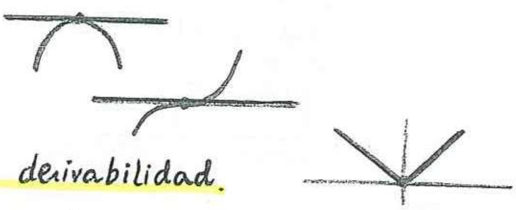
TEMA 6 DERIVADAS III. APLICACIONES

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS

- Un punto x_0 es máximo relativo si en un entorno suyo no hay nadie más grande.
- Un punto x_0 es mínimo relativo si en un entorno suyo no hay nadie más pequeño.
- Un punto x_0 es MÁXIMO ABSOLUTO si no hay nadie más grande.
- Un punto x_0 es MÍNIMO ABSOLUTO si no hay nadie más pequeño.

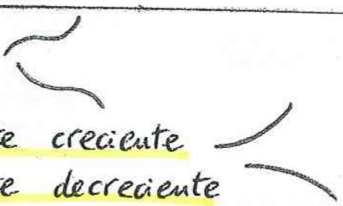
- COMENTARIOS



  * Si x_0 es max/min y $\exists f'(x_0) \longrightarrow f'(x_0) = 0$.
  * No todo punto con $f'(x_0) = 0$ es max/min.
  * También pueden ser max/min los puntos de no derivabilidad.
  * El max/min absolutos son únicos, pero pueden alcanzarse en infinitos puntos (El max/min absolutos es un valor, no un punto)
    - Ejemplo: $y = \operatorname{sen} x$
  * Si $f(x)$ está definida en $(-\infty, \infty)$ para saber si tiene max/min absolutos tendremos que calcular las A.H y las A.O.
  * Si $f(x)$ no está definida en $(-\infty, \infty)$ tenemos que tener en cuenta que los extremos del intervalo pueden ser max/min si el intervalo es cerrado.

APLICACIONES

- CRECIMIENTO / DECRECIMIENTO ≡ Signo $f'(x)$
  - Si $f'(x) \geq 0 \Longrightarrow f(x)$ creciente
  - Si $f'(x) \leq 0 \Longrightarrow f(x)$ decreciente
  - Si $f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ estrictamente creciente
  - Si $f'(x) < 0 \Longrightarrow f(x)$ estrictamente decreciente



- CAJA DE LAS SONRISAS

Sirve para poder averiguar si un punto es máximo o mínimo sin tener que hacer $f''(x)$.

Si la función no es continua en el punto no podemos utilizar la CAJA DE LAS SONRISAS. Pero podemos saber si el punto es max./min./nada si hacemos un boceto cutre de la gráfica en el punto.

Necesitamos:
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$
- $f(x_0)$
- CRECE/DECRECE

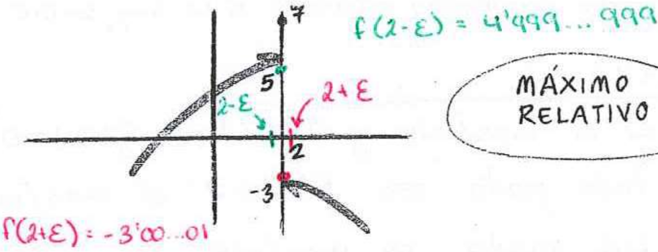
EJ. 1

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -3$

$f(2) = 7$

CRECE | 2 | DECRECE



MÁXIMO RELATIVO

EJ. 2 $f(2) = 5 \longrightarrow$ MÁXIMO RELATIVO

EJ. 3 $f(2) = 3 \longrightarrow$ NADA

EJ. 4 $f(2) = -3 \longrightarrow$ NADA

EJ. 5 $f(2) = -3'0001 \longrightarrow$ MÍNIMO RELATIVO

EJ. 6 $f(2) = -8 \longrightarrow$ MÍNIMO RELATIVO

Comparar altura punto negro con altura puntos verde y rojo.

