Matemáticas I

HOJA 3

Ejercicio 1:
Analizar la derivabilidad de las siguientes funciones:

i) $f(x) = \begin{cases} e^{1-cos(3x)}, & x > 0, \\ \dfrac{x}{x^2+3}, & x \leq 0. \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} ln(1+(sen(x))^2), & x \geq 0, \\ \dfrac{x}{1-x}, & x < 0. \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(ax)}{x}, & x \geq 0, \\ f(x), & x < 0 \text{ donde } f \in C^1,\ f(0) = 1 \text{ y } f'(0) = b \end{cases}$.

Ejercicio 2:
Estudiar continuidad y derivabilidad en la siguiente funciones:
i)

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{y^2}} + xe^{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2}}}{xe^{\frac{1}{y^2}} + e^{-\frac{1}{y^2}}} & \text{si } x \leq 0, \\ (\cos(x))^{\frac{1}{sen^2 x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

ii)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\frac{\pi}{2x} + (x-1)sen\frac{\pi}{x-1} & \text{si } x \neq 0 \text{ ó } 1, \\ x & \text{si } x = 0 \text{ ó } 1. \end{cases}$$

Ejercicio 3:
Sean $\alpha > \beta > 0$ y

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+\beta}}{x^\alpha + x^\beta} & \text{si } x > 0, \\ x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. ¿Para que valores de α y β $f(x)$ es continua?
2. ¿Para que valores de α y β $f(x)$ es derivable?

Ejercicio 4:
A las 9:00h un barco B se encontraba a 65km al este de otro barco A. El barco B viaja hacia el oeste a una velocidad de 10km/h y A viaja hacia el sur a una velocidad de 15km/h. ¿Cuándo se encontrarán a la distancia mínima y cuál es dicha distancia?.

Ejercicio 5:

Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede ser inscrito en la región limitada por la parábola $y^2 = 4px$ y la recta $x = a$.

Ejercicio 6:

Demuestrar que la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$ no puede tener 2 raíces distintas en el intervalo $(0, 1)$.

Ejercicio 7:

Hallar los siguientes límites:

i) $\lim_{x\to 0^+} x^n ln(x) \quad (n > 0)$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{(sen(x))^2} - \frac{1}{x^2}$

iii) $\lim_{x\to 0} (cos(2x))^{\frac{3}{x^2}}$

iv) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{6x - x^3} + x$

v) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{bx}}$.

Ejercicio 8:

Hallar el polinomio de Taylor hasta orden 2 en $x_0 = 0$ de las siguientes funciones:

i) $f(x) = e^{sen(x)} \quad x_0 = 0$

ii) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x},\ si\, x \neq 0,\ 1\, si\, x = 0.$

Ejercicio 9:

Usar el teorema de Taylor con $n = 2$ para obtener una aproximación de $\sqrt{1{,}3}$ y $\sqrt{3}$. Estimar el error cometido.

Ejercicio 10:

¿Para que valores de x la formula

$$\cos x \approx 1 + \frac{x^2}{2!}$$

es valida cometiéndose un error menor que 0.0001?

Ejercicio 11:

i) Usar el desarrollo de Taylor para demostrar que

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \qquad (*)$$

$\forall\ |x| \leq \pi$.

ii) Deducir que $(*)$ es cierto $\forall x \in I\!R$.

Ejercicio 12:

Sean $k \in I\!N$ y $x > 0$, usar el desarrollo de Taylor para demostrar que

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}x^2 &+ \cdots - \frac{1}{2k}x^{2k} < ln(1+x) < \\ x - \frac{1}{2}x^2 &+ \cdots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Ejercicio 13:

1. Desarrollar por Taylor, en el punto cero y hasta grado tres, las funciones $f(x) = \arctan(x) - xe^x$ y $g(x) = sen(x) - x(1+x)$
2. Hallar
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$
3. Probar que $\arctan(x) < xe^x$, $(x > 0)$.

Ejercicio 14:

Utilizando el polinomio de Taylor, en el punto cero y hasta grado dos, de las funciones $f(x) = log(1+x)$ y $g(x) = log((1+x)/(1-x))$:

1. Hallar aproximadamente $log2$ utilizando los polinomios de Taylor de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.
2. Demostrar que los errores cometidos son menores que 0,4 para la primera aproximación y 0,04 para la segunda.

Ejercicio 15:

1. Hallar utilizando el polinomio de Taylor de cuarto orden una aproximación de $cos(1)$.
2. Estimar el error cometido.

Ejercicio 16:

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(\tan x - \operatorname{sen} x) - x^3}{x^5}.$$

Probar que $\tan x < x$ para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ y que $\tan x > x$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 17:

1. Demostrar que la función $f(x) = e^{-x} - x$ corta al eje de las abscisas en un único punto, $x_0 \in (0,1)$.
2. Siendo x_0 el punto del apartado anterior. Hallar
$$\lim_{x \to x_0} \frac{x_0 - e^{-x}}{x_0 - x}$$

3. Demostrar las siguientes desigualdades
   a) $e^{-e^{-x}} < x$ si $x > x_0$.
   b) $|1 - e^{-z}| \leq |z|$.

Ejercicio 18:
Hacer la gráfica de las siguientes funciones:

i) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

ii) $f(x) = \frac{x}{ln(x)}$

iii) $f(x) = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$

iv) $f(x) = x^3 cos(x)$

v) $f(x) = (x^3(x-2)^2)^{\frac{1}{3}}$

vi) $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2-1}$

vii) $f(x) = \begin{cases} |3x-1|, & x > 0, \\ x^2 + 3x + 1, & x \leq 0. \end{cases}$

viii) $f(x) = x^2\, e^{\frac{1}{x}}$