Funciones elementales

Introducción

Pretendemos en este capítulo "recordar" las funciones más conocidas (potenciales, racionales, exponenciales, logarítmicas, circulares e hiperbólicas) haciendo un recorrido sobre sus aspectos más importantes: dominio, imagen, crecimiento y decrecimiento, paridad, periodicidad, etc,.

En la parte teórica se han puesto gran cantidad de ejemplos que afianzan las definiciones. Para algún lector puede ser novedosa la parte correspondiente a funciones hiperbólicas. No debe desalentarse por ello, ya que no son más que una combinación lineal de funciones exponenciales.

Damos una relación de propiedades para las funciones circulares e hiperbólicas.

1. Definiciones previas

1.1. Definición. Función real de variable real

Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir a cada $x \in A$ le corresponde un valor $f(x) \in \mathbb{R}$.

EJEMPLOS:

$$f(x) = x + 1 \qquad f(x) = \sqrt{x} \qquad f(x) = \log x \qquad f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+4}$$

1.2. Definición. Dominio e imagen

Sea f una función real de variable real.

a) El dominio f, que se representa $\operatorname{Dom} f$, es el conjunto de números reales x para los cuales tiene sentido $f(x)$. Si $\operatorname{Dom} f = A$, representaremos la función de la forma

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

b) La imagen de f, representada por $\operatorname{Im} f$, es el conjunto de números reales y para los que existe $x \in \mathbb{R}$ con $y = f(x)$.

1.4. Definición. Función par e impar

Sea f una función definida en un dominio $A \subset \mathbb{R}$ tal que $-x \in A$ si $x \in A$.

a) f es par si $f(-x) = f(x)\ \forall x \in A$.

b) f es impar si $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in A$.

OBSERVACIÓN: *La gráfica de una función par (resp. impar) es simétrica respecto del eje OY (resp. respecto al origen de coordenadas).*

EJEMPLOS:

La función $f(x) = x^2$ es par; y la función $f(x) = x^3$ es impar.

1.5. Definición. Función acotada

Una función real de variable real $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada superiormente si la imagen de f, $\operatorname{Im} f$ es un subconjunto acotado superiormente de $\mathbb{R}$, es decir, si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq K$ para todo $x \in A$.

De manera análoga se definen las funciones acotadas inferiormente.

Una función f es acotada si lo es superior e inferiormente, o lo que es equivalente, si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in A$.

1.7. Definición. Composición de funciones

Dadas dos funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que $f(A) \subset B$, se define la función compuesta $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$g \circ f(x) = g\big[f(x)\big] \quad \forall x \in A$$

NOTA: *La composición de funciones no tiene la propiedad conmutativa; es más, puede que $f \circ g$ no tenga sentido.*

1.8. Definición. Función inversa

Si f es una función inyectiva entonces existe una única función h definida sobre la imagen de f, es decir $h : \operatorname{Im} f \longrightarrow \mathbb{R}$, que verifica $h(f(x)) = x$ para todo $x \in \operatorname{Dom} f$. Esta función se denomina inversa de f y se denota $h = f^{-1}$. Además, h es también inyectiva y $f(h(x)) = x$ para todo $x \in \operatorname{Dom} h = \operatorname{Im} f$.

2.2. Funciones polinómicas

Se llama así a una función de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a_n \neq 0$. El número n es el grado del polinomio.

Dominio: $\mathbb{R}$

Imagen: No se puede decir nada a priori.

OBSERVACIONES:

2.3. Funciones racionales

Una función f es racional si es el cociente de dos polinomios, es decir, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
Su dominio es $I\!R$ menos los ceros o raíces reales de $Q(x)$.
No se puede decir nada a priori sobre su imagen.

3. Funciones circulares

Se suele denominar funciones circulares a las siguientes funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f(x) = \cos x \qquad f(x) = \operatorname{tg} x$$
$$f(x) = \operatorname{cotg} x \qquad f(x) = \sec x \qquad f(x) = \operatorname{cosec} x$$

En lo que sigue, haremos un breve estudio de cada una de ellas.