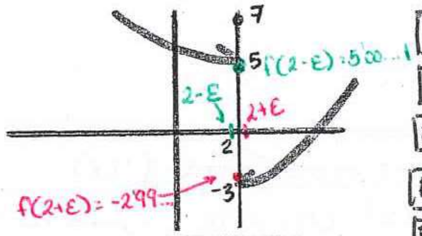
EJ. 7

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -3$

$f(2) = 7$

DECRECE | 2 | CRECE



MÁXIMO RELATIVO

EJ8 • $f(2) = 5 \longrightarrow$ NADA

EJ9 • $f(2) = 3 \longrightarrow$ NADA

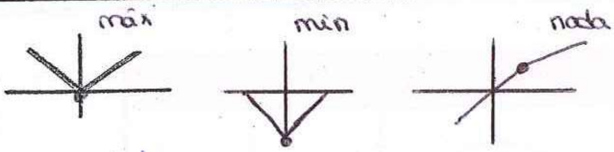
EJ10 • $f(2) = -3 \longrightarrow$ MIN. RELATIVO

EJ11 • $f(2) = -3'001 \longrightarrow$ MIN. REL.

EJ12 • $f(2) = -8 \longrightarrow$ MIN. RELATIVO

• RECETA PARA CALCULAR LOS MAXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN SIN OLVIDARME NINGUNO

Candidatos



① Puntos de no derivabilidad

② Puntos $f'(x_0) = 0$

$\longrightarrow$ Calculo $f''(x_0)$ → recta tg horizontal

- si $f''(x_0) = 0 \longrightarrow$ Candidato a pto. inflexión: $f'''(x_0)$
- si $f''(x_0) \neq 0$
  - $f''(x_0) < 0 \longrightarrow$ MAX. RELATIVO
  - $f''(x_0) > 0 \longrightarrow$ MIN. RELATIVO

③ Extremos del intervalo

(si $f(x)$ está definida en $[a,b]$)

$$\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$$

(*) Si la primera derivada no nula después de la primera es de orden par el punto será un máximo o mínimo (dependiendo del signo) ∴ Si es de orden impar el punto es PUNTO DE INFLEXIÓN. (Ver ejemplo de la última hoja)

EJ ¿Qué es $x_0 = 0$?

a) $f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2 \longrightarrow f''(x) = 6x \longrightarrow f'''(x) = 6$ — PTO. INFLEXIÓN

$f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) \neq 0$

b) $f(x) = x^4 \longrightarrow f'(x) = 4x^3 \longrightarrow f''(x) = 12x^2 \longrightarrow f'''(x) = 24x \longrightarrow f^{IV}(x) = 24$

$f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = 0 \qquad f^{IV}(0) \neq 0$

Como $f^{IV}(0) = 24 > 0 \Longrightarrow$ MÍNIMO RELATIVO

> UNA VEZ OBTENIDOS TODOS LOS CANDIDATOS LOS SUSTITUIMOS EN LA FUNCIÓN. EL VALOR MÁS GRANDE ES EL MÁXIMO ABSOLUTO Y EL MÁS PEQUEÑO EL MÍNIMO ABSOLUTO (Conocidas las asíntotas)

CONCAVIDAD / CONVEXIDAD ≡ Signo $f''(x)$ ≡ Crecimiento $f'(x)$

Si $f''(x) > 0 \longrightarrow$ CONVEXO $\longrightarrow \cup$

Si $f''(x) < 0 \longrightarrow$ CÓNCAVA $\longrightarrow \cap$

- Donde pasamos de cóncavo a convexo (o viceversa) tenemos un punto de inflexión.

1

$$f(x)\begin{cases} e^{x+2} - 1 & -\infty < x < -2 \\ x + 2 & -2 \leq x < 0 \\ |x^2 - 3x + 2| \ \text{(I)} & 0 \leq x \leq 3 \\ -2 + 1/x & x > 3 \end{cases}$$

a) CRECE / DECRECE

b) MAX / MIN relativos y absolutos

Quitamos el valor absoluto:

(I) $x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

$0\,[\ \oplus\ 1\ \ominus\ 2\ \oplus\ ]\,3$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+2} - 1 & -\infty < x < -2 \\ x + 2 & -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 2 & 1 < x < 2 \\ x^2 - 3x + 2 & 2 \leq x \leq 3 \\ -2 + 1/x & x > 3 \end{cases}$$

- Para hallar f' debería estudiar la continuidad porque sino en el cambio de rama hay que derivar por definición.

