, etc. E es un espacio vectorial si se verifica

1) Existe una ley de composición interna en E, para la cual E tiene estructura de grupo abeliano (denotaremos la ley por suma y al elemento neutro por el vector 0), debiendo por tanto verificar
   a) $\forall x, y \in E$, $x + y \in E$ (ley interna).
   b) $\forall x, y, z \in E$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (propiedad asociativa).
   c) $\forall x, y \in E$, $x + y = y + x$ (propiedad conmutativa).
   d) $\forall x \in E$, $x + 0 = x$ (0 es el elemento neutro).
   e) $\forall x \in E$, $\exists -x$ tal que $x + (-x) = 0$ (existencia de elemento opuesto).
2) Existe sobre E una ley de composición externa, cuyo dominio de operadores es el cuerpo K, con las siguientes propiedades ($\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall x, y \in E$):
   a) Distributiva respecto a la suma de escalares: $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
   b) Distributiva respecto a la suma de vectores: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
   c) Asociativa respecto a los escalares: $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
   d) $1 \cdot x = x$.

1.2. Propiedades de un espacio vectorial

Las principales propiedades de un espacio vectorial son las siguientes

a) $\forall x \in E$, $0 \cdot x = 0$.
b) $\forall \lambda \in K$, $\lambda \cdot 0 = 0$.
c) Si $\lambda x = 0 \implies \lambda = 0$ ó $x = 0$.
d) $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in E$, $(-\lambda)x = -\lambda x = \lambda(-x)$.

1.3. Definición. Sistema de vectores

Un conjunto de vectores lo denominamos sistema de vectores representándolo por $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

NOTA: *Se trabajará, casi en exclusiva, con sistemas con un número finito de vectores.*

1.4. Definición. Combinación lineal

Un vector $x \in E$ es una combinación lineal de los vectores del sistema $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ cuando existen n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$. Los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los "coeficientes" de la combinación lineal.

1.5. Definición. Sistemas libres o ligados

Un sistema S de vectores es libre, diciéndose también que los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente independientes, si $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

En caso contrario, el sistema S es ligado o los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente dependientes.

5) Un sistema S es ligado si y sólo si al menos uno de los vectores de S es combinación lineal de los restantes vectores de S.

6) Si un sistema S es libre y el sistema $S' = S \cup \{x\}$ es ligado, entonces x es combinación lineal de los vectores de S.

1.7. Definición. $L(S)$

$L(S)$ denotará el conjunto de vectores que son combinación lineal de vectores de S.

1.8. Sistemas equivalentes

Dos sistemas S_1 y S_2 son equivalentes si $L(S_1) = L(S_2)$.

Las principales formas de obtener un sistema equivalente a uno dado son

a) Cambiar el orden de los vectores del sistema.

b) Multiplicar cualquier vector por un escalar distinto de 0.

c) Eliminar del sistema un vector que sea combinación lineal de otros vectores del mismo.

d) Sumar a un vector del sistema una combinación lineal de los restantes.

2. Subespacios vectoriales. Operaciones con subespacios

2.1. Definición. Subespacio vectorial

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Todo subconjunto V de E no vacío, $V \neq \emptyset$, que tenga estructura de espacio vectorial con las mismas leyes que E, diremos que es un subespacio vectorial de E.

2.2. Teorema.

La condición necesaria y suficiente para que un conjunto V no vacío sea subespacio vectorial de E, es que se verifique:

$$\forall x, y \in V;\ \forall \lambda, \mu \in K \quad \Longrightarrow \quad \lambda x + \mu y \in V.$$

2.3. Definición. Intersección de subespacios vectoriales

Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de E se define

$$V_1 \cap V_2 = \{\, x \in E \,/\, x \in V_1 \ \text{ y } \ x \in V_2 \,\}$$

El conjunto $V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial.

2.4. Definición.

Dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 son disjuntos si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

2.5. Definición. Suma de subespacios vectoriales

Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de E se define su suma

$$V_1 + V_2 = \{\, x \in E \,/\, x = x_1 + x_2, \ \text{con} \ \ x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \,\}$$

$V_1 + V_2$ es subespacio vectorial.

Si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, la suma se llama directa y se denota $V_1 \oplus V_2$.

