1. Ecuaciones lineales

Ecuaciones de primer orden

1.– Encontrar la solución de los siguientes problemas de valor inicial

1. $\dot{x} = 5x, \quad x(0) = 2.$
2. $\dot{x} + x = 0, \quad x(2) = 1.$
3. $\dot{x} + x = te^{-t}, \quad x(0) = 3.$
4. $\dot{x} + 2x = b(t), \quad x(0) = 4$; siendo $b(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ -1 & \text{si } t > 3. \end{cases}$
5. $\dot{x} + x = b(t), \quad x(0) = 1$; siendo $b(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$

2.– Encontrar la solución de los siguientes problemas de valor inicial.

1. $\dot{z} + 2iz = 0, \quad z(0) = 1 + i.$
2. $\dot{z} + (1 - i)z = t, \quad z(0) = i.$

3.– Sea a un número real positivo. Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} + ax = 0,$$

tiende a cero cuando t tiende a ∞. Enunciar y demostrar un resultado análogo para ecuaciones con coeficientes complejos.

4.– Sea $b\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función acotada y a un número real. Demostrar que el crecimiento de cualquier solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} + ax = b(t),$$

es, a lo sumo, exponencial.

5.– Sea a un número real positivo y sea $b\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que existe el límite

$$\lim_{t \to +\infty} b(t) = \beta.$$

Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} + ax = b(t),$$

tiene límite cuando t tiende a ∞ y dicho límite es β/a.

Ecuaciones de segundo orden

6.– Hallar la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor

2. $\ddot{y} - y = 0$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$.
3. $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$.
4. $\ddot{y} + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$.
5. $\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 0$, $y(0) = -1$, $\dot{y}(0) = 1$.
6. $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 2$.
7. $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$.

7.– Hallar la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\ddot{y} + 3y = t^3 - 1$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.
2. $\ddot{y} - y = t^2 e^t$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$.
3. $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = e^{-t}$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$.
4. $\ddot{y} + 4y = t \operatorname{sen} 2t$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$.
5. $\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 2\cos^2 t$, $y(0) = -1$, $\dot{y}(0) = 1$.
6. $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = \operatorname{sen} t + te^{2t}$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 2$.
7. $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^t + e^{2t}$, $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$.

8.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4y = f(t) \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0, \end{cases}$$

siendo f la función $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t. \end{cases}$

9.– Sean α, β números reales positivos. Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = 0,$$

tiende a cero cuando t tiende a ∞. Probar que si α o β son negativos, entonces existe al menos una solución no acotada en $\mathbb{R}^+$.

10.– Sean B, C números reales, con $(B, C) \neq (0, 0)$. Demostrar que existen $A, \varphi \in \mathbb{R}$, con $A > 0$, tales que

$$B\cos\omega t + C\operatorname{sen}\omega t = A\cos(\omega t + \varphi),$$

indicando la relación entre (B, C) y (A, φ). Igualmente probar que si $D \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces existen $A, \varphi \in \mathbb{R}$, con $A > 0$, tales que

$$D\mathrm{e}^{(a+i\omega)t} + \bar{D}\mathrm{e}^{(a-i\omega)t} = A\mathrm{e}^{at}\cos(\omega t + \varphi).$$