Aplicaciones lineales

1. Definiciones y propiedades

1.1. Definición. Aplicación lineal

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y f una aplicación de E en F.

f es una aplicación lineal si verifica

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in E$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in K, \ \forall x \in E$$

NOTA: *Se empleará indistintamente la palabra homomorfismo o aplicación lineal.*

1.2. Teorema.

f es un homomorfismo o aplicación lineal si y sólo si

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \forall \lambda, \mu \in K; \ \forall x, y \in E.$$

1.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Las principales propiedades de los homomorfismos entre espacios vectoriales son

a) $f(0) = 0$.
b) $\forall x \in E, \ f(-x) = -f(x)$.
c) La imagen de un subespacio vectorial V de E es un subespacio vectorial de F. En particular, $f(E)$ recibe el nombre de subespacio imagen de f. Se suele denotar $\operatorname{Im} f$.
d) Si S es un sistema de generadores de un subespacio vectorial V de E, entonces $f(S)$ es un sistema de generadores del subespacio vectorial $f(V)$. Por tanto, f es sobre si siendo B una base de E, $f(B)$ es un sistema de generadores de F.
e) Si V es un subespacio de F, $f^{-1}(V)$ es un subespacio de E.

1.4. Nomenclatura

Sea f un homomorfismo de E en F.

1) Si $E = F$, a f se le denomina endomorfismo.
2) Si f es inyectivo, se denomina monomorfismo.
3) Si f es sobre, se llama epimorfismo.
4) Si f es biyectivo recibe el nombre de isomorfismo.
5) Un endomorfismo biyectivo se llama automorfismo.

1.5. Definición. Núcleo

Se llama núcleo de una aplicación lineal f, designándose $\operatorname{Ker} f$ ó $N(f)$, al conjunto

$$\operatorname{Ker} f = \{ x \in E \ / \ f(x) = 0 \}.$$

1.6. Propiedades del núcleo

1.7. Definición. Rango de una aplicación lineal

El rango de una aplicación lineal es la dimensión del espacio $f(E)$.
Si los espacios son de dimensión finita, se tiene la siguiente igualdad

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rang} f = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim f(E).$$

NOTA: *En particular, si $\dim E = \dim F = n$ son equivalentes los conceptos de epimorfismo, monomorfismo e isomorfismo.*

2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Matriz asociada a una aplicación lineal

Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensiones n y m, $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de E, $B' = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ una base de F.

Sea $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j u_j$. Si

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \\ f(e_2) &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(e_n) &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m \end{aligned}$$

se tiene $Y = AX$, siendo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde Y es la matriz columna que representa las coordenadas de $f(x)$ en la base B', X es la matriz columna que representa las coordenadas de x en la base B; A, que puede denotarse por $M(f, B, B')$, es la matriz del homomorfismo en las bases B y B' (o con respecto a las bases B y B'). Las columnas de la matriz A son las coordenadas de los vectores $f(e_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, respecto de la base B'. A es una matriz de orden $m \times n$.

Fijadas las bases B y B' la matriz del homomorfismo es única.

2.2. Operaciones con homomorfismos y matrices relacionadas con ellos

Sean E y F dos espacios vectoriales, B una base de E, B' una base de F. Sean f y g dos homomorfismos de E en F, siendo

$$A = M(f, B, B') \qquad\qquad C = M(g, B, B')$$

Al homomorfismo suma $f + g$ definido por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in E$$

le corresponde la matriz $A + C$.

Al homomorfismo λf (producto por un escalar) definido por

posición de aplicaciones la matriz asociada a f^{-1} será A^{-1}.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. *Dados dos espacios vectoriales E y F, determinar qué aplicaciones $f: E \longrightarrow F$ de las siguientes son homomorfismos*
   i) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = x + x_0$, *con* x_0 *un vector fijo de* $\mathbb{R}^3$.
   ii) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = x_0$, *con* x_0 *un vector fijo de* $\mathbb{R}^3$.
   iii) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1^2, 0, x_2 + x_3)$, *siendo* $x = (x_1, x_2, x_3)$.
   iv) $E = F = M_{n\times n}$, $f(A) = A + A'$.
   v) $E = F = P_3(\mathbb{R})$, $f[p(x)] = xp'(x)$.

SOLUCIÓN:

i) $f(x+y) = x + y + x_0$, $f(x) + f(y) = x + y + x_0 + x_0$. Para que sean iguales $x_0 = 0$, es decir, si $x_0 \neq 0$ no es homomorfismo y si $x_0 = 0$ queda $f(x) = x$, que trivialmente es homomorfismo.

ii) $f(x+y) = x_0$ y $f(x) + f(y) = x_0 + x_0$, por tanto, si $x_0 \neq 0$ no es homomorfismo y si $x_0 = 0$ es el homomorfismo nulo, es decir, $f(x) = 0$, $\forall x \in E$.

iii) $f(1,0,1) = (1,0,1)$, $f(2,0,1) = (4,0,1)$ y $f(3,0,2) = (9,0,2)$. Como se tiene que $f(1,0,1) + f(2,0,1) \neq f(3,0,2)$, no es homomorfismo.

iv) Sean A, $B \in M_{n\times n}$ y sean λ, $\mu \in K$.

