Aplicaciones de la derivada

Introducción

Este capítulo, dividido en tres apartados, es, en cierto modo, un compendio de la mayoría de los capítulos anteriores.

En el primer apartado, analizaremos el crecimiento o decrecimiento de funciones en intervalos, fundamentalmente a través de sus derivadas. Estudiaremos la existencia de extremos de funciones que modelizan problemas de optimización en diversas situaciones en el ámbito económico, técnico, ...

En el segundo apartado, analizamos la convexidad y concavidad de una función, conceptos muy ligados al estudio de la derivada segunda de la función.

Finalmente, analizamos la representación gráfica de una función $y = f(x)$, recopilando información sobre su dominio, asíntotas, cortes con los ejes, máximos, mínimos, puntos de inflexión, ..., que corresponden a conceptos ya analizados.

Dejamos para el capítulo siguiente la representación de curvas expresadas en coordenadas paramétricas o polares.

1. Crecimiento. Extremos

Para presentar este capítulo de forma más o menos autocontenida, empezaremos recordando algunas definiciones que se vieron en capítulos anteriores.

1.1. Definición. Crecimiento en un intervalo

Una función f es creciente en el intervalo $I \subset \operatorname{Dom} f$ si para todo par de puntos $x, y \in I$ con $x < y$, se tiene $f(x) \leq f(y)$.

La función f es estrictamente creciente en I si dados $x, y \in I$ con $x < y$, es $f(x) < f(y)$.

1.2. Definición. Decrecimiento en un intervalo

La función f es decreciente en el intervalo $I \subset \operatorname{Dom} f$ si para todo par de puntos $x, y \in I$ con $x < y$, es $f(x) \geq f(y)$.

La función f se denomina estrictamente decreciente en I si dados $x, y \in I$ con $x < y$,

1.4. Definición. Extremos absolutos

a) La función f tiene un máximo absoluto en x_0 si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in \operatorname{Dom} f$.

b) La función f tiene un mínimo absoluto en x_0 si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in \operatorname{Dom} f$.

OBSERVACIÓN: *Los conceptos de crecimiento o decrecimiento y extremos se definen sin atender a la derivabilidad de la función; pero si la función es derivable, las derivadas suministran mucha información sobre los conceptos anteriores, como ponen de manifiesto los resultados siguientes.*

1.5. Teorema.

Sea f derivable en un intervalo I. Entonces

i) f es creciente en I si y sólo si $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

ii) f es decreciente en I si y sólo si $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.

iii) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces f es estrictamente creciente en I.

iv) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces f es estrictamente decreciente en I.

NOTA: *Los recíprocos de las dos últimas afirmaciones no son ciertos. En un entorno de un punto de derivada nula, se puede producir cualquier situación.*

EJEMPLOS:

$y = x^3$ *es estrictamente creciente en un entorno de* 0.
$y = -x^3$ *es estrictamente decreciente en un entorno de* 0.
$y = x^2$ *tiene un mínimo en* $x = 0$.
$y = -x^2$ *tiene un máximo en* $x = 0$.
y todas las funciones tienen derivada nula en $x = 0$.

En lo que sigue se van a caracterizar los extremos haciendo uso de derivadas. Recordemos que en el capítulo anterior (teorema 1.2) se daba la condición necesaria de extremos

"Sea f una función derivable en $x_0 \in (a, b)$. Si x_0 es un extremo relativo de f, entonces $f'(x_0) = 0$."

1.7. Teorema. Condición suficiente de extremos

Sea $x_0 \in I \subset \operatorname{Dom} f$. Supóngase que f tiene n derivadas continuas en x_0 y además que $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1}(x_0) = 0, f^{(n}(x_0) \neq 0$.

Si n es par

$$f^{(n}(x_0) > 0 \implies f \text{ tiene un mínimo relativo en } x_0$$
$$f^{(n}(x_0) < 0 \implies f \text{ tiene un máximo relativo en } x_0$$

Si n es impar, f no tiene extremo en x_0.

1.8. Técnica para el cálculo de extremos en intervalos cerrados

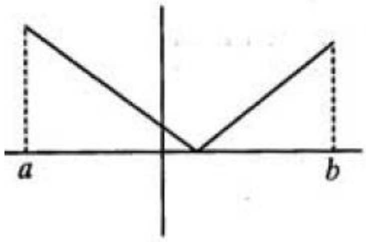


Fig. 9.4

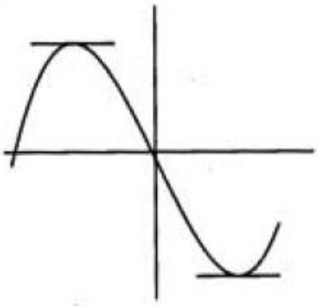


Fig. 9.5

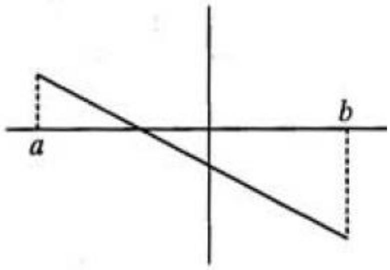


Fig. 9.6

OBSERVACIÓN: *Todo máximo absoluto es relativo, pero el recíproco no es cierto, y ocurre lo mismo con los mínimos.*

1.9. Extremos de funciones relacionadas con una dada

i) Si f tiene un máximo (mínimo) en x_0, la función $\dfrac{1}{f(x)}$ tiene un mínimo (máximo) en x_0 (supuesto $f(x) \neq 0$ en un entorno de x_0).

ii) Si g es una función creciente y $f(x)$ tiene un máximo (mínimo) en x_0 entonces $g \circ f$ tiene un máximo (mínimo) en x_0.

iii) Si g es decreciente y $f(x)$ tiene un máximo (mínimo) en x_0, entonces $g \circ f$ tiene un mínimo (máximo) en x_0.