CONTINUIDAD

Como todas las ramas son continuas, los únicos puntos de posible discontinuidad son $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

$x = -2$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ es continua.

$\boxed{x = 3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2 - 3x + 2 = 2 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} \\ \qquad\qquad f(3) = 2 \end{array}\right\}$$

DISCONTINUIDAD inevitable de salto finito de valor $\frac{11}{3}$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x+2} & -\infty < x < -2 \\ \boxed{1} & x = -2 \longrightarrow \text{Tengo que hacerlas por definición} \\ 1 & -2 < x < 0 \\ \boxed{\nexists} & x = 0 \longrightarrow \text{" " " " "} \\ 2x - 3 & 0 < x < 1 \\ \boxed{\nexists} & x = 1 \longrightarrow \text{" " " "} \\ -2x + 3 & 1 < x < 2 \\ \boxed{\nexists} & x = 2 \longrightarrow \text{" " " " "} \\ 2x - 3 & 2 < x < 3 \\ \boxed{\nexists} & x = 3 \longrightarrow \text{(si no es continua no es derivable)} \\ -1/x^2 & x > 3 \end{cases}$$

$\boxed{x = -2}$

$$f'(-2^-) = \lim_{x\to -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(e^{x+2} - 1) - 0}{x + 2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \overset{\text{L'HÔP}}{=} \lim_{x\to -2^-} \frac{e^{x+2}}{1} = 1$$

$$f'(-2^+) = \lim_{x\to -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x + 2 - 0}{x + 2} = 1$$

$\boxed{x = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x + 2 - 2}{x} = 1 \\ f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 3x + 2 - 2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x - 3 = -3 \end{array}\right\} \nexists$$

$\boxed{x = 1}$

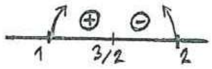
$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2 - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} x - 2 = -1 \\ f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-x^2 + 3x - 2 - 0}{x - 1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \frac{-2x + 3}{1} = 1 \end{array}\right\} \nexists$$

$\boxed{x = 2}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x^2 + 3x - 2 - 0}{x - 2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \frac{-2x + 3}{1} = -1 \\ f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2 - 0}{x - 2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \frac{2x - 3}{1} = 1 \end{array}\right\} \nexists$$

signo $f'(x)$ $\begin{cases} \oplus & -\infty < x < 0 \\ \ominus & 0 < x < 1 \\ \oplus & 1 < x < 3/2 \\ \ominus & 3/2 < x < 2 \\ \oplus & 2 < x < 3 \\ \ominus & x > 3 \end{cases}$

- $2x - 3 = 0$
  $x = 3/2$ (no está incluido en el intervalo $(0,1)$)
- $-2x + 3 = 0$
  $x = 3/2$ en el intervalo $(1,2)$



- $2x - 3 = 0$
  $x = 3/2 \xrightarrow{\notin} (2,3)$

TABLA DE CRECIMIENTO

		0		1		3/2		2		3	
$f'(x)$	$\oplus$		$\ominus$		$\oplus$		$\ominus$		$\oplus$		$\ominus$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘		↗		↘
		MAX. REL.		MIN. REL.		MAX. REL.		MIN REL		? MAX. REL.	