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \mu B) &= (\lambda A + \mu B) + (\lambda A + \mu B)' = \lambda A + \mu B + \lambda A' + \mu B' \\ &= \lambda(A + A') + \mu(B + B') = \lambda f(A) + \mu f(B). \end{aligned}$$

Por tanto, f es aplicación lineal.

v) Sean $p(x)$, $q(x) \in P_3(\mathbb{R})$ y λ, $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f[\lambda p(x) + \mu q(x)] &= x[\lambda p(x) + \mu q(x)]' = x[\lambda p'(x) + \mu q'(x)] \\ &= \lambda x p'(x) + \mu x q'(x)] = \lambda f[p(x)] + \mu f[q(x)]. \end{aligned}$$

Por tanto, f es homomorfismo.

---

2. *Estudiar si las aplicaciones*
   i) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *definida por* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1 + x_2, -x_3)$.
   ii) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *definida por* $f(x, y, z) = (x + y, 0)$

   son aplicaciones lineales. En caso afirmativo, calcular su núcleo y su imagen. Estudiar su inyectividad.

SOLUCIÓN:

i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\begin{aligned} f[\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3)] &= f(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \\ &= (\lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2, -\lambda x_3 - \mu y_3) \\ &= (\lambda x_3 + \mu y_3, \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2), -\lambda x_3 - \mu y_3) \\ &= \lambda(x_3, x_1 + x_2, -x_3) + \mu(y_3, y_1 + y_2, -y_3) \\ &= \lambda f(x_1, x_2, x_3) + \mu f(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

por tanto, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ de donde se deduce que f no es sobreyectiva.

Como sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$, tendremos que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. $\operatorname{Ker} f$ será la solución del sistema

$$\begin{cases} 0 = x_3 \\ 0 = x_1 + x_2 \\ 0 = -x_3 \end{cases}$$

que son unas ecuaciones implícitas del núcleo. Para obtener unas ecuaciones paramétricas resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas de $\operatorname{Ker} f$. Haciendo $\lambda = 1$, se obtiene una base de $\operatorname{Ker} f$, $B_{\operatorname{Ker} f} = \{(-1,1,0)\}$, por lo tanto, f no es inyectiva.

ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\forall (x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\begin{aligned} f[\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')] &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', 0) = (\lambda(x+y) + \mu(x'+y'), 0) \\ &= \lambda(x+y,0) + \mu(x'+y',0) = \lambda f(x,y,z) + \mu f(x',y',z') \end{aligned}$$

Luego f es lineal.

Calculamos $\operatorname{Im} f$. Como $f(1,0,0) = (1,0)$, $f(0,1,0) = (1,0)$, $f(0,0,1) = (0,0)$, los vectores imagen $\{(1,0),(1,0),(0,0)\}$ forman un sistema de generadores de la imagen. Una base de la imagen puede ser $B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,0)\}$ y $\dim \operatorname{Im} f = 1$, con lo cual f no es sobre.

Unas ecuaciones paramétricas de $\operatorname{Im} f$ son

$$\begin{cases} y_1 = \lambda \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Una ecuación implícita de $\operatorname{Ker} f$ es $x + y = 0$.

Entonces unas ecuaciones paramétricas de $\operatorname{Ker} f$ son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \mu \end{cases}$ y una base del núcleo de f es $\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$. Por tanto la aplicación f no es inyectiva, ya que $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$.

---

3. *Dado el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por las ecuaciones*

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 &= x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}$$

donde (x_1,x_2,x_3) e (y_1,y_2,y_3) son las coordenadas de un vector y su transformado en la base canónica, calcular

i) $\operatorname{Ker} f$.

ii) $\operatorname{Im} f$.

f puede ser $B_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,-1,0)\}$.

ii) Calculamos los transformados de la base canónica

$$f(1,0,0)=(1,1,0) \qquad f(0,1,0)=(1,1,0) \qquad f(0,0,1)=(1,-1,1)$$

Por tanto, $S=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,-1,1)\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im} f$ siendo una posible base $S'=\{(1,1,0),(1,-1,1)\}$.

iii) V es un subespacio de dimensión 2. Un sistema de generadores de V puede ser $S=\{(1,-1,0),(1,1,-2)\}$. Entonces, $f(S)=\{(0,0,0),(0,4,-2)\}$ es un sistema de generadores de $f(V)$. Una base de $f(V)$ puede ser $B_{f(V)}=\{(0,4,-2)\}$.

9. *Se considera el homomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ que hace corresponder a los vectores* $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ *los vectores* $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,1)$, *respectivamente. Se pide*
   i) Matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
   ii) Subespacio transformado de $V \equiv x_1+x_2-x_3=0$.

SOLUCIÓN:

i) Sean

$$B_c=\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\} \qquad B_c^*=\{u_1=(1,0),u_2=(0,1)\}$$

las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

Para calcular la matriz del homomorfismo en las bases canónicas, $M(f,B_c,B_c^*)$, necesitamos conocer las coordenadas en B_c^* de los vectores $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$.

Conocemos las imágenes de los vectores de la base

$$B=\{v_1=(1,0,1),v_2=(0,1,1),v_3=(1,1,0)\}.$$

Debemos, por tanto, expresar los vectores de B_c en función de los de B.

