

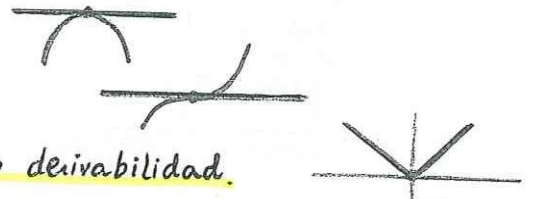
TEMA 6 DERIVADAS III. APLICACIONES

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS

- Un punto x_0 es **máximo relativo** si en un entorno suyo **no hay nadie más grande**.
- Un punto x_0 es **mínimo relativo** si en un entorno suyo **no hay nadie más pequeño**.
- Un punto x_0 es **MÁXIMO ABSOLUTO** si **no hay nadie más grande**.
- Un punto x_0 es **MÍNIMO ABSOLUTO** si **no hay nadie más pequeño**.

COMENTARIOS

- * Si x_0 es max/min y $\exists f'(x_0) \rightarrow f'(x_0) = 0$.
- * No todo punto con $f'(x_0) = 0$ es max/min.
- * También pueden ser max/min los puntos de no derivabilidad.
- * El max/min absolutos son únicos, pero pueden alcanzarse en infinitos puntos (El max/min absolutos es un valor, no un punto)
- Ejemplo: $y = \sin x$
- * Si $f(x)$ está definida en $(-\infty, \infty)$ para saber si tiene max/min absolutos tendremos que calcular las A.H y las A.O.
- * Si $f(x)$ no está definida en $(-\infty, \infty)$ tenemos que tener en cuenta que los extremos del intervalo pueden ser max/min si el intervalo es cerrado.

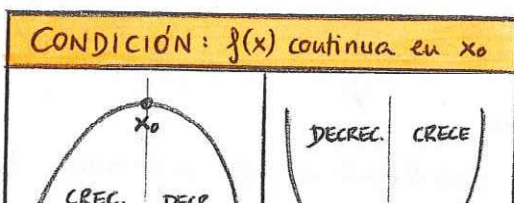


APLICACIONES

CRECIMIENTO / DECRECIMIENTO \equiv Signo $f'(x)$

- Si $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ creciente
- Si $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ decreciente
- Si $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ estrictamente creciente
- Si $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ estrictamente decreciente

CAJA DE LAS SONRISAS



Sirve para poder averiguar si un punto es máximo o mínimo sin tener que hacer

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Si la función no es continua en el punto no podemos utilizar la CAJA DE LAS SONRISAS. Pero podemos saber si el punto es max./min./nada si hacemos un boceto entre de la gráfica en el punto.

Necesitamos:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
- $f(x_0)$
- CRECE/DECRECE

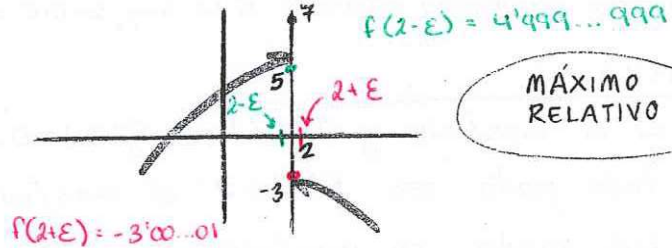
EJ. 1

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -3$$

$$f(2) = 7$$

CRECE DECRECE



EJ. 2

$f(2) = 5$ → MÁXIMO RELATIVO

EJ. 3

$f(2) = 3$ → NADA

EJ. 4

$f(2) = -3$ → NADA

EJ. 5

$f(2) = -3'0004$ → MÍNIMO RELATIVO

EJ. 6

$f(2) = -8$ → MÍNIMO RELATIVO

Comparar altura punto negro con altura puntos verde y rojo.

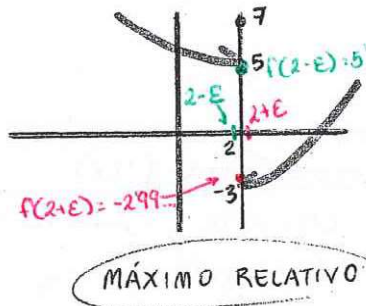
EJ. 7

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -3$$

$$f(2) = 7$$

DECRECE CRECE



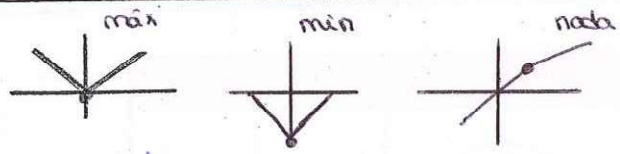
- EJ. 8 • $f(2) = 5$ → NADA
- EJ. 9 • $f(2) = 3$ → NADA
- EJ. 10 • $f(2) = -3$ → MIN. RELATIVO
- EJ. 11 • $f(2) = -3'004$ → MIN. REL.
- EJ. 12 • $f(2) = -8$ → MIN. RELATIVO