Si $V_1 \oplus V_2 = E$, V_1 y V_2 se llaman subespacios suplementarios o complementarios.

3.3. Definición. Dimensión

Al número de elementos de una base de un espacio vectorial de tipo finito, se le llama dimensión del espacio vectorial.

3.4. Definición. Coordenadas de un vector en una base

Sea $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de E y $x \in E$. Si $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ se dice que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las coordenadas del vector x en la base B.

Las coordenadas de un vector en una base B son únicas, supuesto un determinado orden en los vectores que forman la base B.

NOTA: *Un vector tiene tantas coordenadas como la dimensión del espacio al que pertenece.*

3.7. Relaciones entre dimensiones

a) Si V es un subespacio vectorial de E, $\dim V \leq \dim E$. Si $V = \{0\}$, $\dim V = 0$.

b) Si V_1 y V_2 son subespacios vectoriales de V se tiene

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

En particular, $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

PROBLEMAS RESUELTOS

3. *Si x, y, z son vectores linealmente dependientes de V*

i) ¿Se puede asegurar que x depende linealmente de los otros dos?

ii) ¿Se puede asegurar que uno de los tres vectores es combinación lineal de los otros dos?

Razonar las respuestas.

SOLUCIÓN:

i) En general no es cierto. Por ejemplo, escogiendo los vectores x, y, $z = -y$ (x e y linealmente independientes) x, y, z son linealmente dependientes, pero x no es combinación lineal de y, z.

ii) Si x, y, z son vectores linealmente dependientes de V, existen escalares λ_1, λ_2 y λ_3 no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0.$$

Los escalares λ_1, λ_2 y λ_3 no pueden ser los tres nulos. Si por ejemplo, $\lambda_2 \neq 0$, entonces

$$y = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}x - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}z,$$

es decir, y es combinación lineal de los otros dos.

En resumen la proposición primera es falsa y la segunda verdadera.

Pero esto implica que $(\alpha+\gamma)u_1+(\alpha+\beta)u_2+(\beta+\gamma)u_3=0$, y como u_1, u_2, u_3 son linealmente independientes

$$\alpha+\gamma=0, \alpha+\beta=0, \gamma+\beta=0 \text{ de donde } \alpha=\beta=\gamma=0.$$

lo que prueba la independencia de u_1+u_2, u_2+u_3 y u_1+u_3.

———————— • ————————

7. *Determinar* a *y* b *para que el vector* $(1,0,a,b)$ *pertenezca al subespacio engendrado por* $(1,4,-5,2)$ *y* $(1,2,3,-1)$.

SOLUCIÓN:

Debe suceder

$$(1,0,a,b)=\lambda(1,4,-5,2)+\alpha(1,2,3,-1) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 1=\lambda+\alpha \\ 0=4\lambda+2\alpha \\ a=-5\lambda+3\alpha \\ b=2\lambda-\alpha \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones se obtiene $\lambda=-1$, $\alpha=2$, por lo que $a=11$ y $b=-4$.

———————— • ————————

10. *Se considera el espacio vectorial* $I\!R^4$. *Hallar*

i) una base que contenga al vector $(1,2,1,1)$.

ii) una base que contenga a los vectores $(1,1,0,2)$ *y* $(1,-1,2,0)$.

SOLUCIÓN:

i) Como la dimensión de $I\!R^4$ es 4, se pueden elegir tres vectores de la base canónica que con el vector $(1,2,1,1)$ formen una base. Por ejemplo, una posible base puede ser

$$B=\{(1,2,1,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\},$$

dejando la comprobación al lector.

ii) Una base que contenga a los vectores $(1,1,0,2)$, $(1,-1,2,0)$ puede ser

$$B=\{(1,1,0,2),(1,-1,2,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}.$$

Para verlo, comprobemos que son linealmente independientes, aplicando sistemas equivalentes

$$\begin{cases} (1,1,0,2) \\ (1,-1,2,0) \\ (0,0,1,0) \\ (0,0,0,1) \end{cases} \equiv \begin{cases} (1,1,0,2) \\ (0,-2,2,-2) \\ (0,0,1,0) \\ (0,0,0,1) \end{cases}$$

Los últimos vectores son independientes, y por tanto, lo son los de la base B.