Como $(1,0,0)=\frac{1}{2}v_1-\frac{1}{2}v_2+\frac{1}{2}v_3$, entonces

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= \frac{1}{2}f(v_1)-\frac{1}{2}f(v_2)+\frac{1}{2}f(v_3) \\ &= \frac{1}{2}(0,1)-\frac{1}{2}(0,2)+\frac{1}{2}(1,1)=\left(\frac{1}{2},0\right) \end{aligned}$$

Como $(0,1,0)=-\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}v_2+\frac{1}{2}v_3$, se tiene,

$$f(0,1,0)=-\frac{1}{2}f(v_1)+\frac{1}{2}f(v_2)+\frac{1}{2}f(v_3)=\left(\frac{1}{2},1\right).$$

Como $(0,0,1)=\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}v_2-\frac{1}{2}v_3$ se obtiene

$$f(0,0,1)=\frac{1}{2}f(v_1)+\frac{1}{2}f(v_2)-\frac{1}{2}f(v_3)=\left(-\frac{1}{2},1\right).$$

y una posible base de V es $B_V = \{(1,0,1),(0,1,1)\}$. $\{f(1,0,1), f(0,1,1)\}$ será un sistema de generadores de $f(V)$. Como

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

el vector $(0,1)$ es una base de $f(V)$ siendo unas posibles ecuaciones paramétricas de $f(V) \equiv \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \lambda \end{cases}$ y una posible ecuación implícita de $f(V)$ es $x_1 = 0$. Obsérvese que "hemos perdido" dimensiones por medio del homomorfismo f, ya que siendo V de dimensión 2, $f(V)$ es de dimensión 1.

---

11. *Se define un homomorfismo $f: E^3 \longrightarrow E^4$ tal que $f(e_1 - e_3) = u_1$, $f(e_2 - e_3) = u_1 - u_2$ y $f(2e_3) = 2u_1 + 2u_3$, donde $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de E^3 y $B' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es una base de E^4. Se pide*
    - *i) Matriz asociada a f en las bases B y B'.*
    - *ii) Ecuaciones no paramétricas de $\operatorname{Im} f$.*
    - *iii) Núcleo de f.*
    - *iv) Ampliando una base del núcleo a una de E^3, hallar la matriz de f en dicha base y en la base B' de E^4.*

SOLUCIÓN:

i) Para obtener la matriz asociada a f en B y B' nos hace falta conocer $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$. Al ser

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_3) &= f(e_1) - f(e_3) = u_1 \\ f(e_2 - e_3) &= f(e_2) - f(e_3) = u_1 - u_2 \\ f(2e_3) &= 2f(e_3) = 2u_1 + 2u_3 \end{aligned}$$

Se deduce que

$$f(e_3) = u_1 + u_3 \qquad f(e_1) = 2u_1 + u_3 \qquad f(e_2) = 2u_1 + u_3 - u_2$$

Por tanto, $M(f, B, B') = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ii) Un sistema de generadores del subespacio imagen será

$$S = \{(1,0,1,0),(2,0,1,0),(2,-1,1,0)\}$$

Vamos a comprobar que es un sistema libre.

$$\lambda(1,0,1,0) + \mu(2,0,1,0) + \rho(2,-1,1,0) = (0,0,0,0) \implies$$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + 2\rho &= 0 \\ -\rho &= 0 \\ \lambda + \mu + \rho &= 0 \end{cases} \implies \lambda = \mu = \rho = 0.$$

S es un sistema libre y por tanto, S es una base de $\operatorname{Im} f$, con lo que $\dim \operatorname{Im} f = 3$. El número de ecuaciones implícitas de $\operatorname{Im} f$ será $4 - 3 = 1$.

iv) Como el núcleo se reduce al vector cero, cualquier base de E^3 es una base ampliada de la del núcleo; por ejemplo $B^* = \{(1,-1,0),(0,1,1),(0,1,0)\}$.

Nos piden $M(f,B^*,B')$; por lo tanto, necesitamos conocer las imágenes de los vectores $(1,-1,0)$, $(0,1,1)$ y $(0,1,0)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies f(1,-1,0) = (0,1,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \implies f(0,1,1) = (3,-1,2,0)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies f(0,1,0) = (2,-1,1,0)$$

Por lo tanto, $M(f,B^*,B') = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

12. *Se define una aplicación lineal $f\colon E_3 \longrightarrow E'_3$ de manera que $f(e_1) = u_1 - u_2$, $f(e_2) = u_2$, $f(e_3) = u_1$ siendo $B = \{e_1,e_2,e_3\}$ y $B' = \{u_1,u_2,u_3\}$ bases de E_3 y E'_3, respectivamente. Se pide*

i) Matriz asociada a f en las bases B y B'.

ii) Dimensión de $\operatorname{Im} f$.

iii) Una base de $\operatorname{Ker} f$.

iv) Calcular unas ecuaciones implícitas de $f(V)$ si $V \equiv \begin{cases} x_1 = \rho \\ x_2 = \rho \\ x_3 = \rho + \delta \end{cases}$

v) Si en E_3 se realiza el cambio de base $B_1^* = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ donde $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_1 + e'_2$ y $e_3 = e'_1 + e'_3$, calcular la nueva matriz asociada a f en las bases B_1^* y B'.

vi) Si en E'_3 se hace el cambio de coordenadas $x'_1 = x_1 + x_2 - x_3$, $x'_2 = x_1 - x_2$ y $x'_3 = x_3$, calcular la nueva matriz asociada a f, siendo (x'_1, x'_2, x'_3) las coordenadas en una nueva base B_2^*.

vii) Obtener la matriz de f cuando se realizan simultáneamente los dos cambios anteriores.