OBSERVACIÓN: *De lo anterior se deduce que conocidos los extremos de $f(x)$ se pueden conocer los de $\sqrt{f(x)}$ (si tiene sentido) ó los de $e^{f(x)}$, ya que $x^{1/2}$ y e^x son funciones crecientes en $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}$ respectivamente.*

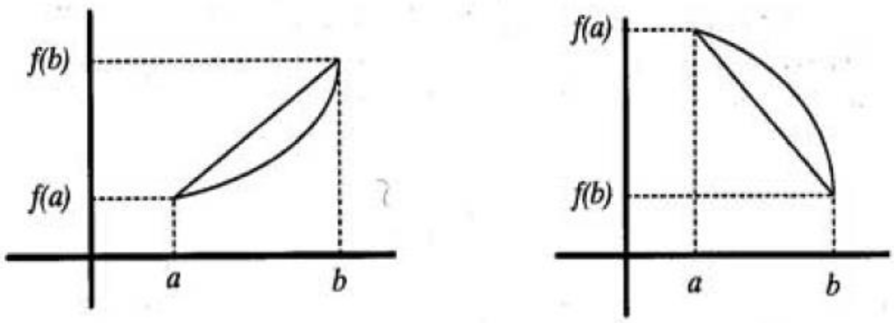
Si $f(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ y se conocen los extremos de f también se conocen los de $\operatorname{tg} f(x)$, ya que la función tangente es creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Convexidad y concavidad. Puntos de inflexión

2.1. Definición intuitiva de función convexa y cóncava

a) La función f es convexa en un intervalo I si para todo $a, b \in I$, el segmento que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$.

b) La función f es cóncava en un intervalo I si para todo $a, b \in I$, el segmento de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por debajo de la gráfica de f en dicho intervalo (ver figura 9.7).



f convexa $\qquad\qquad$ f cóncava

Fig. 9.7

2.2. Definición. Función convexa y cóncava

a) La función f es convexa en el intervalo I si para todo $a, b, x \in I$ con $a < x < b$ es

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

b) La función f es cóncava en el intervalo I si para todo $a, b, x \in I$ con $a < x < b$ es

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

NOTAS:

1) *Si f es convexa, la función $(-f)$ es cóncava, y viceversa.*

2) *Si f es derivable en I, f es convexa en I si y sólo si para todo $x_0, x \in I$ es*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

es decir, la gráfica de f queda encima de la tangente a la curva de f en el punto x_0.

3) *A veces, se utiliza la nomenclatura de cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo; en la literatura, pueden aparecer cambiados los conceptos de función convexa y cóncava definidas aquí.*

2.3. Teorema. Convexidad y derivabilidad

i) Sean f una función convexa (cóncava) en un intervalo I, y $a, b \in I$ con $a < b$. Si f es derivable en I, se verifica $f'(a) \leq f'(b)$ $(f'(a) \geq f'(b))$.

ii) Si f tiene derivada segunda en I, se tiene que si $f'' > 0$ en el intervalo I, f es convexa (al ser f' estrictamente creciente). Si $f'' < 0$ en el intervalo I, f es cóncava (al ser f' estrictamente decreciente).

2.5. Teorema. Condiciones suficientes de punto de inflexión

Sea la función f suficientemente derivable en el punto x_0. Si la primera derivada que no se anula, posterior a la primera, en el punto x_0 es de orden impar, f tiene un punto de inflexión en x_0.

NOTA: *La concavidad, convexidad y puntos de inflexión se estudian, a la vista de los teoremas anteriores, fundamentalmente a través de la segunda derivada.*

3. Representación gráfica de funciones explícitas

Dada la función $f\colon \mathrm{Dom}\, f \longrightarrow \mathbb{R}$ su representación gráfica es el compendio del estudio, más o menos profundo, de los epígrafes siguientes, que ya han sido previamente analizados.

1. Determinación del dominio o campo de existencia de f.
2. Corte con los ejes. Son los puntos $(0, f(0))$, si $0 \in \mathrm{Dom}\, f$, y $(x_0, 0)$ para $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ tal que $f(x_0) = 0$.
3. Periodicidad. Si la función f es periódica, el período T es el mínimo valor positivo que cumple
$$f(x) = f(x+T) \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\, f.$$
4. Simetrías. Si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}\, f$ (función par), la gráfica de f es simétrica respecto al eje OY.
Si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}\, f$ (función impar), la gráfica de f es simétrica respecto al origen.

NOTA: *La periodicidad y simetría permiten obtener la gráfica de la función sin más que analizarla en un subconjunto de* $\mathrm{Dom}\, f$.

5. Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.
6. Crecimiento y decrecimiento. Extremos.
7. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Dibujando la información recogida en estos epígrafes sobre el plano XY, es fácil obtener la gráfica de la función.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. *Estudiar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función*

Si $x < -1$ se tiene que $f'(x) < 0$. Luego, f es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$.

Si $x > -1$ entonces $f'(x) > 0$. En este caso, f es creciente en $(-1, \infty)$.