———————— • ————————

11. *En el espacio vectorial real* $I\!R^3$ *se considera el sistema* ...

Por tanto, si $2 - a - a^2 \neq 0$, $\dim L(S) = 3$,

$$2 - a - a^2 = 0 \iff (2+a)(1-a) = 0 \iff a = 1, a = -2,$$

luego

i) si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, $\dim L(S) = 3$.
ii) si $a = -2$, $\dim L(S) = 2$, una posible base de $L(S)$ es $\{(1,1,-2),(1,-2,1)\}$.
iii) si $a = 1$, $\dim L(S) = 1$. Una posible base de $L(S)$ es $\{(1,1,1)\}$.

———————— • ————————

12. *Determinar una base del subespacio V engendrado por*

$$\{(1,2,3,1),(2,3,2,3),(0,1,4,-1),(2,-3,1,1),(4,1,7,3)\}.$$

SOLUCIÓN:

La solución la obtendremos por medio de sistemas equivalentes disponiendo los cálculos en la forma que se indica

e_1	1	2	3	1	$u_1 = e_1$	1	2	3	1	$v_1 = u_1$	1	2	3	1
e_2	2	3	2	3	$u_2 = e_2 - 2e_1$	0	-1	-4	1	$v_2 = u_2$	0	-1	-4	1
e_3	0	1	4	-1	$u_3 = e_3$	0	1	4	-1	$v_3 = u_3 + u_2$	0	0	0	0
e_4	2	-3	1	1	$u_4 = e_4 - 2e_1$	0	-7	-5	-1	$v_4 = u_4 - 7u_2$	0	0	23	-8
e_5	4	1	7	3	$u_5 = e_5 - 4e_1$	0	-7	-5	-1	$v_5 = u_5 - u_4$	0	0	0	0

Los vectores $(1,2,3,1)$, $(0,-1,-4,1)$, $(0,0,23,-8)$ son independientes y además generadores de V, pues cada sistema es equivalente al anterior. Por tanto, constituyen una base de V.

———————— • ————————

13. *Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ consideremos los subespacios*

$$V_1 = L\{(1,2,0,1)\}$$
$$V_2 = \{(x,y,z,t) \;/\; x - y + z + t = 0, y - z = 0\}$$
$$V_3 \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \mu \end{cases}$$

¿Pertenece el vector $v = (2,4,0,2)$ a V_1, V_2 ó V_3? En caso afirmativo calcular sus coordenadas en unas bases elegidas previamente.

SOLUCIÓN:

i) Como el vector $(2,4,0,2) = 2(1,2,0,1)$, el vector $v \in V_1$. Escogiendo como base de V_1 el vector $(1,2,0,1)$ la coordenada de v en V_1 es 2.

14. *Encontrar una base para el subespacio de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones paramétricas son*

$$x_1 = \lambda + \alpha + \beta, \qquad x_2 = \lambda - \alpha + 3\beta, \qquad x_3 = \lambda + 2\alpha, \qquad x_4 = 2\lambda + 3\alpha + \beta.$$

SOLUCIÓN:

Las coordenadas de los vectores del subespacio se pueden expresar como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(1,1,1,2) + \alpha(1,-1,2,3) + \beta(1,3,0,1).$$

Por tanto, el sistema $\{(1,1,1,2),(1,-1,2,3),(1,3,0,1)\}$ es generador.

Determinemos los vectores libres de dicho sistema por medio de sistemas equivalentes

$$\begin{array}{lrrrr} e_1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ e_2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ e_3 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{lrrrr} u_1 = e_1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ u_2 = e_2 - e_1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ u_3 = e_3 - e_1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{lrrrr} v_1 = u_1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ v_2 = u_2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ v_3 = u_3 + u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Una base la constituyen, por tanto, los vectores $(1,1,1,2)$ y $(0,-2,1,1)$.