RECETA PARA CALCULAR LOS MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN SIN OLVIDARME NINGUNO

Candidatos

- 1) Puntos de no derivabilidad
- 2) Puntos $f'(x_0) = 0$

↳ Calculo $f''(x_0) \rightarrow$ recta tg horizontal
 ↳ si $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ Candidato a pto. inflexión: $f'''(x_0)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70





* Si la primera derivada no nula después de la primera es de orden par el punto será un máximo o mínimo (dependiendo del signo) .. Si es de orden impar el punto es PUNTO DE INFLEXIÓN. (Ver ejemplo de la última hoja)

EJ ¿Qué es $x_0 = 0$?

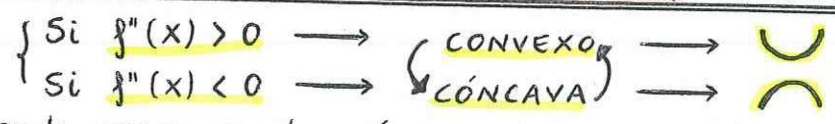
a) $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2 \rightarrow f''(x) = 6x \rightarrow f'''(x) = 6$
 $f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) \neq 0$ PTO. INFLEXIÓN

b) $f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^3 \rightarrow f''(x) = 12x^2 \rightarrow f'''(x) = 24x \rightarrow f^{(4)}(x) = 24$
 $f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = 0 \quad f^{(4)}(0) \neq 0$

Como $f^{(4)}(0) = 24 > 0 \Rightarrow$ MINIMO RELATIVO

UNA VEZ OBTENIDOS TODOS LOS CANDIDATOS LOS SUSTITUIMOS EN LA FUNCIÓN. EL VALOR MÁS GRANDE ES EL MÁXIMO ABSOLUTO Y EL MÁS PEQUEÑO EL MÍNIMO ABSOLUTO (Correídas las asíntotas)

CONCAVIDAD / CONVEXIDAD \equiv Signo $f''(x) \equiv$ Crecimiento $f'(x)$



• Donde pasamos de cóncavo a convexo (o viceversa) tenemos un punto de inflexión.

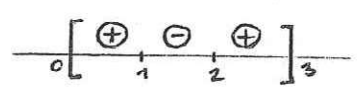
1

$$f(x) \begin{cases} e^{x+2} - 1 & -\infty < x < -2 \\ x + 2 & -2 \leq x < 0 \\ |x^2 - 3x + 2| & 0 \leq x \leq 3 \\ -2 + \frac{1}{x} & x > 3 \end{cases}$$

a) CRECE / DECRECE
 b) MAX / MIN relativos y absolutos

Quitamos el valor absoluto:

Ⓢ $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = 2$
 $\rightarrow x = 1$



$$f(x) = \begin{cases} e^{x+2} - 1 & -\infty < x < -2 \\ x + 2 & -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 2 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

• Para hallar f' debería estudiar la continuidad porque sino en el cambio



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 3x + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$f(3) = 2$$

DISCONTINUIDAD

inevitable de salto finito de valor $\frac{11}{3}$

}	$f'(x) =$	e^{x+2}	$-\infty < x < -2$	
		1	$x = -2$	→ Tengo que hacerlas por definición
		1	$-2 < x < 0$	
		$\frac{x}{2}$	$x = 0$	→ " " " " "
		$2x - 3$	$0 < x < 1$	
		$\frac{x}{2}$	$x = 1$	→ " " " " "
		$-2x + 3$	$1 < x < 2$	
		$\frac{x}{2}$	$x = 2$	→ " " " " "
$2x - 3$	$2 < x < 3$			
$\frac{x}{2}$	$x = 3$	→ (si no es continua no es derivable)		
$-\frac{1}{x^2}$	$x > 3$			

$$x = -2$$

$$f'(-2^-) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(e^{x+2} - 1) - 0}{x + 2} = \frac{0}{0} \left\{ \begin{array}{l} \text{L'Hôpital} \\ \downarrow \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^{x+2}}{1} = 1 \end{array} \right. = 1$$

$$f'(-2^+) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + 2 - 0}{x + 2} = 1$$

$$x = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 2 - 2}{x} = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 3 = -3$$

$$x = 1$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 2 = -1$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 3x - 2 - 0}{x - 1} = \frac{0}{0} \left\{ = \frac{-2x + 3}{1} = 1 \right.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

}	⊕	$-\infty < x < 0$
	⊖	$0 < x < 1$
	⊕	$1 < x < 3/2$
	⊖	$3/2 < x < 2$
	⊕	$2 < x < 3$
	⊖	$x > 3$

$2x - 3 = 0$
 $x = 3/2$ (no está incluido en el intervalo $(0, 1)$)

$-2x + 3 = 0$
 $x = 3/2$ en el intervalo $(1, 2)$

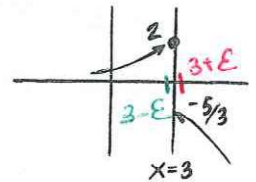
$2x - 3 = 0$
 $x = 3/2$ → $(2, 3)$

TABLA DE CRECIMIENTO

	0	1	3/2	2	3	
$f'(x)$	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕	⊖
$f(x)$	↗	↘	↗	↘	↗	↘
	MAX. REL.	MIN. REL.	MAX. REL.	MIN. REL.	MAX. REL.	MIN. REL.