Si $x = -1$, al ser f continua y pasar de decreciente a creciente, habrá un mínimo relativo.

También se podría haber visto que el punto $x = -1$ corresponde a un mínimo de f usando

$$f''(x) = e^x(x+2)$$
$$f''(-1) = e^{-1} > 0.$$

---

2. *Demostrar*

a) $\operatorname{sen} x \leq x$ *si* $x \geq 0$. *b)* $\log(1+x) \leq x$ *si* $x \geq 0$.

SOLUCIÓN:

a) Basta demostrar que la función $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ verifica $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$.
Como $f'(x) = 1 - \cos x$, entonces $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Luego la función $f(x)$ será creciente en $x \geq 0$. En el punto $x = 0$, la función vale $f(0) = 0$. Entonces, $f(x) \geq 0$ si $x \geq 0$; en consecuencia, $\operatorname{sen} x \leq x$.

b) Sea la función $g(x) = \log(1+x) - x$. Su derivada es

$$g'(x) = \frac{-x}{1+x}.$$

Por tanto, $g'(x) \leq 0$ si $x \geq 0$. Luego g es decreciente en $(0, \infty)$. Dado que $g(0) = 0$ se tiene $g(x) \leq 0$ para todo $x \geq 0$. Es decir, $\log(1+x) \leq x$.

---

3. *Sea la función f tal que su derivada es*

$$f'(x) = \frac{x^3(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Hallar los puntos donde f tiene extremos relativos y los intervalos en que es creciente o decreciente.

SOLUCIÓN:

Si $\quad x < 0 \quad f'(x) > 0$, por tanto f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$
Si $\quad 0 < x < 1 \quad f'(x) < 0$, por tanto f es estrictamente decreciente en $(0, 1)$
Si $\quad 1 < x < 2 \quad f'(x) < 0$, por tanto f es estrictamente decreciente en $(1, 2)$
Si $\quad 2 < x < 3 \quad f'(x) > 0$, por tanto f es estrictamente creciente en $(2, 3)$
Si $\quad 3 < x \quad f'(x) > 0$, por tanto f es estrictamente creciente en $(3, \infty)$

En $x = 0$ hay un máximo (al pasar la función de creciente a decreciente). En $x = 2$ hay un mínimo (la función pasa de decreciente a creciente). En $x = 1$ y $x = 3$ no hay extremos.

---

4. *Estudiar si el punto $x = 0$ es extremo relativo de las funciones*

$$a)\ f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases} \qquad b)\ g(x) = x^5 \operatorname{sen}^2 x.$$

SOLUCIÓN:

a) Según se vio en el problema 19 (resuelto) del Capítulo anterior,

$$f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n}(0) = 0 \quad \forall n \in I\!N\,.$$

Luego, no sirve el criterio de si la primera derivada que se anula es par o impar. Sin embargo, $e^{-1/x^2} > 0$ si $x \neq 0$. Como $f(0) = 0$ la función tiene un mínimo en $x = 0$.

b) La derivada de la función es $g'(x) = 5x^4 \operatorname{sen}^2 x + 2x^5 \operatorname{sen} x \cos x$, cuyo valor en $x = 0$ es $g'(0) = 0$ (luego $x = 0$ puede ser un extremo). El cálculo de las siguientes derivadas para encontrar la primera que no se anule se hace más difícil. La función $g(x)$ verifica en un entorno de 0

$$\text{Si } x < 0 \quad \text{es } g(x) < 0 \quad (x^5 < 0; \quad \operatorname{sen}^2 x > 0)$$
$$\text{Si } x > 0 \quad \text{es } g(x) > 0 \quad (x^5 > 0; \quad \operatorname{sen}^2 x > 0).$$

Por tanto, en $x = 0$ no hay extremo.

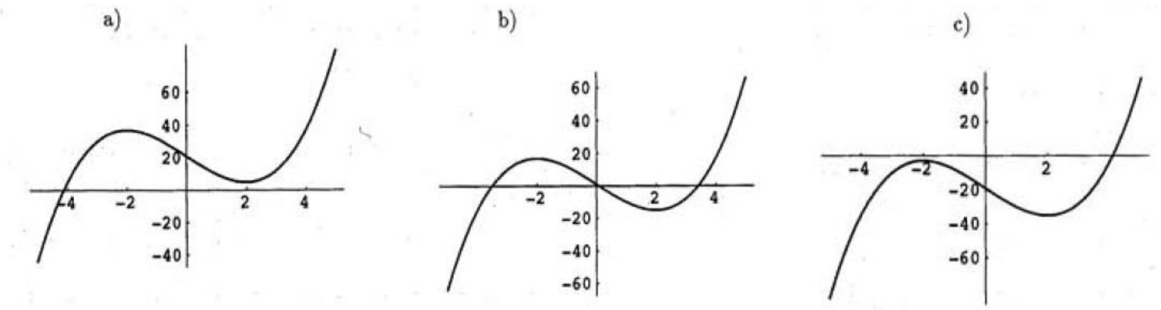
---

5. *Hallar el número de raíces de la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$.*

SOLUCIÓN:

La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 12$, que se anula en los puntos $x = -2$ y $x = 2$.

La derivada segunda es $f''(x) = 6x$. Como $f''(-2) = -12 < 0$, f tiene un máximo en



Al ser $f(-2) = 17$ y $f(2) = -15$ estamos en la situación b) y tenemos tres raíces reales para la función $f(x)$.