15. *Determinar una base para la suma y la intersección de los subespacios V_1 y V_2 engendrados por $\{(1,2,1,0),(-1,1,1,1)\}$ y $\{(2,-1,0,1),(1,-1,3,7)\}$ respectivamente.*

SOLUCIÓN:

Si $u \in V_1 \cap V_2$ se verificará

$$\alpha(1,2,1,0) + \beta(-1,1,1,1) = \delta(2,-1,0,1) + \gamma(1,-1,3,7),$$

lo que nos lleva al sistema

$$\left.\begin{array}{r} \alpha - \beta = 2\delta + \gamma \\ 2\alpha + \beta = -\delta - \gamma \\ \alpha + \beta = 3\gamma \\ \beta = \delta + 7\gamma \end{array}\right. \equiv \left.\begin{array}{r} 3\alpha = \delta \\ \alpha + \beta = 3\gamma \\ \beta = \delta + 7\gamma \end{array}\right. \equiv \left.\begin{array}{r} 3\alpha = \delta \\ \alpha + \beta = 3\gamma \\ \alpha = -\delta - 4\gamma \end{array}\right. \equiv \left.\begin{array}{r} \alpha = -\gamma \\ \beta = 4\gamma \\ \delta = -3\gamma \end{array}\right.$$

En el segundo sistema la primera ecuación se ha obtenido sumando las dos primeras ecuaciones del primer sistema. En el tercer sistema, se han restado las dos últimas ecuaciones del segundo. Sumando la primera y la última en este sistema se obtiene el resultado final.

Si hacemos $\gamma = 1$, $\delta = -3$ obtenemos un vector que es base para la intersección y que resulta ser $(-5,2,3,4)$.

La dimensión de $V_1 + V_2$ es tres ya que

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

El sistema $\{(1,2,1,0),(-1,1,1,1),(2,-1,0,1),(1,-1,3,7)\}$ es generador de $V_1 + V_2$. Obtengamos una base de $V_1 + V_2$ utilizando sistemas equivalentes.

$$\begin{array}{lrrrr} e_1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lrrrr} u_1 = e_1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Los vectores $(1,2,1,0)$, $(0,3,2,1)$, $(0,0,1,2)$ constituyen una base para la suma.

Otra forma de obtener una base para la intersección es la siguiente:

Las ecuaciones paramétricas de V_1 serán

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha - \beta \\ x_2 &= 2\alpha + \beta \\ x_3 &= \alpha + \beta \\ x_4 &= \beta \end{aligned}$$

Unas ecuaciones implícitas se obtienen despejando los parámetros en dos ecuaciones y sustituyendo su valor en las otras dos:

$$\begin{array}{l} \beta = x_4 \\ \alpha = x_3 - \beta = x_3 - x_4 \end{array} \implies \begin{array}{l} x_1 = x_3 - x_4 - x_4 \\ x_2 = 2(x_3 - x_4) + x_4 \end{array} \implies \begin{array}{l} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{array}$$

Unas ecuaciones paramétricas de V_2 son

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\delta + \gamma \\ x_2 &= -\delta - \gamma \\ x_3 &= 3\gamma \\ x_4 &= \delta + 7\gamma \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones implícitas de V_1

$$\left.\begin{array}{r} 2\delta + \gamma - 3\gamma + 2\delta + 14\gamma = 0 \\ -\delta - \gamma - 6\gamma + \delta + 7\gamma = 0 \end{array}\right\} \implies 4\delta + 12\gamma = 0 \implies \delta + 3\gamma = 0$$

Entonces, unas ecuaciones paramétricas de $V_1 \cap V_2$ serán

$$\begin{aligned} x_1 &= -5\gamma \\ x_2 &= 2\gamma \\ x_3 &= 3\gamma \\ x_4 &= 4\gamma \end{aligned}$$

siendo, por tanto, una posible base de $V_1 \cap V_2$ el vector $(-5,2,3,4)$.

16. *En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales*

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x,y,z) \;/\; x + y + z = 0\} \\ W_2 &= \{(t,2t,3t) \;/\; t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Demostrar que $\mathbb{R}^3$ es suma directa de W_1 y W_2, es decir, $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

SOLUCIÓN:

i) $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$ ya que si $u = (x,y,z) \in W_1 \cap W_2$, entonces se verifica que $x + y + z = 0$, pues $u \in W_1$, $y = 2x$, $z = 3x$ ya que $u \in W_2$.