3.1. Función seno

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ verifica las siguientes propiedades:
Dominio: $I\!R$
Es un función acotada y su imagen es el intervalo $[-1, 1]$.
Es una función impar y periódica de período 2π.
La representación gráfica de la curva $y = \operatorname{sen} x$ se muestra en la figura 3.5.

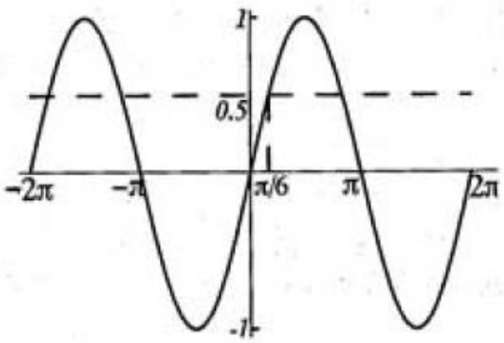

Fig. 3.5

3.2. Función coseno

La función $f(x) = \cos x$ verifica las siguientes propiedades:
Dominio: $I\!R$

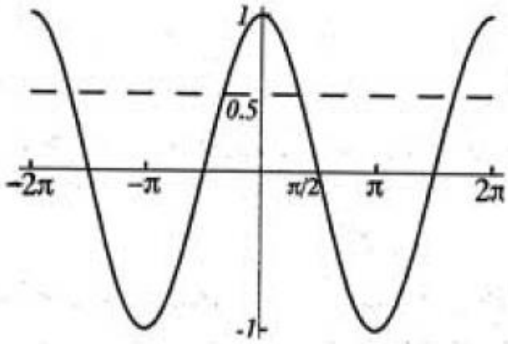

Fig. 3.6

Observación: *Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ y, por ello, las gráficas del seno y del coseno son iguales, salvo un desplazamiento horizontal de longitud $\frac{\pi}{2}$*

3.3. Función tangente

La función $f(x) = \operatorname{tg} x$ se define como $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y en consecuencia, no está definida cuando el denominador se anula. Sus propiedades más importantes son:

Dominio: $\mathbb{R} - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$

No es un función acotada y su imagen es $(-\infty, +\infty)$.

Es una función impar y periódica de período π.

La representación gráfica de la curva $y = \operatorname{tg} x$ se muestra en la figura 3.7.

3.7. Algunas relaciones trigonométricas

Nos restringiremos a las funciones seno, coseno y tangente.

1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

2) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$.
   En particular $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

3) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.
   En particular $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

4) $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.
   En particular $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

8) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

9) $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ y $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

10) $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ y $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

5.1. Función exponencial

Se llama así a la función definida por $f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo.
Dominio: $\mathbb{R}$.
Imagen: $\mathbb{R}^+$ si $a \neq 1$ y $\{1\}$ si $a = 1$.
Es una función creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$.
Su gráfica viene representada en la figura 3.15.

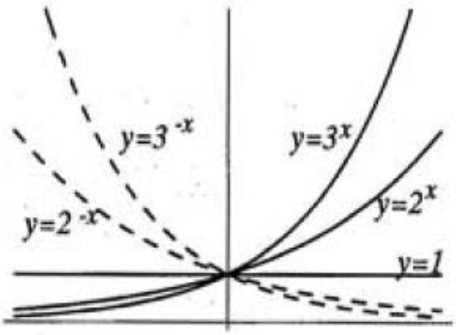

Fig. 3.15

Propiedades:

i) $a^0 = 1$.

ii) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica $a^x a^y = a^{x+y}$

iii) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

5.2. Función logarítmica

Se llama función logarítmica de base $a > 0$, $(a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ a la inversa de la función exponencial $g(x) = a^x$.