Colegas verde y rojo

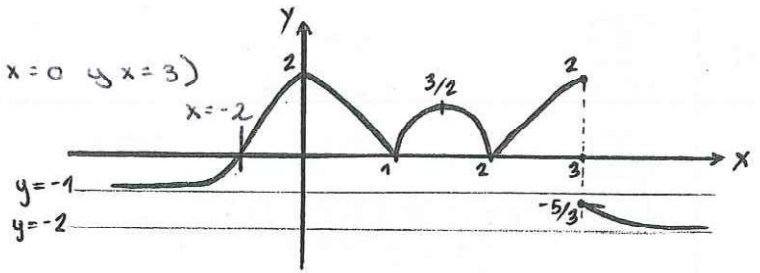
$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -5/3$
 $f(3) = 2$



→ aquí no lo sé xq. no es continua

$f(0) = 2$
 $f(1) = 0$
 $f(3/2) = 1/4$
 $f(2) = 0$
 $f(3) = 2$

MAX. ABSOLUTO es 2 (en $x=0$ y $x=3$)
 NO HAY MIN. ABSOLUTO



ASÍNTOTAS

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -2 + \frac{1}{x} = -2$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+2} - 1 = -1$

2

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & -\infty < x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x(|x+1| - |x-1|) - 1 & 0 < x < 2 \\ \text{sh}(x-2) & x = 2 \\ \frac{x-2}{1+e^{1/x-2}} & 2 < x < \infty \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & -\infty < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}x - 1 & 1 \leq x < 2 \\ \text{sh}(x-2) & x = 2 \\ \frac{x-2}{1+e^{1/x-2}} & 2 < x < \infty \end{cases}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**



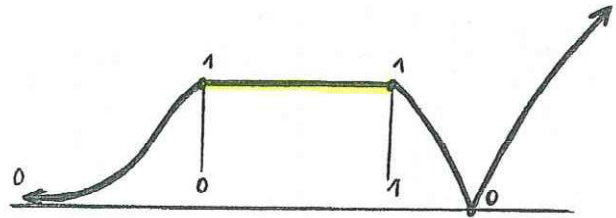
$\frac{1}{2}x(|x+1| - |x-1|) - 1 \quad 1 \leq x < 2 \rightsquigarrow \frac{1}{2}x - 1$

}	siguo $f'(x)$	⊕	$-\infty < x < 0$
		0	$0 \leq x < 1$
		⊖	$1 < x < 2$
		⊕	$x > 2$

TABLA DE CRECIMIENTO

	0	1	2	
$f'(x)$	⊕	0	⊖	⊕
$f(x)$	↗	CTE	↘	↗

MIN. REL
↓
ABSOLUTO



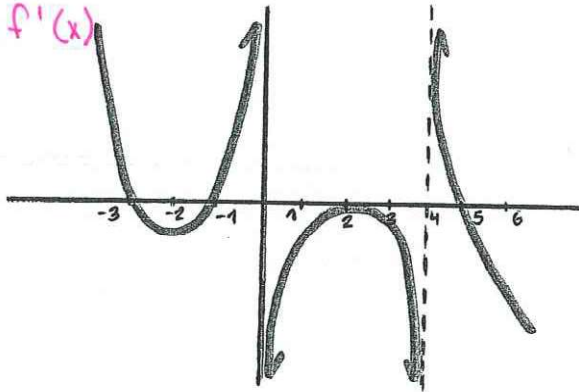
$x \in (0,1)$ max. y min. relativo a la vez
 $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$ son máximos relativos

ASÍNTOTAS

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{1+e^{1/x-2}} = \frac{\infty}{1+e^{1/\infty}} = \frac{\infty}{2} = \infty \end{cases}$$

3 Sea f una función **continua** en \mathbb{R} . La gráfica de $f'(x)$ es la siguiente:
 ↳ caja de los sonrisas

Gráfica $f'(x)$



- a) Crecimiento y decrecimiento
- b) Máximos y mínimos relativos de f
- c) Concavidad y convexidad
- d) Ptos. de inflexión de f

A)

