Matemáticas I

HOJA 4

Ejercicio 1:
Demostrar que

$$|\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}\,dx| \leq ln2.$$

Ejercicio 2:
Demostrar que dados $a, b > 0$, existe $c \in (a, b)$ talque

$$\int_a^b x^3 ln(1+x^2)\,dx = \frac{1}{4}(b^4 - a^4) ln(1+c^2).$$

Ejercicio 3:

Estudiar la derivabilidad de la función $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$, siendo

$$f(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } t < 1, \\ t^2 & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ ln(t) & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

Ejercicio 4:
Si la función $f(x)$ viene definida de forma implícita mediante la ecuación:

$$x = \int_1^{f(x)} \frac{e^t}{t}\,dt$$

calcula $f'(x)$, en términos de $f(x)$, y $(f^{-1})'(x)$.

Ejercicio 5:
Calcular la derivada de las siguientes funciones

a) $F(x) = \int_0^{x^2} \cos(t^2)\,dt,$

d) $H(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2}\, dt.$

Ejercicio 6:

Calcular el área de la figura limitada por: la rama derecha de la parábola $y = x^2$,la rama izquierda de la parabola $y = (x-2)^2$, y $y = 4$.

Ejercicio 7:

Hallar las siguientes integrales indefinidas

a) $\int e^{2x} \sin(x)\, dx.$

b) $\int x^4 ln(x^2)\, dx.$

c) $\int \frac{x^2}{4+x^6}\, dx.$

Ejercicio 8:

Sea f una función definida por $f(x) = \frac{-3x^3 - x}{(x^2+1)^2}$.

a) Descomponer f en la forma $\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$.

b) Calcular $\int f(x)\, dx.$

Ejercicio 9:

a) Demostrar que $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$.

(Sugerencia: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ y $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$).

b) Sea $u = \tan(\frac{x}{2})$, demostrar que

$$\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \text{ y } dx = \frac{2}{1+u^2}du.$$

c) Usando el cambio de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$, calcular

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)-\cos(x)}\, dx \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{-4\sin(x)+3\cos(x)}\, dx.$$

Ejercicio 10: Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx,$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx,$

e) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx,$

f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx.$

Ejercicio 11: La función $\Gamma(n)$ de define como

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx, \quad n \in I\!N.$$

a) Hallar $\Gamma(1), \Gamma(2)$ y $\Gamma(3)$.
b) Integrando por partes, demostrar que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
c) Expresar $\Gamma(n)$ en términos de factoriales.

Ejercicio 12: Sea

$$I_n = \int_0^1 x^m(\log(x))^n \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

1. Probar por inducción en n que
$$\lim_{x\to 0} x^m(\log(x))^n = 0$$
2. Probar que $I_n = -\frac{n}{m+1}I_{n-1}$.
3. Probar que $I_n = (-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}I_0$.
4. Calcular
$$\int_0^1 x^m(\log(x))^n.$$

Ejercicio 13: Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una función definida como

$$f(x) = \int_a^x \frac{b}{t(t^2+3)\,dt} \quad \text{donde } a > 0.$$

1. Encontrar a y b tales que, la recta $y = x-1$ sea tangente a f en 1.
2. Hallar
$$\lim_{x\to\infty} f(x).$$

Ejercicio 14:

a) Calcular la siguiente integral

$$\int^1$$

Ejercicio 15: Hallar el polinomio de Taylor de orden dos en el cero de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{sen(t)}{t}\, dt & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 16: Hallar r para que el área bajo la curva descrita por la gráfica de la función $1/x^r$, en el intervalo $[1, \infty)$, sea menor que el área bajo la curva descrita por la gráfica de la función e^{-x}, en el mismo intervalo.

Ejercicio 17: Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. La suma inferior de f asociada a la partición P se define como

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \quad \text{donde} \quad m_i = inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

Se sabe además que si una función es integrable entonces la suma inferior converge al valor de la integral. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Justificar que $f(x)$ es integrable en $[0, 1]$ y utilizarlo, junto con la definición de suma inferior en una partición uniforme, para calcular el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \right)$$

Ejercicio 18: Sea la función $y = f(x)$ definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2\, t^{1/2}(t+1)}$.
Hallar el área comprendida entre la función $f(x)$ y las rectas $y = \pi/2$, $x = 0$ y $x = 1$. Decidir también si es finita o infinita el área del primer cuadrante comprendida entre $f(x)$ y la recta $y = \pi/2$.

Ejercicio 19: Clasificar y calcular la siguiente integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\, dx.$$