Dominio: $\mathbb{R}^+$

Imagen: $\mathbb{R}$

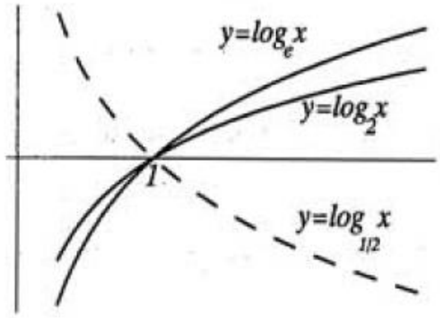

Fig. 3.16

NOTAS:

1) *Si $a = e$ el logaritmo se llama neperiano y se representa $\log x = \operatorname{Ln} x$*
2) *Si $a = 10$ el logaritmo se llama decimal.*

Propiedades:
i) $\log_a 1 = 0$
ii) Para todo $x, y \in I\!R$ se verifica

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^y = y \log_a x$$

iii) Para $x, y \in I\!R$ con $y \neq 0$ se tiene $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

iv) Para $x, a, b \in I\!R$ se verifica $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ y $a^x = b^{x \log_b a}$. En particular, $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ y $a^x = e^{x \log a}$.

NOTA: *Nosotros usaremos fundamentalmente logaritmos neperianos, por lo que la notación $\log x$ indicará logaritmo en base e, es decir logaritmo neperiano, y cuando se utilice un logaritmo en otra base distinta, se indicará adecuadamente.*

6. Funciones hiperbólicas

6.1. Seno hiperbólico

Se define la función seno hiperbólico de la forma: $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
Dominio: $I\!R$.
Imagen: $I\!R$.

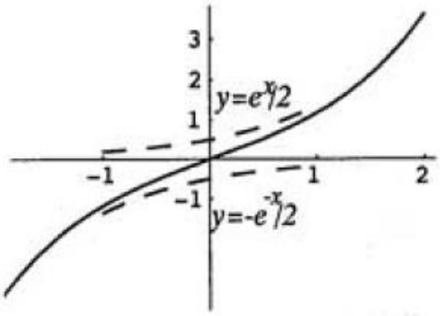

Fig. 3.17

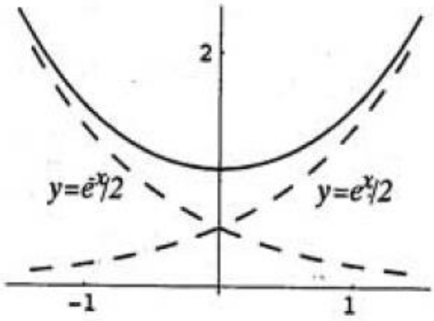

Fig. 3.18

6.3. Tangente hiperbólica

Se define $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Dominio: $\mathbb{R}$.

Imagen: $(-1, 1)$.

Es una función impar, acotada y creciente (véase la figura 3.19).

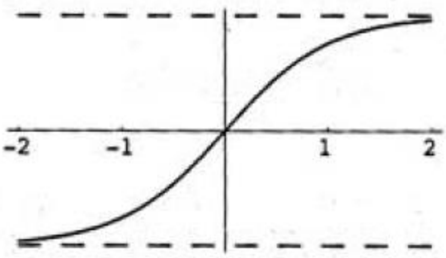

Fig. 3.19

NOTA: *Pueden definirse también las funciones:*

i) cotangente hiperbólica: $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{1}{\operatorname{tgh} x}$

ii) secante hiperbólica: $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

iii) cosecante hiperbólica: $\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

6.4. Propiedades de las funciones hiperbólicas

Se verifican las siguientes relaciones

1) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

En particular $\operatorname{tgh} 2x = \dfrac{2\operatorname{tgh} x}{1+\operatorname{tgh}^2 x}$.

5) $\cosh x = \sqrt{\dfrac{1+\cosh 2x}{2}}$ y $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$.