	-3	-1	0	4	5
$f'(x)$	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕
$f(x)$	↗	↘	↗	↘	↗

B)

MAX. REL.	MIN. REL.	MAX. REL.	MIN. REL.	MAX. REL.	→ función es continua
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------------------

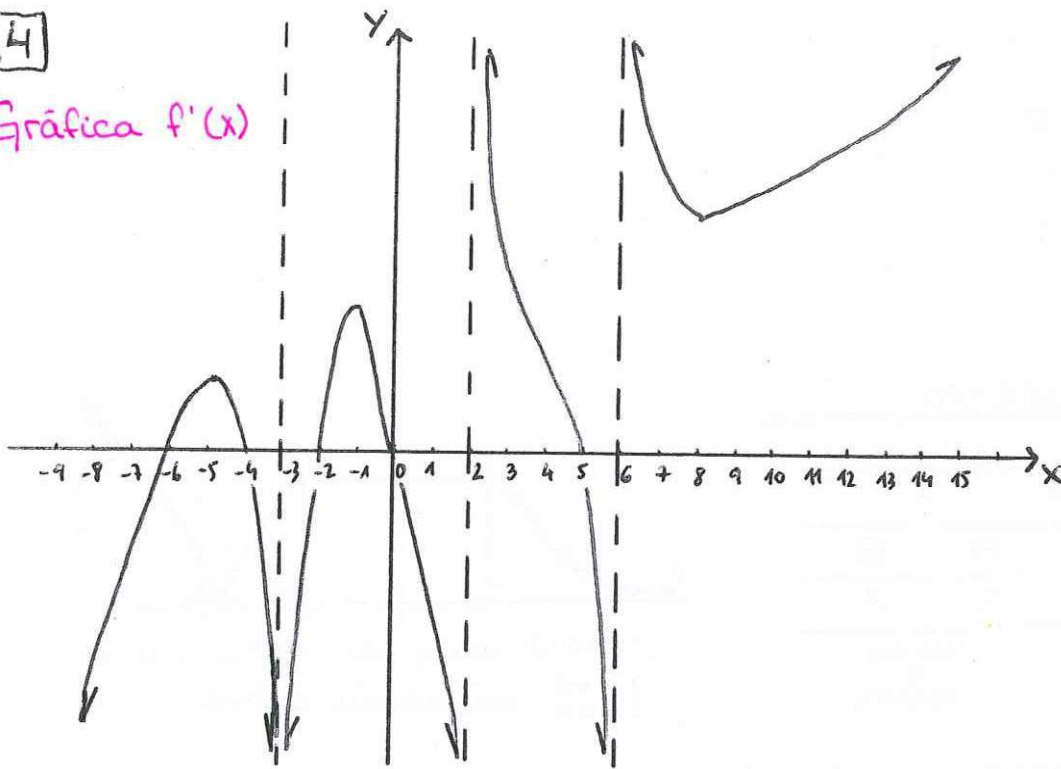
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**



4

Gráfica $f'(x)$



Sea $f(x)$ una función
continua en todo \mathbb{R}
cuya primera derivada
tiene la gráfica de
la figura.

Se pide:

- a) crec/decrec de $f(x)$
- b) max/min de $f(x)$
- c) conc/conv de $f(x)$
- d) pts inflexión de $f(x)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

✳ EJEMPLO YA ENTENDER LA DIFERENCIA ENTRE MAX/MIN/PTO INF. CUANDO $f'(x_0) = 0$

↳ Calcular si las siguientes funciones tienen en $x_0=1$ un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

$$f(x) = (x-1)^5$$

$$f'(x) = 5(x-1)^4 \rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 20(x-1)^3 \rightarrow f''(1) = 0$$

$$f'''(x) = 60(x-1)^2 \rightarrow f'''(1) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 120(x-1) \rightarrow f^{(4)}(1) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = 120 \rightarrow f^{(5)}(1) = 120$$

impar
pto inflexión

$$f(x) = 2(x-1)^4$$

$$f'(x) = 8(x-1)^3 \rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 24(x-1)^2 \rightarrow f''(1) = 0$$

$$f'''(x) = 48(x-1) \rightarrow f'''(1) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 48 \rightarrow f^{(4)}(1) = 48$$

par < max
min

como $48 > 0 \rightarrow$ min

$$f(x) = -3(x-1)^6$$

$$f'(x) = -18(x-1)^5 \rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(x) = -90(x-1)^4 \rightarrow f''(1) = 0$$

$$f'''(x) = -360(x-1)^3 \rightarrow f'''(1) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = -1080(x-1)^2 \rightarrow f^{(4)}(1) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = -2160(x-1) \rightarrow f^{(5)}(1) = 0$$

$$f^{(6)}(x) = -2160 \rightarrow f^{(6)}(1) = -2160$$

par < max
min

Como $-2160 < 0 \rightarrow$ max

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70