SOLUCIÓN:

i) Por ser la matriz asociada la que tiene por columnas las coordenadas de los vectores $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$ se tiene

$$M(f,B,B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) $S = \{(1,-1,0),(0,1,0),(1,0,0)\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im} f$. El conjunto

iv) $B_V = \{(1,1,1),(0,0,1)\}$ es una base de V; por tanto, $f(B_V) = \{f(1,1,1), f(0,0,1)\}$ es un sistema de generadores de $f(V)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad f(1,1,1) = (2,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad f(0,0,1) = (1,0,0)$$

luego, $B_{f(V)} = \{(1,0,0)\}$ es una base de $f(V)$ y unas ecuaciones paramétricas de $f(V)$ son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

El número de ecuaciones implícitas es $3 - 1 = 2$ por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

son unas ecuaciones implícitas de $f(V)$.

v) Si $B_1^* = \{e_1', e_2', e_3'\}$ para calcular $M(f, B_1^*, B')$ necesitamos conocer las imágenes de e_1', e_2' y e_3'

$$\begin{array}{l} f(e_1) = f(e_1') \\ f(e_2) = f(e_1') + f(e_2') \\ f(e_3) = f(e_1') + f(e_3') \end{array}$$

de donde

$$f(e_1') = (1,-1,0), \qquad f(e_2') = (-1,2,0), \qquad f(e_3') = (0,1,0);$$

por tanto $M(f, B_1^*, B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

vi) La ecuación matricial del cambio de base es

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

siendo (x_1', x_2', x_3') las coordenadas en la nueva base B_2^* y (x_1, x_2, x_3) las coordenadas en B'.

Para calcular $M(f, B, B_2^*)$ hallaremos las coordenadas de $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$ respecto de la base B_2^*.

$f(e_1) = (1,-1,0)$ tendrá por coordenadas en B_2^*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas de $f(e_2) = (0,1,0)$ en B_2^* serán

Por lo tanto, $M(f,B,B_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

vii) Hallamos las coordenadas de $f(e_1') = (1,-1,0)$ en B_2^*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora las coordenadas de $f(e_2') = (-1,2,0)$ en B_2^*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos lo mismo con $f(e_3') = (0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $M(f,B_1^*,B_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. *En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{e_1,e_2,e_3\}$. Clasificar el endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $f(e_1) = ae_1 + e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$ y $f(e_3) = e_1 + be_2 + e_3$ según los valores de a y b.*

SOLUCIÓN:

La matriz del endomorfismo f en la base B es

$$M(f,B,B) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un sistema de generadores de $\operatorname{Im} f$ es $S = \{(a,1,1),(1,1,1),(1,b,1)\}$. Un sistema equivalente a S puede ser $S' = \{(1,1,1),(a-1,0,0),(0,b-1,0)\}$. Distinguimos los casos siguientes

i) $a \neq 1$ y $b \neq 1$, entonces S es libre, ya que $\dim L(S) = \dim L(S') = 3$. En este caso, $\dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ y f es sobreyectivo. Además, $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ y f es inyectivo. Por lo tanto, f es un automorfismo.

ii) $a = 1$ y $b \neq 1 \Longrightarrow B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,1,1),(1,b,1)\}$ es una base de $\operatorname{Im} f$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ y f no es sobreyectivo. Además, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ y f no es inyectivo.

iii) $a \neq 1$ y $b = 1$ es un caso análogo al anterior, f no es inyectivo y tampoco sobreyectivo.

iv) $a = 1$ y $b = 1$, $B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,1,1)\}$, $\dim \operatorname{Im} f = 1$ y f no es sobreyectivo. Además, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ y f no es inyectivo.

SOLUCIÓN:

i) Las ecuaciones del homomorfismo f son

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 - x_3 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = x_1 \end{cases}$$

cuya forma matricial es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$M(f, B_c^3, B_c^4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$S = \{(1,1,0,1), (-1,0,0,0), (0,-1,0,0)\}$ es un sistema de generadores libre de $\operatorname{Im} f$, luego $\dim \operatorname{Im} f = 3$ y el rango de f es 3.

ii) Siendo (z_1, z_2) las coordenadas de un vector de $\mathbb{R}^2$ las ecuaciones del homomorfismo g las podemos escribir como

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_4 \\ z_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$M(g, B_c^4, B_c^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$S = \{(1,1), (0,-1), (1,0)\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im} g$, por tanto, el conjunto $T = \{(0,-1), (1,0)\}$ es una base de $\operatorname{Im} g$, $\dim \operatorname{Im} g = 2$ que es el rango de g.