6) $\cosh x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2 x}}$ y $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\operatorname{tgh}^2 x}{1-\operatorname{tgh}^2 x}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. *Hallar el dominio de las funciones siguientes*

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ *b)* $g(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$

c) $h(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x+1}{x-1}$ *d)* $l(x) = \arccos\dfrac{x+1}{x^2+1}$

e) $m(x) = \log\left(\sqrt[5]{\dfrac{x^2+x+3}{x^2+1}} - 1\right)$

SOLUCIÓN:

a) La función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ es una función racional. Al ser $x^2-1=0$ si $x=\pm 1$, el dominio de dicha función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

b) Si $x^2-2x-3 \geq 0$, tiene sentido escribir $g(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$. Denominamos $r(x)$ a la función radicando, que se factoriza

$$r(x) = x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$$

y se tiene por tanto

$$\begin{aligned} x \leq -1 &\implies r(x) \geq 0 \\ -1 < x < 3 &\implies r(x) < 0 \\ x \geq 3 &\implies r(x) \geq 0 \end{aligned}$$

En consecuencia el dominio de $g(x)$ es $(-\infty,-1] \cup [3,\infty)$.

c) Como el dominio de la función seno es $\mathbb{R}$, basta analizar el dominio de $\dfrac{x+1}{x-1}$, que trivialmente se ve que es $\mathbb{R}-\{1\}$.

Al ser $x^2+1 \geq 0$, las desigualdades anteriores (multiplicadas por x^2+1) son equivalentes a

$$-(x^2+1) \leq x+1 \leq (x^2+1)$$

que dan lugar a resolver

$$-x^2-1 \leq x+1 \qquad \text{y} \qquad x+1 \leq x^2+1$$

Ahora bien,

$$-x^2-1 \leq x+1 \iff 0 \leq x^2+x+2,$$

lo que se verifica siempre puesto que x^2+x+2 tiene sus raíces imaginarias.
Para la otra desigualdad se puede encontrar una expresión equivalente más sencilla

$$x+1 \leq x^2+1 \iff x^2-x \geq 0 \iff x(x-1) \geq 0,$$

que se verifica en $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.
Por tanto, el dominio de la función $l(x)$ es $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

e) Puesto que el dominio de la función logaritmo es $(0, \infty)$, para analizar el dominio de la función $m(x)$ debemos resolver la inecuación

$$\sqrt[5]{\frac{x^2+x+3}{x^2+1}}-1>0$$

que es equivalente a

$$\sqrt[5]{\frac{x^2+x+3}{x^2+1}}>1.$$

Pero

$$\sqrt[5]{\alpha}>1 \iff \alpha>1;$$

entonces, en lugar de la desigualdad anterior, se resuelve la siguiente, que es más fácil

$$\frac{x^2+x+3}{x^2+1}>1$$

Y esta última desigualdad es equivalente a

$$x+2>0$$

que se verifica para todo $x>-2$. En consecuencia, el dominio de $m(x)$ es $(-2, \infty)$.

SOLUCIÓN:

a) $f(x)$ es una función impar, ya que

$$f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x) + (-x) + (-x)^3}{(-x)^2 + \cos(-x) + 4} = \frac{-\operatorname{sen} x - x - x^3}{x^2 + \cos x + 4} = -\left(\frac{\operatorname{sen} x + x + x^3}{x^2 + \cos x + 4}\right)$$

que coincide obviamente con $-f(x)$.

b) La función $g(x)$ no es ni par ni impar.

$$g(-x) = \frac{(-x)^4 + (-x)^2 + 1}{(-x)^5 + (-x)^3 + 2} = \frac{x^4 + x^2 + 1}{-x^5 - x^3 + 2}$$

que es distinto de $g(x)$ y de $-g(x)$. (Obsérvese que la función g no es impar por "culpa" del 2 del denominador.)