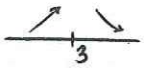
aquí no lo sé xq. no es continua

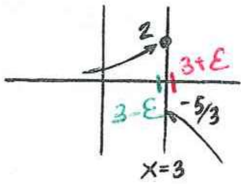
Colegas verde ~ rojo

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -5/3$

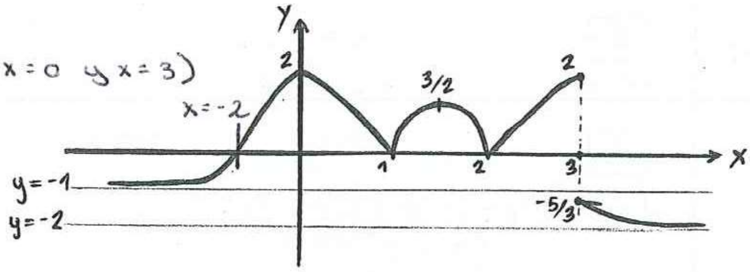
$f(3) = 2$





$f(0) = 2$
$f(1) = 0$
$f(3/2) = 1/4$
$f(2) = 0$
$f(3) = 2$

MAX. ABSOLUTO es 2 (en $x=0$ y $x=3$)
NO HAY MIN. ABSOLUTO



ASÍNTOTAS

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -2 + 1/x = -2 \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x+2} - 1 = -1 \end{cases}$$

$\boxed{2}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & -\infty < x \le 0 \\ 1/x\,(\underbrace{|x+1|}_{\mathrm{I}} - \underbrace{|x-1|}_{\mathrm{II}}) - 1 & 0 < x < 2 \\ sh\,(x-2) & x = 2 \\ \dfrac{x-2}{1+e^{1/x-2}} & 2 < x < \infty \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & -\infty < x \le 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 2/x - 1 & 1 \le x < 2 \\ sh\,(x-2) & x = 2 \\ \dfrac{x-2}{1+e^{1/x-2}} & 2 < x < \infty \end{cases}$$

Quitamos el valor absoluto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}\quad x+1 = 0 \Longrightarrow x = -1 \\ \mathrm{II}\quad x-1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

	−1		1	
(x+1)	$\ominus$	$\oplus$		$\oplus$
(x−1)	$\ominus$	$\ominus$		$\oplus$

Como el intervalo es $0 < x < 2$ obtenemos dos ramas:

- $1/x\,(x+1-(-x+1)) - 1 \qquad 0 < x < 1 \rightsquigarrow 1$
- $1/x\,(x+1-(x-1)) - 1 \qquad 1 \le x < 2 \rightsquigarrow 2/x - 1$

CONTINUIDAD

$\boxed{x=0} \longrightarrow$ cont. $\left\{ \begin{matrix} \lim_- \\ \lim_+ \end{matrix} \right. = f(0) = 1$

$\boxed{x=1} \longrightarrow$ cont. $\left\{ \begin{matrix} \lim_- \\ \lim_+ \end{matrix} \right. = f(1) = 1$

$\boxed{x=2}$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x} - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{1+e^{1/x-2}} = \left\{ \frac{0^+}{1+e^{1/0^+}} = \frac{0^+}{1+e^{\infty}} = \frac{0^+}{\infty} \right\} = 0$$

$$f(2) = sh(2-2) = 0$$

$\longrightarrow$ continua en $x=2$

$$f'(x) \left\{ \begin{array}{ll} -2xe^{-x^2} & -\infty < x < 0 \\ \boxed{0} & x = 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \\ \boxed{\nexists} & x = 1 \\ -2/x^2 & 1 < x < 2 \\ \boxed{\nexists} & x = 2 \\ \dfrac{(1+e^{1/x-2}) + (x-2)\frac{1}{(x-2)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}}{(1+e^{1/x-2})^2} & x > 2 \end{array} \right.$$

$x=0 \longrightarrow$ Tengo que hacerla por definición

$x=1 \longrightarrow$ " " " " " " "

$x=2 \longrightarrow$ " " " " " " "

$\boxed{x=0}$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x^2}-1}{x-0} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2xe^{-x^2}}{1} = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-1}{x} = \frac{0}{\to 0} = 0$$

$\boxed{x=1}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{1-1}{x-1} = \dfrac{0}{\to 0} = 0 \\ f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{2/x-1-1}{x-1} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{-2/x^2}{1} = -2 \end{array} \right\} \nexists$$