iii) La matriz asociada a $g \circ f$ es el producto de las matrices $B \cdot A$

$$M(g \circ f, B_c^3, B_c^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

iv) $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ viene dado por los vectores solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas de $\operatorname{Ker}(g \circ f)$; haciendo $\lambda = 1$ se tiene que $\{(1,2,2)\}$, es una base del $\operatorname{Ker}(g \circ f)$, y unas ecuaciones implícitas pueden ser

$f(e_3) = 2u_2$ $\quad$ $g(u_2) = c_1 - c_2$

Se pide

i) Matriz del homomorfismo $h = g \circ f : A \longrightarrow C$.

ii) Encontrar el conjunto $h^{-1}\{(1,1,1)\}$, *donde* $(1,1,1) \in C$.

iii) Núcleo de h.

iv) Imagen mediante h *del subespacio intersección de los subespacios de* A *siguientes*

$$V_1 = \begin{cases} x_1 = 2\lambda + \beta \\ x_2 = \lambda - \beta \\ x_3 = -\lambda \end{cases} \qquad\qquad V_2 = x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

SOLUCIÓN:

i) La matriz F de f es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz G de g es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Por tanto, la matriz H de $h = g \circ f$ será

$$H = G \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) $h^{-1}\{(1,1,1)\}$ es el conjunto de vectores (x_1, x_2, x_3) de A que se transforman en $(1,1,1)$ mediante h; por tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_2 + 2x_3 & = 1 \\ -x_2 - 2x_3 & = 1 \\ 2x_1 & = 1 \end{cases}$$

No hay ningún vector que satisfaga simultáneamente las dos primeras ecuaciones por tanto $h^{-1}\{(1,1,1)\} = \emptyset$.

iii) El núcleo de h es la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2\lambda \\ x_3 = -\lambda \end{cases}$$

iv) Eliminando λ y β en las ecuaciones paramétricas de V_1, esto es, haciendo $\lambda = -x_3$, $\beta = -x_2 - x_3$, y sustituyendo en x_1, obtenemos que la ecuación implícita de V_1 es $x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$.

Un vector de $V_1 \cap V_2$ satisfará las dos ecuaciones de V_1 y V_2, es decir

$$V_1 \cap V_2 \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

de donde $x_3 = 2\lambda$, $x_1 = -5\lambda$, $x_2 = -\lambda$.

Esto es, un vector de $V_1 \cap V_2$ es de la forma $(-5\lambda, -\lambda, 2\lambda)$ y una base de la misma es $(5, 1, -2)$.

Para obtener el subespacio transformado de $V_1 \cap V_2$, calculamos un sistema de

$x_3 = 10\lambda$

Unas ecuaciones implícitas de dicho subespacio pueden ser

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_3 - 10x_2 &= 0 \end{cases}$$

18. *Sea $P_3(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Sea $f: P_3(x) \longrightarrow P_3(x)$ definida por $f[p(x)] = \beta p(x) + p'(x)$ con $\beta \in \mathbb{R}$.*
    i) Probar que f es una aplicación lineal.
    ii) Hallar $N(f)$ e $\operatorname{Im} f$ según los valores de β.
    iii) Suponiendo $\beta = 1$, hallar la matriz asociada a f, cuando se considera en $P_3(x)$ la base $B = \{2, x+1, x^2-1, x^3+1\}$, tanto en el espacio de partida como en el de llegada.

SOLUCIÓN:

i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\forall p(x), q(x) \in P_3(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} f[\lambda p(x) + \mu q(x)] &= \beta[\lambda p(x) + \mu q(x)] + \lambda p'(x) + \mu q'(x) \\ &= \beta\lambda p(x) + \lambda p'(x) + \mu\beta q(x) + \mu q'(x) \\ &= \lambda[\beta p(x) + p'(x)] + \mu[\beta q(x) + q'(x)] = \lambda f[p(x)] + \mu f[q(x)] \end{aligned}$$

Por tanto, f es una aplicación lineal.

ii) Consideremos en $P_3(x)$ la base canónica $B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$ y calculamos las coordenadas de las imágenes de sus elementos.

- $f(1) = \beta$, cuyas coordenadas en B_c son $(\beta, 0, 0, 0)$.
- $f(x) = \beta x + 1$, cuyas coordenadas en B_c son $(1, \beta, 0, 0)$.
- $f(x^2) = \beta x^2 + 2x$, cuyas coordenadas en B_c son $(0, 2, \beta, 0)$.
- $f(x^3) = \beta x^3 + 3x^2$, cuyas coordenadas en B_c son $(0, 0, 3, \beta)$.

Por lo tanto, la matriz de f en la base canónica será

$$M(f, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$S = \{(\beta,0,0,0), (1,\beta,0,0), (0,2,\beta,0), (0,0,3,\beta)\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im} f$.

Si $\beta \neq 0$ entonces el sistema es libre, como se ve inmediatamente; por lo tanto, $\dim \operatorname{Im} f = 4$, luego $\operatorname{Im} f = P_3(x)$ y $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, es decir, f es biyectiva.