---

6. *Hallar los extremos relativos de las funciones*

$$a)\ f(x) = \log\sqrt{2x^3+3x^2} \qquad b)\ g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-8x+17}}$$

SOLUCIÓN:

a) El dominio de f será $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x^3+3x^2 > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > -\frac{3}{2} \quad x \neq 0\right\}$.

Por ser las funciones $\log x$ y $\sqrt{x}$ crecientes en $\mathbb{R}^+$, el cálculo de los extremos de la función f es equivalente al cálculo de los extremos de $2x^3+3x^2$.
Sea
$$h(x) = 2x^3+3x^2 \qquad h'(x) = 6x^2+6x.$$
La derivada primera vale 0 en los puntos $x = 0$ y $x = -1$. La derivada segunda es $h''(x) = 12x+6$, por tanto $h''(-1) = -6$ ($x = 0$ no pertenece a $\mathrm{Dom}\, f$). Se concluye que $x = -1$ es un máximo de h y en consecuencia de f.

b) Puesto que para todo $x \in \mathbb{R}$ es $x^2-8x+17 > 0$, el dominio de g es $\mathbb{R}$.
El cálculo de los extremos de g es equivalente al cálculo de los extremos de
$$j(x) = \sqrt[3]{x^2-8x+17}$$
(si $g(x)$ tiene un mínimo, $j(x)$ tendrá un máximo y viceversa, ya que $\frac{1}{x}$ es decreciente).
Los extremos de $j(x)$ son los mismos que los de $k(x) = x^2-8x+17$ puesto que $\sqrt[3]{x}$ es una función creciente en $x \geq 0$.
Pero ya que $k'(x) = 2x-8$, se tiene que si $k'(x) = 0$ es $x = 4$. La derivada segunda de k es $k''(x) = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

7. *Calcular los máximos y mínimos absolutos en los intervalos que se indican de las funciones siguientes*

a) $f(x) = \begin{cases} |x| & si\ -2 < x \leq 1 \\ x+3 & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad x \in [-2,2].$

b) $g(x) = x^2 \qquad x \in [-1,2].$ *c)* $h(x) = x^3 \qquad x \in [-1,1].$

SOLUCIÓN:

a) Los candidatos a extremos son los puntos $x = -2$, $x = 2$ (extremos del intervalo), $x = 0$ (donde la función no es derivable) y $x = 1$, donde la función no es continua. Puesto que la derivada primera es

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 2 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

no hay más posibles extremos ya que $f'(x) \neq 0$ si $x \in (-2,2)$ $(x \neq 0,1)$.

La evaluación de la función f en los puntos anteriores resulta

$$f(-2) = 2 \qquad f(0) = 0 \qquad f(1) = 1 \qquad f(2) = 5.$$

Por tanto, el máximo absoluto de f es el valor 5 (alcanzado en $x = 2$) y el mínimo es 0 (alcanzado en $x = 0$).

NOTA: *En $x = -2$ hay máximo relativo y en $x = 1$ no hay extremo.*

b) Los candidatos a extremos son $x = -1$, $x = 2$ (por ser los extremos del intervalo) y $x = 0$, que es el único punto del intervalo $(-1,2)$ que cumple $g'(x) = 0$.
Por ser $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$ y $g(2) = 4$ el mínimo absoluto se alcanza en $x = 0$, siendo $g(0) = 0$, y el máximo absoluto se alcanza en $x = 2$, siendo $g(2) = 4$.

c) Dado que $h'(x) = 3x^2$, que es mayor o igual que 0 para todo $x \in \mathbb{R}$, la función h es creciente en $\mathbb{R}$, y en particular en $[-1,1]$.
Por lo tanto, el mínimo se alcanza en $x = -1$ y el máximo en $x = 1$, siendo -1 y 1 los valores mínimo y máximo respectivamente.

8. *Con una cartulina de 8×5 metros se desea construir una caja sin tapa, de volumen máximo. Hallar las dimensiones de dicha caja.*

SOLUCIÓN:

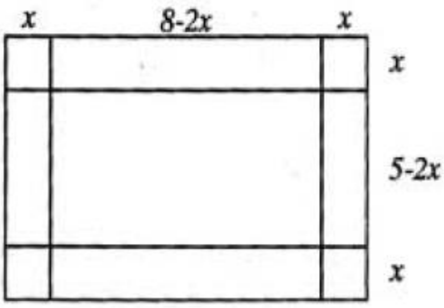


Fig. 9.9

Sea x el lado de los cuadrados pequeños. El volumen de la caja será

$$v(x) = (8-2x)(5-2x)x = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$
$$v'(x) = 12x^2 - 52x + 40$$

con lo que $v'(x) = 0$ si $x = 1$ ó $x = \frac{10}{3}$. ($x = \frac{10}{3}$ no tiene sentido ya que $5 - 2 \cdot \frac{10}{3} < 0$, dando lugar a dimensiones negativas de la caja.)

Al ser $v''(x) = 24x - 52$ se tiene $v''(1) = -28$. Por tanto, $x = 1$ es máximo. La caja tendrá de dimensiones $6 \times 3 \times 1$ y su volumen será $18\,\mathrm{m}^3$.