$\boxed{x=2}$

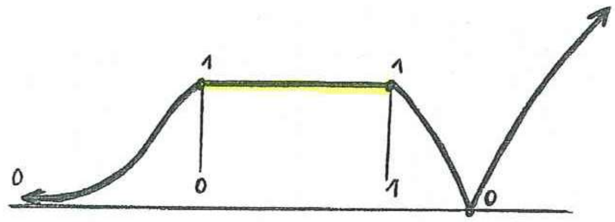
$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{2/x-1-0}{x-2} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \dfrac{-2/x^2}{1} = -1/2 \\ f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{\frac{\cancel{x-2}}{1+e^{1/x-2}} - 0}{\cancel{x-2}} = \dfrac{1}{1+e^{1/0^+}} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = 0 \end{array} \right\} \nexists$$

signo $f'(x)$ $\begin{cases} \oplus & -\infty < x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ \ominus & 1 < x < 2 \\ \oplus & x > 2 \end{cases}$

TABLA DE CRECIMIENTO

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	$\oplus$
$f(x)$	↗	CTE.	↘	↗

En $x = 2$: MIN. REL ⇓ ABSOLUTO



$x \in (0,1)$ max. y min. relativo a la vez

$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ son máximos relativos

ASÍNTOTAS

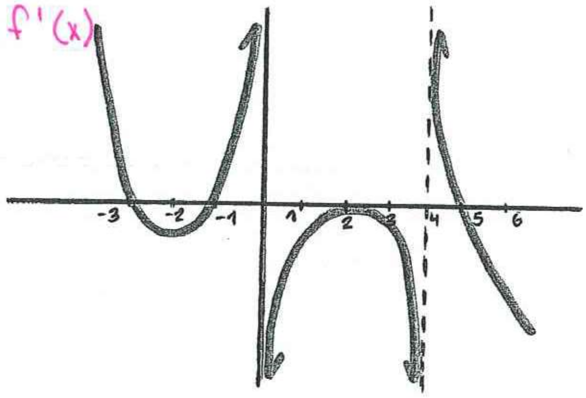
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-2}{1+e^{1/x-2}} = \dfrac{\infty}{1+e^{1/\infty}} = \dfrac{\infty}{2} = \infty \end{cases}$$

---

3 Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. La gráfica de $f'(x)$ es la siguiente:

↳ caja de los sorpresas

Gráfica $f'(x)$



a) Crecimiento y decrecimiento

b) Máximos y mínimos relativos de f

c) Concavidad y convexidad

d) Ptos. de inflexión de f

A)

		-3		-1		0		4		5	
$f'(x)$	$\oplus$		$\ominus$		$\oplus$		$\ominus$		$\oplus$		$\ominus$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘		↗		↘

B) MAX. REL. (-3), MIN REL. (-1), MAX REL (0), MIN. REL (4), MAX REL. (5) → función es continua

c) CONCAVIDAD / CONVEXIDAD

Si $f''(x) > 0$ es porque $f'(x)$ crece

		-2		2	
$f'(x)$	↘		↗		↘
$f''(x)$	$\ominus$		$\oplus$		$\ominus$
	CONCAVA		CONVEXA		CONCAVA
$f(x)$	∩		∪		∩