Si $\beta = 0$, $S' = \{(1,0,0,0), (0,2,0,0), (0,0,3,0)\}$ es una base de $\operatorname{Im} f$ por ser un sistema libre de generadores. En este caso, $\dim \operatorname{Im} f = 3$ y $\dim \operatorname{Ker} f = 1$; por tanto, f no es ni sobreyectiva ni inyectiva.

Unas ecuaciones paramétricas de $\operatorname{Im} f$ serán

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\mu \\ z = 3\rho \\ t = 0 \end{cases}, \qquad \lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$$

El número de ecuaciones implícitas es $4 - 3 = 1$, por tanto, $t = 0$ es una ecuación implícita de $\operatorname{Im} f$.

El núcleo viene dado por el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$S = \{(\beta,0,0,0),(1,\beta,0,0),(0,2,\beta,0),(0,0,3,\beta)\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im} f$.

Si $\beta \neq 0$ entonces el sistema es libre, como se ve inmediatamente; por lo tanto, $\dim \operatorname{Im} f = 4$, luego $\operatorname{Im} f = P_3(x)$ y $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, es decir, f es biyectiva.

Si $\beta = 0$, $S' = \{(1,0,0,0),(0,2,0,0),(0,0,3,0)\}$ es una base de $\operatorname{Im} f$ por ser un sistema libre de generadores. En este caso, $\dim \operatorname{Im} f = 3$ y $\dim \operatorname{Ker} f = 1$; por tanto, f no es ni sobreyectiva ni inyectiva.

Unas ecuaciones paramétricas de $\operatorname{Im} f$ serán

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\mu \\ z = 3\rho \\ t = 0 \end{cases}, \qquad \lambda,\mu,\rho \in \mathbb{R}$$

El número de ecuaciones implícitas es $4 - 3 = 1$, por tanto, $t = 0$ es una ecuación implícita de $\operatorname{Im} f$.

El núcleo viene dado por el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas del $\operatorname{Ker} f$ y $(1,0,0,0)$ es una base del $\operatorname{Ker} f$, el cual tiene $4 - 1 = 3$ ecuaciones implícitas independientes, que pueden ser

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

19. *Se dan los espacios vectoriales $P_3(x)$ y $M_{2\times 2}$ con las bases canónicas $B_c = \{x^3, x^2, x, 1\}$ y*

$$B_c^* = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Se considera el homomorfismo $f\colon P_3(x) \longrightarrow M_{2\times 2}$ definido por

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a & b-d \\ c-b & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide

i) Matriz del homomorfismo en las bases citadas.

ii) Ecuaciones implícitas del subespacio imagen.

iii) Calcular una base del núcleo.

SOLUCIÓN:

i) Necesitamos las coordenadas de $f(x^3)$, $f(x^2)$, $f(x)$ y $f(1)$ en la base B_c^*.

- $f(x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$ que tiene por coordenadas $(1,0,0,0)$ en B_c^*

Por lo tanto,

$$M(f, B_c, B_c^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Un sistema libre de generadores de $\operatorname{Im} f$ es $S = \{(1,0,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,0)\}$; por tanto, una base de $\operatorname{Im} f$ será $B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,0,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,0)\}$ y unas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = -\mu + \rho \\ x_4 = 0 \end{cases}, \qquad \lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}.$$

El número de ecuaciones implícitas de $\operatorname{Im} f$ es $4 - 3 = 1$ y $x_4 = 0$ es una ecuación implícita de $\operatorname{Im} f$.

iii) $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ y $\operatorname{Ker} f$ es la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \lambda \end{cases}$$

siendo entonces $\{(0,1,1,1)\}$ una base del $\operatorname{Ker} f$.

---

20. *Se considera el endomorfismo del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma*

- *El núcleo del endomorfismo es el subespacio vectorial de ecuaciones*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \qquad (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

- *Los vectores $(1,1,1,0)$ y $(0,0,0,1)$ se transforman en sí mismos.*

Se pide

i) Matriz del endomorfismo en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

ii) Dado el subespacio de ecuaciones implícitas

$$V \equiv \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ t = 0 \\ x - y + 2t = 0 \end{cases}$$

hallar unas ecuaciones paramétricas de su imagen.

iii) Matriz del endomorfismo en la base

$$B^* = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}.$$

SOLUCIÓN:

i) Para obtener la matriz $M(f, B_c, B_c)$ necesitamos las imágenes de los vectores de B_c,

$$B_{\operatorname{Ker} f} = \{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0)\};$$

luego, $f(-1,1,0,0) = (0,0,0,0)$ y $f(-1,0,1,0) = (0,0,0,0)$.

Por tanto, tenemos las imágenes de los vectores de una base

$$B = \{(1,1,1,0) = v_1, (0,0,0,1) = v_2, (-1,1,0,0) = v_3, (-1,0,1,0) = v_4\},$$

Si llamamos $c_1 = f(v_1)$, $c_2 = f(v_2)$, como $f(v_3) = 0$ y $f(v_4) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} c_1 &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ c_2 &= f(e_4) \\ 0 &= -f(e_1) + f(e_2) \\ 0 &= -f(e_1) + f(e_3) \end{aligned}$$

De donde se deduce, al ser $c_1 = (1,1,1,0)$ y $c_2 = (0,0,0,1)$ que

$$f(e_4) = (0,0,0,1), \qquad f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

Luego,

$$M(f, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) El subespacio V está contenido en $\operatorname{Ker} f$, ya que

$$V = L\{(1,1,-2,0)\} \quad \text{y} \quad (1,1,-2,0) \in \operatorname{Ker} f;$$

por tanto, $f(V) = \{0\}$ y unas ecuaciones paramétricas de $f(V)$ son $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array}\right.$

iii) Para hallar $M(f, B^*, B^*)$ necesitamos conocer las coordenadas de las imágenes de los vectores de B^* en B^*.