———————— • ————————

9. *Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene un lado sobre el eje X y está inscrito en el triángulo determinado por las rectas $y = 0$, $y = x$, $y = 4 - 2x$ (véase figura 9.10).*

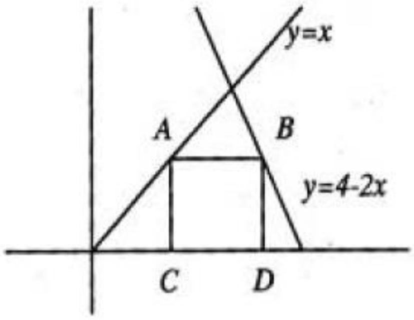


Fig. 9.10

$$f(h) = \left(\frac{4-3h}{2}\right)h = \frac{4h-3h^2}{2}.$$

Por tanto, $f'(h) = \frac{1}{2}(4-6h)$ y $f'(h) = 0$ en el punto $h = \frac{2}{3}$; la derivada segunda es $f''(h) = -3 < 0$, para todo h. Luego, en $h = \frac{2}{3}$ hay un máximo.

Entonces, las dimensiones serán para la base $\frac{4-3h}{2} = 1$ y para la altura $\frac{2}{3}$; el valor del área es $\frac{2}{3}$.

---

10. *Los cauces de los ríos R_1 y R_2 tienen por ecuaciones $y - x^2 = 0$ y $x - y - 2 = 0$ respectivamente (véase figura 9.11).*

Hallar el coste mínimo del canal rectilíneo que une ambos ríos, sabiendo que cada kilómetro de canal cuesta 15 millones de pesetas y las coordenadas vienen expresadas en kilómetros.

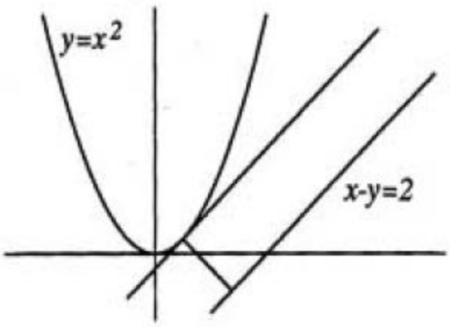


Fig. 9.11

SOLUCIÓN:

La distancia de un punto (x, y) arbitrario a la recta que determina el cauce de R_2 es

$$d = \left|\frac{x-y-2}{\sqrt{2}}\right|$$

Si el punto (x, y) es de la parábola $y = x^2$ estará situado en el semiplano $x - y - 2 < 0$ y, por tanto, la distancia será

$$d(x) = -\frac{x-x^2-2}{\sqrt{2}}.$$

$$d = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2}{-\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

El coste en millones será $\frac{7\sqrt{2}}{8} \cdot 15$, es decir de, aproximadamente, 18 561 553 pesetas.

---

11. *La velocidad de la luz en dos medios distintos es, respectivamente, v_1 y v_2. Sabiendo que la luz viaja desde un punto P a un punto Q empleando el mínimo tiempo posible, demostrar la ley de refracción, es decir,*

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2},$$

siendo i el ángulo de incidencia y r el ángulo de refracción (véase figura 9.12).

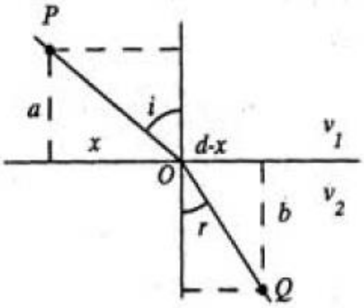


Fig. 9.12

SOLUCIÓN:

Definamos la función f en un intervalo $[0, d]$ de la forma siguiente

$$f(x) = \frac{\overline{OP}}{v_1} + \frac{\overline{OQ}}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Dicha función representa el tiempo que tarda en llegar la luz del punto P a Q cambiando de medio en un punto cuya abscisa es x unidades más que la abscisa de P. El punto O debería ser tal que minimice $f(x)$

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

y teniendo en cuenta que

Si $f'(x) = 0$ debe ser

$$\frac{\operatorname{sen} i}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} r}{v_2}.$$

Obviamente, el valor de x para esta igualdad hace mínimo $f(x)$, dejando para el lector los detalles del cálculo de la derivada segunda.

---

12. *Un circuito se compone de una pila de fuerza electromotriz E de resistencia interna r y una resistencia variable R. Calcular la relación entre R y r para que la potencia suministrada sea máxima.*

SOLUCIÓN:

La intensidad del circuito es

$$I = \frac{E}{R+r}.$$

La potencia viene dada por $P = I^2\, R$, es decir, se debe optimizar la función

$$P(R) = \frac{E^2\, R}{(R+r)^2}$$

para lo cual habrá que encontrar los puntos en los que se anula la derivada:

$$P'(R) = E^2 \frac{(R+r)^2 - 2(R+r)R}{(R+r)^4} = E^2 \frac{(R+r) - 2R}{(R+r)^3}$$

$$P'(R) = 0 \iff R + r - 2R = 0 \iff R = r.$$

Dejamos al lector comprobar que $P''(r) < 0$, siendo, por tanto, la potencia máxima si $R = r$.

---

13. *Un campo de fútbol tiene la forma y dimensiones de la figura 9.13.*

¿Desde qué punto de la banda $\overline{AB}$ será más fácil meter un gol en la portería p?

SOLUCIÓN:

Será tanto más fácil meter gol cuanto mayor sea el ángulo con el que se ve la portería desde la banda. Debemos, pues, maximizar el ángulo $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, siendo dicho ángulo el de la figura 9.14.