PTOS. INFLEXIÓN

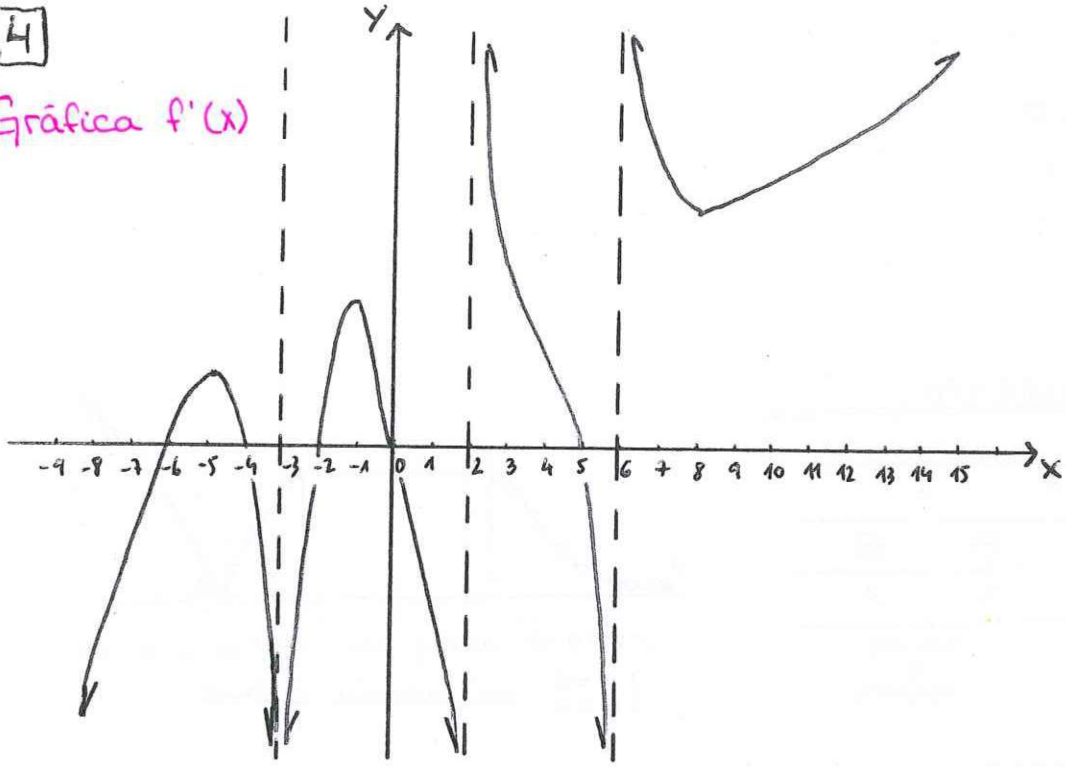
$x = 2$

$x = -2$

Estudiar el signo de $f''(x)$ es como estudiar el crecimiento de $f'(x)$

4

Gráfica f'(x)



Sea f(x) una función continua en todo IR cuya primera derivada tiene la gráfica de la figura.

Se pide:

a) crec/decrec de f(x)

b) max/min de f(x)

c) conc/conv de f(x)

d) ptos inflexión de f(x)

✱ EJEMPLO XA ENTENDER LA DIFERENCIA ENTRE MAX/MIN/PTO INF CUANDO $f'(x_0) = 0$

↳ Calcular si las siguientes funciones tienen en $x_0 = 1$ un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

$f(x) = (x-1)^5$

$f'(x) = 5(x-1)^4 \rightarrow \boxed{f'(1) = 0}$

$f''(x) = 20(x-1)^3 \rightarrow f''(1) = 0$

$f'''(x) = 60(x-1)^2 \rightarrow f'''(1) = 0$

$f^{IV}(x) = 120(x-1) \rightarrow f^{IV}(1) = 0$

$f^{V}(x) = 120 \rightarrow f^{V}(1) = 120$

impar

pto inflexión

$f(x) = 2(x-1)^4$

$f'(x) = 8(x-1)^3 \rightarrow \boxed{f'(1) = 0}$

$f''(x) = 24(x-1)^2 \rightarrow f''(1) = 0$

$f'''(x) = 48(x-1) \rightarrow f'''(1) = 0$

$f^{IV}(x) = 48 \rightarrow f^{IV}(1) = 48$

par $\begin{cases} \text{max} \\ \text{min} \end{cases}$

como $48 > 0 \rightarrow$ min

$f(x) = -3(x-1)^6$

$f'(x) = -18(x-1)^5 \rightarrow \boxed{f'(1) = 0}$

$f''(x) = -90(x-1)^4 \rightarrow f''(1) = 0$

$f'''(x) = -360(x-1)^3 \rightarrow f'''(1) = 0$

$f^{IV}(x) = -1080(x-1)^2 \rightarrow f^{IV}(1) = 0$

$f^{V}(x) = -2160(x-1) \rightarrow f^{V}(1) = 0$

$f^{VI}(x) = -2160 \rightarrow f^{VI}(1) = -2160$

par $\begin{cases} \text{max} \\ \text{min} \end{cases}$

Como $-2160 < 0 \rightarrow$ max