La expresión matricial del endomorfismo en la base B_c es

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

Hallaremos las imágenes de los vectores de B^* en B_c.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(1,1,1,1) = (1,1,1,1)$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(0,1,1,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(0,0,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $f(0,0,1,1) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right) = \frac{1}{3}(1,1,1,1) + 0(0,1,1,1) + 0(0,0,1,1) + \frac{2}{3}(0,0,0,1)$, luego tiene coordenadas $\left(\frac{1}{3},0,0,\frac{2}{3}\right)$ en B^*.
- $f(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$ tiene coordenadas $(0,0,0,1)$ en B^*.

Por lo tanto $M(f,B^*,B^*) = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$.

---

21. *Se consideran los espacios vectoriales E, F y G siendo E el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 1 ($E = \{ax+b \ / \ a,b \in \mathbb{R}\}$), F las matrices simétricas de orden 2 y $G = \mathbb{R}^3$.*

Se definen las aplicaciones lineales $f: E \longrightarrow F$ y $g: F \longrightarrow G$ de la forma

$$f(ax+b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} a & d \\ d & c \end{pmatrix} = (a, c, a+c)$$

Sean $B = \{x,1\}$, $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $B'' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ las bases canónicas de E, F y G. Se pide

i) Matrices de los homomorfismos f, g y $g \circ f$ en las bases anteriores.

ii) Calcular el subespacio transformado por $g \circ f$ del subespacio $V \subset E$ siendo V el subespacio $V = \{ax+a \ / \ a \in \mathbb{R}\}$.

iii) Si en F utilizamos la base $B'_* = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$, hallar las matrices de f, g y $g \circ f$ en las bases B, B'_* y B''.

SOLUCIÓN:

i) $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,0,1)$ en la base B'. $f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,0)$ en la base B'.

Por tanto, $A = M(f,B,B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,1) \qquad g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0) \qquad g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,1,1)$$

Por tanto, $C = M(g,B',B'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$M(g \circ f, B, B'') = C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Un sistema de generadores de V es el vector $(1,1)$. Entonces, un sistema de generadores del subespacio transformado $g \circ f(V)$ será

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,1,2) \qquad g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0) \qquad g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1,-1,0)$$

Entonces, $C' = M(g, B', B'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz de $g \circ f$ será $C' \cdot A'$, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Coincide con la calculada previamente, ya que ni en E ni en G se ha realizado un cambio de base.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. *Sean dos espacios vectoriales E y F. Estudiar qué aplicaciones de las siguientes son homomorfismos.*
   i) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = \lambda_0 x$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, λ_0 *fijo.*
   ii) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = x_0 - x$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ *fijo.*
   iii) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1, 1, x_2)$, *siendo* $x = (x_1, x_2, x_3)$.
   iv) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1^2 - x_2^2, 0, 0)$, *siendo* $x = (x_1, x_2, x_3)$.
   v) $E = F = M_{n\times n}$, $f(A) = \dfrac{A - A'}{2}$.
   vi) $E = F = P_3(\mathbb{R})$, $f[p(x)] = \dfrac{\int_0^x p(t)\,dt}{x} + p'(x)$.

2. *Se consideran las aplicaciones*
   a) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$.
   b) $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$.
   i) Demostrar que son aplicaciones lineales.
   ii) Calcular su núcleo y su imagen.
   iii) Siendo el subespacio $V = L\{(1,-1,0),(1,1,1)\}$, *calcular* $f(V)$ *y* $g(V)$. *Calcular también* $f^{-1}(\{(0,0,0)\})$ *y* $f^{-1}(\{(2,2,1)\})$.
   iv) Calcular $f^{-1}(W)$, *siendo* $W = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 = 3\lambda, x_2 = 2\lambda, x_3 = \lambda\}$.

13. *Se considera el homomorfismo entre espacios vectoriales* $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *definido de la forma* $f(1,3,5) = (1,0)$, $f(0,1,1) = (1,0)$ *y* $f(0,0,1) = (0,0)$.
    i) Hallar la matriz del homomorfismo en las bases canónicas.
    ii) Hallar las ecuaciones implícitas del subespacio transformado del de ecuaciones

15. *Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Se define el endomorfismo f que verifica las condiciones siguientes: f^2 es el endomorfismo nulo, y los vectores $(1,1,1,1)$ y $(1,1,1,0)$ se transforman, respectivamente, en los vectores $(1,1,0,0)$ y $(1,0,0,0)$.*

Calcular la matriz del endomorfismo en la base canónica, así como el núcleo y la imagen.