Por tanto,

$$x + 2x + 3x = 0 \implies 6x = 0 \implies x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a + t \\ y = b + 2t \\ z = c + 3t \\ 0 = a + b + c \end{array}\right\} \implies x + y + z = 6t \implies t = \frac{1}{6}(x + y + z)$$

luego $a = \frac{1}{6}(5x - y - z)$, $b = \frac{2y - x - z}{3}$, $c = \frac{z - x - y}{2}$. Conocidos a, b, c y t en función de x, y, z se obtiene la descomposición de todo vector de $\mathbb{R}^3$ como suma de uno de W_1 y otro de W_2, de donde $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$.

Los resultados de i) y ii) demuestran que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

---

17. *Se considera el subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^5$ engendrado por los vectores* $(1, 2, -1, 1, 0)$, $(1, 3, 0, -1, 1)$ *y* $(0, 1, 1, -2, 1)$. *Obtener un subespacio suplementario.*

SOLUCIÓN:

Encontramos primero una base de V aplicando sistemas equivalentes

$$\begin{array}{lrrrrr|lrrrrr|lrrrrr} e_1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & u_1 = e_1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & v_1 = u_1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ e_2 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 & u_2 = e_2 - e_1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & v_2 = u_2 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ e_3 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & u_3 = e_3 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & v_3 = u_3 - u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Una base está constituida por los vectores $(1, 2, -1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1, -2, 1)$.

Para encontrar una base de un subespacio suplementario basta tomar tres vectores independientes entre sí y con los de la base de V. Éstos pueden ser $(0, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1)$. El subespacio tendrá por ecuaciones paramétricas

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = \lambda, \qquad x_4 = \beta, \qquad x_5 = \alpha$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

3) *i) ¿Son los vectores* $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$ *combinación lineal del sistema* $S = \{(1, 0, 1), (0, 2, 2)\}$*?*

ii) Calcular x e y, si es posible, para que el vector $(1, 2, x, y)$ *sea combinación lineal de los vectores* $(1, 1, 0, 2)$ *y* $(1, 1, 2, 3)$.

4) *Estudiar si los siguientes sistemas son libres o ligados.*

i) $S = \{(1, 2, 3, 0), (4, 3, 4, -16), (7, 3, 4, 5)\}$.

ii) $S = \{(1, 0, 0, -1), (2, 1, 1, -2), (0, 1, 1, 0), (1, -1, -1, -1)\}$.

iii) $S = \{(4, -5, 7), (3, 3, 4), (1, 1, -2), (2, -1, 1)\}$.

5. *Si los vectores e_1, e_2, …, e_n de un espacio vectorial E son linealmente independientes, demostrar que también son linealmente independientes los vectores*

8. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

i) $A = \{(3x_2, x_2, x_4 + x_2, x_4) \ / \ x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.
ii) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 \cdot x_2 = 0\}$.
iii) $C = \{(x_1, x_2, x_1, x_2) \ / \ x_1 = 1\}$.
iv) $D = \{(x_1, x_1, x_1, x_1) \ / \ x_1 \in \mathbb{R}\}$.
v) $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ 2x_1 + x_4 = 0\}$.
vi) $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 + 2x_4 = 7\}$.
vii) $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 2t, x_4 = 5t, t \in \mathbb{R}\}$.
viii) $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$.

11. En el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada x con coeficientes reales, determinar el subespacio engendrado por los vectores $\{x^2, x^4, 1\}$.

12. Probar que los vectores del sistema S, siendo $S = \{(2,1,1), (1,3,1), (-2,1,3)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas del vector $(1,1,2)$ en la base S.

13. Extender el sistema de vectores $S = \{(1,1,-1,1), (1,1,0,1), (1,2,1,1)\}$ para formar una base de $\mathbb{R}^4$.

14. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$V_1 = \{(x,y,z,t) \ / \ x + y + z = 0\}$$
$$V_2 = L\{(1,1,1,1), (1,2,3,4)\}$$
$$V_3 = \{(x,y,z,t) \ / \ x = \alpha + \beta, \ y = \alpha + \gamma, \ z = \gamma + \delta, \ t = \alpha + \delta\}$$

¿Pertenece el vector $(1,0,-1,-2)$ a dichos subespacios? En caso afirmativo calcular las coordenadas de dicho vector con respecto a alguna base de dichos subespacios (la elección de dicha base es arbitraria).