Al ser la tangente una función creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, es equivalente calcular el máximo de φ y el de $\operatorname{tg}\varphi$. Como

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}$$

siendo

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{b+a}{x} \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{b}{x}$$

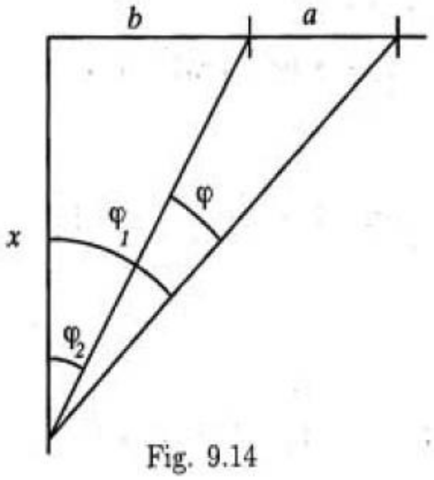


Fig. 9.14

se tiene

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{b+a}{x} - \dfrac{b}{x}}{1 + \dfrac{(b+a)b}{x^2}} = \frac{ax}{x^2 + (a+b)b} = f(x)$$

Para calcular el máximo de $f(x)$ evaluamos su derivada obteniendo

$$f'(x) = \frac{a\left[x^2 + (a+b)b\right] - 2ax^2}{\left[x^2 + (a+b)b\right]^2} = \frac{(a+b)ba - ax^2}{\left[x^2 + (a+b)b\right]^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{(a+b)b}$$

Se descarta la solución negativa porque dicho punto se sale del campo de fútbol.

Se comprueba que $f''\left(\sqrt{(a+b)b}\right) < 0$, dejando los detalles al lector.

Por tanto, se debería de lanzar desde el punto para el cual $x = \sqrt{(a+b)b}$.

NOTA: *Si $c < \sqrt{(a+b)b}$, lo que daría lugar a un campo de fútbol no usual, el mejor sitio para marcar un gol sería el punto B, es decir, $x = c$, ya que la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $[0, c]$.*

$$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \qquad\qquad f''(x) = -\operatorname{sen} x$$

Por tanto, la función es cóncava en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ al ser la derivada segunda negativa en dicho intervalo.

Los valores de la función $f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ son, $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Puesto que la función es cóncava, la gráfica está por encima de la recta que une los puntos $(0, f(0))$ y $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, que es el eje X.

Por tanto, $f(x) > 0$ si $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, es decir, $\operatorname{sen} x > \frac{2}{\pi}x$.

Por tanto, como $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ se tiene que $\operatorname{sen} x \geq \frac{2}{\pi}x$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

---

18. *Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$, se pide*
   a) Determinar sus asíntotas.
   b) Estudiar su derivabilidad.
   c) Determinar sus intervalos de crecimiento y concavidad.
   d) Determinar sus máximos y mínimos relativos.
   e) Dibujar su gráfica.

SOLUCIÓN:

a) Obviamente, f no tiene asíntotas verticales. Para el estudio de las horizontales y oblicuas, se procederá en dos etapas: hacia la izquierda $(-\infty)$ y hacia la derecha (∞).

i) Hacia la izquierda, la función no tiene asíntotas horizontales ya que

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2(1-x)} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{-x^3} = \infty$$

Veamos si las tiene oblicuas

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{x} = -1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} \left[\sqrt[3]{x^2(1-x)} + x\right]$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\sqrt[3]{t^2(1+t)} - t\right] = \lim_{t\to\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{t^2(1+t)}{t^3}} - 1\right) t$$

ii) Se deja como ejercicio al lector la comprobación de que la recta $y = -x + \dfrac{1}{3}$ también es asíntota de f cuando $x \to +\infty$.

b) La derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - x^3\right)^{-2/3}(2x - 3x^2) = \frac{1}{3}\frac{x(2-3x)}{x^{4/3}(1-x)^{2/3}} = \frac{1}{3}\frac{2-3x}{x^{1/3}(1-x)^{2/3}}$$

que no es finita para $x = 0$ y $x = 1$.
f es derivable si $x \neq 0$ y $x \neq 1$, siendo su derivada

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{2-3x}{x^{1/3}(1-x)^{2/3}}$$

c) Para establecer los intervalos de crecimiento y decrecimiento se consideran los puntos de no derivabilidad y los que anulan f'. Los posibles cambios se pueden encontrar en los puntos $x = 0$, $x = \dfrac{2}{3}$ y $x = 1$.

Para $-\infty < x < 0$ es $f'(x) < 0 \implies$ la función decrece en $(-\infty, 0)$
Para $0 < x < 2/3$ es $f'(x) > 0 \implies$ la función crece en $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$
Para $2/3 < x < 1$ es $f'(x) < 0 \implies$ la función decrece en $\left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$
Para $1 < x < \infty$ es $f'(x) < 0 \implies$ la función decrece en $(1, +\infty)$

Los intervalos de concavidad se obtienen a partir de la derivada segunda.
Puesto que $f'(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{2-3x}{x^{1/3}(1-x)^{2/3}}$, será $f''(x) = -\dfrac{2}{9}\dfrac{1}{x^{4/3}(1-x)^{5/3}}$.
Entonces es

$f''(x) > 0$ si $-\infty < x < 1$ por tanto f es convexa en $(-\infty, 1)$
$f''(x) < 0$ si $1 < x < \infty$ por tanto f es cóncava en $(1, \infty)$

d) A la vista de los cambios de crecimiento y de la continuidad de f, se concluye que tiene un mínimo en el punto $(0, 0)$ y un máximo en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$.

e) Los cortes de la curva con la asíntota se obtienen en los puntos cuya abscisa verifica

$$\sqrt[3]{x^2 - x^3} = -x + \frac{1}{3}$$

lo que ocurre si $x = \dfrac{1}{9}$, es decir únicamente en un punto.