16. *Se considera la familia de endomorfismos f_a cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar los valores de a para los cuales f_a no es automorfismo. Para dichos valores calcular $\operatorname{Ker} f_a$ e $\operatorname{Im} f_a$.

17. *Sean los espacios vectoriales E, F y G referidos respectivamente a las bases*

$$\{e_1,e_2,e_3,e_4\} \qquad \{s_1,s_2\} \qquad \{c_1,c_2,c_3,c_4\}$$

Se consideran los homomorfismos $f: E \longrightarrow F$ y $g: F \longrightarrow G$ definidos de forma que

$$f(e_1)=4s_1+s_2 \qquad f(e_2)=2s_1 \qquad f(e_3)=s_1+2s_2 \qquad f(e_4)=s_1+s_2$$
$$g(s_1)=c_1+2c_2+c_3 \qquad g(s_2)=c_2+c_3+c_4$$

Se pide

i) Obtener el transformado del vector $u=(-1,2,1,-1)$ respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, mediante el homomorfismo $h = g \circ f$. A la vista del resultado, estudiar si h es inyectivo.

ii) Hallar unas ecuaciones implícitas del núcleo y de la imagen de h respecto de las bases dadas. Obtener también una base para el núcleo y otra para la imagen de h.

18. *Sean los espacios vectoriales reales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$. Para cada valor real del parámetro λ se define el homomorfismo $f_\lambda: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, por $f_\lambda(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\lambda x_1+x_2, x_1+\lambda x_3, x_2+x_4)$. Se pide*

i) Valores de λ para los cuales f_λ es inyectivo.

ii) Valores de λ para los cuales f_λ es sobreyectivo.

iii) Calcular una base del núcleo de f_λ para $\lambda=2$.

iv) Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones implícitas $\begin{cases} x_1=0 \\ x_3=0 \end{cases}$. Calcular las ecuaciones implícitas de $f_\lambda(V)$ para $\lambda=0$.

v) Calcular la matriz de f_λ cuando $\lambda=1$, la base de $\mathbb{R}^4$ es la canónica y la de $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$.

19. *Se consideran los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Se define entre ellos la familia de homomorfismos $f_a: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma*

a) Las ecuaciones implícitas de $\operatorname{Ker} f_a$ son $\begin{cases} x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}$.

b) $f_a(0,0,a-1)=(0,a-1)$ y $f_a(1,0,1)=(2,1)$.

Se pide

i) Calcular la matriz de los homomorfismos cuando las bases consideradas son las canónicas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+a & 0 & a \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 0 & -a \\ 3 & 2+2a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostrar que existe un subespacio V de $\mathbb{R}^4$ con $V \neq \mathbb{R}^4$ que contiene a $\operatorname{Im} f_a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

23. *Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que uno, con las operaciones usuales: $V = \{a + bx \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$. Sea f el endomorfismo de V que verifica las condiciones siguientes*

   a) $f(1+x) = 2 - x$.

   b) El núcleo de f coincide con la imagen, es decir, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

   Se pide

   i) Matriz del endomorfismo f en la base $B = \{1, x\}$.

   ii) Calcular una base de $f(W)$ siendo W el subespacio de ecuación $x_1 + 2x_2 = 0$, donde (x_1, x_2) son coordenadas en la base B.

   iii) Imagen inversa del conjunto $\{(1,1), (0,0)\}$.

24. *Se consideran $A = \mathbb{R}_2[x]$ y $C = \mathbb{R}_2[x]$, siendo $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos. Sea $f\colon A \longrightarrow C$ el homomorfismo definido por las condiciones siguientes*

   a) Los polinomios $p(x)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ sin término independiente se transforman en sí mismos,

   b) El núcleo de f es el subespacio de los polinomios de $\mathbb{R}_2[x]$ que tienen los tres coeficientes iguales.

   Se pide

   i) Matriz del homomorfismo f en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, $B = \{1, x, x^2\}$.

   ii) Base del subespacio transformado del subespacio de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \lambda - 2\mu + \rho \\ y = \lambda - 2\mu + \rho \\ z = \lambda - 2\mu \end{cases}$$

   iii) Matriz del homomorfismo f considerando en A la base $B' = \{1 + x + x^2, 1 + x, 1\}$ y en C la base canónica $B = \{1, x, x^2\}$.

25. *Sean $S_{3\times3}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden tres y $A_{3\times3}(\mathbb{R})$ el de las matrices antisimétricas de orden tres. Se considera el homomorfismo f de $S_{3\times3}$ en $A_{3\times3}$ definido por las condiciones siguientes*

   a) El núcleo está formado por las matrices diagonales.

   b) $f\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.

   Se pide

   i) Calcular la matriz del homomorfismo cuando la base en $S_{3\times3}$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

27. En el espacio vectorial E de las funciones reales de variable real se considera el subconjunto

$$V = L\{e^x, e^{-x}, 1, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$$

Sea la aplicación $f: V \longrightarrow V$ definida por $f[h(x)] = h'(x)$. Demostrar que es homomorfismo. Calcular su núcleo e imagen.

BIBLIOGRAFÍA

De La Villa, A.; '*Problemas de álgebra con esquemas teóricos"*. CLAGSA 1998.