15. El vector x del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tiene de coordenadas $(1,2,3)$ expresado en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Hallar las coordenadas de x en la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ sabiendo que

$$u_1 = 3v_1 + 2v_2 - v_3$$
$$u_2 = 4v_1 + v_2 + v_3$$
$$u_3 = 2v_1 - v_2 + v_3$$

16. En el espacio vectorial real E de los polinomios en una indeterminada x con coeficientes en $\mathbb{R}$, de grado menor o igual que 3 se considera el polinomio

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0).$$

i) Demostrar que los polinomios $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ constituyen una base del espacio vectorial E.
ii) Si $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, hallar en la base $B = \{f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)\}$, las coordenadas del vector $g(x) = 15x^3 - 21x^2 - 18x + 37$.

19. *Consideremos en* $\mathbb{R}^3$ *los subespacios*

$$V_1 = \{(0, x_2, x_3) \ / \ x_2, \ x_3 \in \mathbb{R}\} \qquad\qquad V_2 = L\{(1,1,1),(1,2,3)\}$$

Determinar su suma y hallar una base de la misma.

20. *Se considera el subespacio vectorial* V *de* $\mathbb{R}^5$ *engendrado por los vectores* $(0,2,-1,1,0)$, $(0,3,0,0,1)$, $(0,1,1,-2,1)$. *Obtener un subespacio suplementario.*

21. *Hallar una base del subespacio* V *de* $\mathbb{R}^5$, *siendo*

$$V = \{\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \ / \ x_1 = x_2 = -x_3\,\}.$$

22. *En* $\mathbb{R}^4$ *se considera el conjunto de vectores que verifica*

$$x_1 + x_2 = 0, \qquad\qquad x_3 + x_4 = 0$$

Probar que forman un subespacio vectorial y determinar una base de él.

23. *Se consideran los subespacios vectoriales* V *y* W, *contenidos en* $\mathbb{R}^4$, *donde* V *es el conjunto* $V = \{\,(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 = x_2 = x_3\,\}$ *y las ecuaciones paramétricas de* W *son*

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda + \mu + \beta + 3\gamma \\ x_2 &= \lambda + \mu + 2\gamma \\ x_3 &= \lambda + \gamma \\ x_4 &= \lambda + \beta \end{aligned} \quad , \quad \lambda, \mu, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Se pide

i) *¿Está* $W \subset V$*?*

ii) *Calcular* $V \cap W$.

24. *Consideremos los subespacios* V *y* W *contenidos en* $\mathbb{R}^3$. *Las ecuaciones paramétricas de* V *son*

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda + \gamma \\ x_2 &= \mu + \gamma \\ x_3 &= \lambda + \mu + 2\gamma \end{aligned}$$

siendo la ecuación implícita de $W \equiv y_1 - y_2 + 2y_3 = 0$. *Hallar*

i) *Una base de* V.

ii) *Una base de* $V + W$.

iii) *Una base de* $V \cap W$.

iv) *Unas ecuaciones implícitas de* $V \cap W$.

v) *Una base de un espacio suplementario de* $V + W$.

vi) *Coordenadas de* $(2,3,5)$ *respecto de la base de* $V + W$ *obtenida en el apartado ii).*

25. *Se consideran los subespacios* V *y* W *de* $\mathbb{R}^5$ *definidos de la forma*

$$V \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ \dots \end{cases} \qquad W \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \lambda + \gamma \\ x_3 = 0 \\ \dots \end{cases} \quad \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}.$$

26. Sea $P_3(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales y sea B la base canónica $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$.

Sea V el subespacio de $P_3(x)$ definido por $V = L\{x^2 + 2x, -x^2 + x, x^2 + x\}$. Sea W el subespacio de $P_3(x)$ cuyas ecuaciones implícitas en la base B son

$$W \equiv \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Sea Ω el subespacio de $P_3(x)$ de ecuaciones paramétricas

$$\Omega \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\beta \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Calcular

i) $V \cap W$.
ii) $V + W$.
iii) ¿Son V y W suplementarios?
iv) Una base de $W \cap \Omega$.
v) Unas ecuaciones implícitas de $V + \Omega$.

28. En el espacio vectorial E de las funciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ consideramos los subespacios

$$V_1 = L\{1, e^x, e^{-x}, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$$
$$V_2 = L\{\cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x, e^x\}$$

Calcular $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.

BIBLIOGRAFÍA