19. *Representar gráficamente la curva* $y = (x^2 - 4)^{2/3}$.

SOLUCIÓN:

1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$.

2) Los puntos de corte con los ejes son $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0, 2\sqrt[3]{2})$.

3) La curva es simétrica respecto al eje Y, ya que $f(-x) = f(x)$.

4) La primera derivada de la función es $y' = \frac{2}{3}(x^2-4)^{-1/3}\,2x$, que se anula si y sólo si $x = 0$, y que no está definida en $x = 2$ y $x = -2$.

Como para $|x| < 2$ es $(x^2-4)^{1/3} < 0$ y para $|x| > 2$ es $(x^2-4)^{1/3} > 0$ se tiene

$$\begin{array}{llll}
\text{Si} & -\infty < x < -2 \text{ es } y' < 0 & \Longrightarrow & \text{la curva decrece en } (-\infty, -2) \\
\text{Si} & -2 < x < 0 \quad \text{es } y' > 0 & \Longrightarrow & \text{la curva crece en } (-2, 0) \\
\text{Si} & 0 < x < 2 \quad \text{es } y' < 0 & \Longrightarrow & \text{la curva decrece en } (0, 2) \\
\text{Si} & 2 < x < \infty \quad \text{es } y' > 0 & \Longrightarrow & \text{la curva crece en } (2, \infty)
\end{array}$$

como consecuencia, la curva tiene mínimos en los puntos de no derivabilidad $x = 2$ y $x = -2$, y tiene un máximo local en $x = 0$.

5) La derivada segunda es

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{4}{3}\left[(x^2-4)^{-1/3} + x\frac{-1}{3}(x^2-4)^{-4/3}\,2x\right] \\
&= \frac{4}{3}(x^2-4)^{-4/3}\left[(x^2-4) - \frac{2}{3}x^2\right] = \frac{4}{3}\,\frac{\frac{1}{3}x^2 - 4}{(x^2-4)^{4/3}} \\
&= \frac{4x^2 - 48}{9(x^2-4)^{4/3}}
\end{aligned}$$

Entonces $y'' = 0$ si y sólo si $x = \pm\sqrt{12}$

$$\begin{array}{llll}
\text{Si} & -\infty < x < -\sqrt{12} \text{ es } y'' > 0 & \Longrightarrow & \text{la curva es convexa} \\
\text{Si} & -\sqrt{12} < x < \sqrt{12} \text{ es } y'' < 0 & \Longrightarrow & \text{la curva es cóncava} \\
\text{Si} & \sqrt{12} < x < \infty \quad \text{es } y'' > 0 & \Longrightarrow & \text{la curva es convexa}
\end{array}$$

La curva tiene puntos de inflexión en $(-\sqrt{12}, 4)$ y $(\sqrt{12}, 4)$.

6) La curva no tiene asíntotas oblicuas ni horizontales, ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

Su representación gráfica es

20. *Estudiar y representar gráficamente la función* $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-3)}$.

SOLUCIÓN:

1) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{1,3\}$.

2) El único punto de corte con los ejes es $(0,0)$.

3) Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x-1)(-x-3)} = \frac{-x}{(x+1)(x+3)}$$

que es distinto de $f(x)$ y también de $-f(x)$. Luego no es simétrica respecto al eje OY (no es función par), ni respecto del origen O (no es función impar).

4) Asíntotas.
Verticales:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = \infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = \infty$$
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = -\infty$$

Las rectas $x = 1$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.
Horizontales:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = 0 \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = 0,$$

luego, $y = 0$ es una asíntota horizontal si $x \to -\infty$ y $x \to \infty$.
No hay asíntotas oblicuas.

5) Crecimiento y decrecimiento. Extremos.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3 - x(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-x^2+3}{(x^2-4x+3)^2}.$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si $\dfrac{-x^2+3}{(x^2-4x+3)^2} = 0$ es decir para $x = \pm\sqrt{3}$.
En $x = \pm\sqrt{3}$ puede existir un punto extremo (cumple la condición necesaria).
La función $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y creciente en $(-\sqrt{3}, 1)$. Luego, en

6) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 18x + 24}{(x-1)^3 (x-3)^3}$$

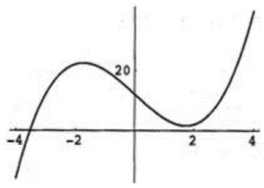
entonces $f''(x) = 0$ si y sólo si $x^3 - 9x + 12 = 0$.
Las raíces de $f''(x)$ nos dan los posibles puntos de inflexión. Sin embargo, $x^3 - 9x + 12$ no tiene raíces enteras.
Denotemos $g(x) = x^3 - 9x + 12$. Entonces $g'(x) = 3x^2 - 9$.
Luego los posibles máximos y mínimos relativos de $g(x)$ son los puntos x tales que $3x^2 - 9 = 0$, es decir $x = \pm\sqrt{3}$.