c) $h(x)$ es una función impar, ya que

$$h(-x) = \operatorname{sen}(-x) + \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x = -(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x) = -h(x).$$

d) $m(x)$ es una función impar. En efecto

$$m(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}(-3x)}{\cos(-2x) + 1} = \frac{-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{\cos 2x + 1} = -\left(\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x}{\cos 2x + 1}\right) = -m(x).$$

e) $n(x)$ es una función par. En efecto

$$n(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)\cos(-x)}{(-x)^5 + (-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x \cos x}{-x^5 - x} = \frac{-(\operatorname{sen} x \cos x)}{-(x^5 + x)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x^5 + x} = n(x).$$

11. *Sabiendo que* $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, *calcular, empleando para ello las relaciones trigonométricas convenientes,* $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ *y* $\operatorname{tg}\alpha$ *para los siguientes ángulos* α

a) $\frac{\pi}{6}$ *b)* $\frac{\pi}{2}$ *c)* $\frac{\pi}{4}$ *d)* $\frac{3\pi}{4}$

SOLUCIÓN:

a) Puesto que $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}$ se tiene que

$$\ldots\,{}^{2}\,\frac{\pi}{\ldots} \quad 1 + \cos\frac{\pi}{3} \quad 1 + \frac{1}{2} \quad 3$$

Por otra parte

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{6}} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

de nuevo teniendo en cuenta que el ángulo está en el primer cuadrante.

El resultado de la tangente se puede obtener a partir de los anteriores

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Dado que $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$, se puede resover el problema calculando previamente $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$. Como se trata de un ángulo del primer cuadrante, su seno es positivo y

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Al ser $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$, se obtiene

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

La tangente no está definida en $\frac{\pi}{2}$ ya que el coseno vale 0.

c) Por ser $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, se obtiene $2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1$ y por tanto $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, de donde

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ya que el ángulo $\frac{\pi}{4}$ está en el primer cuadrante.

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1.$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = -1.$$

14. *Sabiendo que* $\log_{10} 2 = 0'3010$, $\log_{10} 3 = 0'477$ *y* $\log 10 = 2'30$, *calcular* $\log_{10}\alpha$ *y* $\log\alpha$ *para los siguientes valores de* α*:*

a) 81 *b)* 128 *c)* $\frac{1500}{243}$

SOLUCIÓN:

Se calculará $\log_{10}\alpha$ ya que de la relación $\log_{10} x = \frac{\log x}{\log 10}$ se obtiene

$$\log x = \log 10 \log_{10} x = 2'3 \log_{10} x,$$

es decir, pasar del logaritmo en base 10 de un número al logaritmo neperiano es multiplicar por $\log 10 = 2'3$.

Entonces

a) $\log_{10} 81 = \log_{10} 3^4 = 4\log_{10} 3 = 4 \times 0'477 = 1'908$

b) $\log_{10} 128 = \log_{10} 2^7 = 7\log_{10} 2 = 7 \times 0'301 = 2'107$

c) $\log_{10}\frac{1500}{243} = \log_{10} 1500 - \log_{10} 243 = \log_{10}\frac{3000}{2} - \log_{10} 243 =$
$= \log_{10} 3000 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3^5 = \log_{10} 3 + \log_{10} 1000 - \log_{10} 2 - 5\log_{10} 3 =$
$= 3 - \log_{10} 2 - 4\log_{10} 3 = 3 - 0'301 - 4 \times 0'477 = 0'791.$

16. *La cantidad de uranio radiactivo que permanece en un cuerpo después de un tiempo* t *viene dada por la función*

$$U(t) = U_0\, e^{-kt}$$

donde U_0 *es la cantidad de uranio inicial y* k *es un constante positiva.*
Hallar la vida media del uranio (tiempo en que la cantidad de uranio se reduce a la mitad).

