Cálculo

2020-2021

Examen Parcial — 25 de enero de 2021

(1) Sea D la región limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = 1 + |x|e^{-x^2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$.

(a) (3 puntos) Dibuje el conjunto D.

(b) (12 puntos) Halle el área de D.

(2) (10 puntos)

(a) (3 puntos) Demuestre por inducción que la derivada de orden n de la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ es

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

(b) (3 puntos) Halle el polinomio de Taylor de grado n, en $x_0 = 0$, de $f(x)$.

(c) (4) Utilizando el polinomio de Taylor de $f(x)$, halle aproximadamente el valor $\dfrac{1}{1.1}$, asegurando haber cometido un error menor o igual que 10^{-5}.

(d) (2 puntos)Utilizando el apartado (b), deduzca el polinomio de Taylor de grado n, en $x_0 = 0$, de la función $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

(e) (3 puntos) Calcule la derivada de orden 20 de $g(x)$ en el punto $x = 0$.

(3) Sea la sucesión definida como:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n}, \qquad a_1 > 1.$$

(a) (3 puntos) Demuestre que $a_n > 1$ para todo n.

(b) (3 puntos) Demuestre que $\{a_n\}$ es decreciente.

(c) (4 puntos) Demuestre que $\{a_n\}$ es contractiva.

(d) (2 puntos) Demuestre que es convergente y halle el límite.

(e) (4 puntos) Deduzca el término general de $\{a_n\}$. Demuestre por inducción que la deducción es correcta.

(f) (4 puntos) Analice la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - a_n.$$