$$\begin{array}{lll} g''(x) = 6x & g''\left(\sqrt{3}\right) > 0 & \text{luego } x = \sqrt{3} \text{ es mínimo de } g(x) \\ & g''\left(-\sqrt{3}\right) < 0 & \text{luego } x = -\sqrt{3} \text{ es máximo de } g(x) \end{array}$$

Como

$$\begin{array}{ll} g(x) \to -\infty & \text{si } x \to -\infty \\ g(-\sqrt{3}) > 0 & g(\sqrt{3}) > 0 \\ g(x) \to \infty & \text{si } x \to \infty \end{array}$$

la gráfica de g es del tipo



Se comprueba fácilmente que $g(-4) < 0$ y $g(-3) > 0$, luego la única raíz de $g(x)$ es $x_0 \in (-4, -3)$.
Es decir, el único posible punto de inflexión de $f(x)$ se encuentra en el intervalo $(-4, -3)$. Sea $(x_0, f(x_0))$ dicho punto. Entonces

$$\begin{array}{l} \text{en } x \in (-\infty, x_0) \text{ es } f''(x) < 0 \text{ por tanto } f(x) \text{ es cóncava en } (-\infty, x_0). \\ \text{en } x \in (x_0, 1) \text{ es } f''(x) > 0 \text{ por tanto } f(x) \text{ es convexa en } (x_0, 1). \end{array}$$

(Efectivamente, el punto $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión). Po otra parte, en $(1, 3)$ es $f''(x) < 0$, por lo que $f(x)$ es cóncava en dicho intervalo; y en el intervalo $(3, \infty)$, $f''(x) > 0$ y la función es convexa.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. *Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones*

   a) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ *b)* $g(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

2. *Demostrar que*

   a) $x < \operatorname{tg} x$ *si* $x > 0$ *b)* $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ *si* $x > 0$.

3. *Estudiar si el punto* $x = 1$ *es extremo relativo de las funciones siguientes:*
   a) $f(x) = |x-1|$.
   b) $g(x) = (x-1)^5\, h(x)$, *donde* $h(x)$ *es una función suficientemente derivable en* $x = 1$ *con* $h(1) = 13$.

4. *Hallar el número de raíces de la función* $f(x) = x^5 - 16x + 9$.

6. *Hallar los extremos relativos de las funciones siguientes*

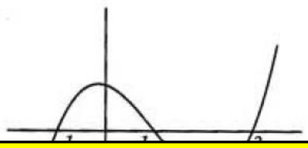
   a) $f(x) = e^{\sqrt[3]{x^3-3x+7}}$ *b)* $g(x) = \dfrac{1}{\log(x^2+1)}$.

7. *Hallar los extremos absolutos de las funciones siguientes en los intervalos que se indican.*

   a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ *si* $x \in [0,5]$

   b) $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad x \in [-1,3]$

8. *La figura adjunta es la de la derivada de una función. Estudiar el comportamiento de la función (crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad y convexidad).*



10. *Un espejo plano de dimensiones 80×90 cms. se rompe por una esquina según una recta. De los trozos que quedan, el menor tiene forma de triángulo rectángulo, de catetos 10 y 12 cms. (correspondiente a los lados de 80 y 90 cms. respectivamente).*
Calcular las dimensiones máximas del espejo rectángular que se puede conseguir con el mayor de los trozos.

11. *Inscribir en una esfera de radio R un cilindro circular que tenga*

   a) volumen máximo *b) área lateral mínima*

12. *Hallar el ángulo de tiro de un cañón para que el alcance sea máximo y calcular dicho alcance si la velocidad inicial es v_0, sabiendo que sólo está sometido a la acción de la gravedad.*

INDICACIÓN: Las ecuaciones paramétricas del movimiento son

$$x = v_0 t \cos\alpha \qquad y = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t \operatorname{sen}\alpha.$$

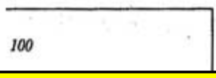
13. *Una estatua de 3 metros de altura está colocada sobre un pedestal de 1 metro de altura. ¿A qué distancia hay que contemplar la estatua para tener mejor perspectiva?*

15. *Un almacenista compra una cierta clase de madera al precio de $c = 1\,200$ pts/m^3. Un estudio del mercado da como resultado que si vende la madera al precio de x pts/m^3, el volumen de madera en m^3 que vende es $V = ae^{-k(x-c)}$, con $a = 50$ y $k = 0'0004$. Se pide hallar*

   a) El precio para el cual el beneficio obtenido por la venta es máximo.
   b) El porcentaje del beneficio sobre el capital invertido.

16. *Se quiere construir un recipiente de volumen constante, formado por un cilindro rematado por una semiesfera. Hallar las dimensiones de dicho recipiente para que tenga la menor superficie. Interpretar el valor obtenido.*

17. *Dos canales de navegación se cortan perpendicularmente siendo su anchura 100 y 200 metros respectivamente. Hallar la dimensión máxima de los barcos que pueden transitar por dichos canales simultáneamente.*



20. *Representar gráficamente las siguientes curvas*

a) $y = x^2 e^{1/x}$

b) $y = \dfrac{\log x}{x}$

c) $y = |x+1| + |x-1|$

d) $y = \dfrac{x}{e^{|x-1|}}$

e) $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

f) $y = \begin{cases} 2x^2 \log|x| - 5x^2 & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$

BLIOGRAFÍA

García, A.; García, F.; López, A.; Rodríguez, G.; De La Villa, A.; ''*Cálculo I. Teoría y problemas de análisis matemático en una variable''*. Clagsa 1993.