SOLUCIÓN:

La vida media t_m será el tiempo t tal que $U(t) = \frac{1}{2}U_0$, por tanto

$$\frac{1}{2}U_0 = U_0\, e^{-kt_m}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. *Un estudiante va de su casa a la Universidad en cuatro ocasiones. Las gráficas siguientes representan, para cada caso, la distancia a su casa en el instante t*

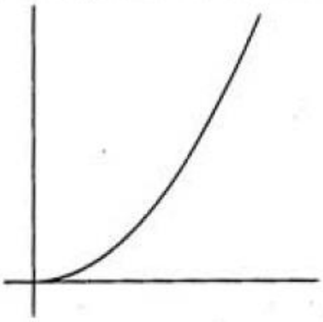

Fig. 3.26

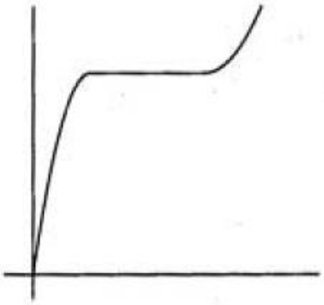

Fig. 3.27

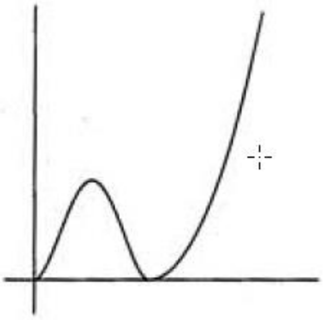

Fig. 3.28

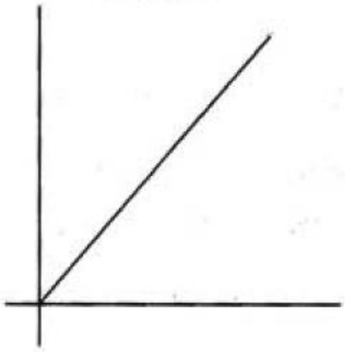

Fig. 3.29

Indicar la gráfica que corresponde a cada una de las siguientes situaciones:

a) Sale de casa rápido, al rato se da cuenta de que no lleva los libros, vuelve a su casa, recoge los libros y se marcha caminando rápidamente para llegar a clase.

b) Recorre todo el camino andando al mismo ritmo.

c) Empieza caminando muy rápido, pero desfallece y tiene que sentarse a recuperar fuerzas, para proseguir después el camino a un ritmo más lento.

d) Empieza a caminar pausadamente, pero tiene que avivar el ritmo para poder llegar a tiempo a clase.

2. *Hallar el dominio de las funciones siguientes:*

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{\ }$ [illegible] *b)* $g(x) = \sqrt{x^4-1}$

3. *Estudiar si son funciones pares o impares las siguientes:*

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{x^3 - x^5}{x^2 - 1}$ *b)* $g(x) = x^2 \operatorname{tg} x + x^3 \cos x$

c) $h(x) = \sec x + \operatorname{tg} x$ *d)* $l(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\operatorname{sen} x + 2}$

14. *Sabiendo que* $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, *calcular, utilizando las relaciones trigonométricas adecuadas el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:*

a) $\dfrac{\pi}{3}$ *b)* $\dfrac{\pi}{2}$ *c)* $\dfrac{5\pi}{6}$

15. *Calcular los ángulos* x *que satisfacen las relaciones siguientes:*

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$ *b)* $\operatorname{sen} 2x + 2\cos^2 x = 2$

c) $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *d)* $5 \operatorname{tg} x + 12 \operatorname{sen}^2 x = 11$

18. *Sabiendo que* $\log_{10} 2 = 0'301$, $\log_{10} 3 = 0'477$ *y* $\log 10 = 2'3$, *calcular* $\log_{10} \alpha$ *y* $\log \alpha$ *para los siguientes valores de* α*:*

a) 216 *b)* 500 *c)* 729 *d)* $\dfrac{9000}{128}$

BIBLIOGRAFÍA

García, A.; García, F.; López, A.; Rodríguez, G.; De La Villa, A.; ''*Cálculo I. Teoría y problemas de análisis matemático en una variable*''. Clagsa 2007.