6. Transformada de Laplace

45.– A partir de la definición, encontrar la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

1. $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$
2. $f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$
3. $f(t) = e^{t+7}$
4. $f(t) = te^{4t}$
5. $f(t) = t\cos t$
6. $f(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$.

46.– Demostrar que la función $f(t) = \mathrm{e}^{t^2}$ no tiene transformada de Laplace.

47.– Usar las propiedades de la transformada de Laplace para encontrar la transformada de las siguientes funciones

1. $f(t) = 2t^4$
2. $f(t) = 4t - 10$
3. $f(t) = t^2 + 6t - 3$
4. $f(t) = (t+1)^3$
5. $f(t) = 1 + e^{4t}$
6. $f(t) = (1 + e^{2t})^2$
7. $f(t) = 4t^2 - 5\operatorname{sen} 3t$
8. $f(t) = e^t \operatorname{senh} t$
9. $f(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$
10. $f(t) = \cos t \cos 2t$
11. $f(t) = \operatorname{sen} t \cos 2t$
12. $f(t) = te^{10t}$
13. $f(t) = t^3 e^{-2t}$
14. $f(t) = e^t \operatorname{sen} 3t$
15. $f(t) = e^{5t} \operatorname{senh} 3t$
16. $f(t) = t(e^t + e^{2t})^2$
17. $f(t) = e^{-t}\operatorname{sen}^2 t$
18. $f(t) = (t-1)H(t-1)$
19. $f(t) = tH(t-2)$
20. $f(t) = t\cos 2t$
21. $f(t) = t^2 \operatorname{senh} t$
22. $f(t) = te^{2t}\operatorname{sen} 6t$
23. $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$

24. $f(t) = \cos^2 t$
25. $f(t) = \operatorname{senh}^2 t$
26. $f(t) = \cosh^2 t$.

48.– Demostrar las reglas de transformación de la tabla de transformadas de Laplace.

49.– Hallar las inversas de las transformadas que se dan a continuación:

1. $F(s) = \dfrac{1}{s^3}$
2. $F(s) = \dfrac{(s+1)^3}{s^4}$
3. $F(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s-2}$
4. $F(s) = \dfrac{1}{4s+1}$
5. $F(s) = \dfrac{4s}{4s^2+1}$
6. $F(s) = \dfrac{1}{s^2-16}$
7. $F(s) = \dfrac{2s-6}{s^2+9}$
8. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+3s}$
9. $F(s) = \dfrac{s}{s^2+2s-3}$
10. $F(s) = \dfrac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}$
11. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+4)}$
12. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2-4)(s+2)}$
13. $F(s) = \dfrac{1}{(s+2)^3}$
14. $F(s) = \dfrac{1}{s^2-6s+10}$
15. $F(s) = \dfrac{s}{s^2+4s+5}$
16. $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2}$
17. $F(s) = \dfrac{2s-1}{s^2(s+1)^3}$
18. $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^3}$

19. $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$
20. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}$
21. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$
22. $F(s) = \ln \dfrac{s-3}{s+1}$
23. $F(s) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan \dfrac{s}{2}$
24. $F(s) = \dfrac{3s^2-16s+5}{(s+1)(s-3)(s-2)}$
25. $F(s) = \dfrac{3s^2+5s+3}{s^3(s+1)}$.

50.– Escribir cada función en términos de funciones escalón unitarias y hallar su transformada de Laplace

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ t^2 & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$
2. $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{si } t \ge 2 \end{cases}$
3. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < t < b \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

51.– Calcular la transformada de Laplace de las funciones:

1. $f(t) = \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau$
2. $f(t) = \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau$
3. $f(t) = t \int_0^t \operatorname{sen} \tau d\tau$
4. $f(t) = (1) * (t^3)$
5. $f(t) = (t^2) * (t^4)$
6. $f(t) = (e^{-t}) * (e^t \cos t)$.

52.– Utilizar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\dot{y} + 4y = e^{4t}, \quad y(0) = 2$
2. $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = t^3 e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$
3. $\ddot{y} + y = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -1$
4. $\ddot{y} - \dot{y} = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$
5. $2\dddot{y} + 3\ddot{y} - 3\dot{y} - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \ddot{y}(0) = 1$

6. $\ddot{y} + 4y = H(t-2\pi)\operatorname{sen} t, \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$
7. $\dot{y} + y = f(t) \quad y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 5 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

8. $\ddot{y} + y = f(t), \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$ donde

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 1 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t \geq 2\pi. \end{cases}$$

53.– Utilizando la transformada de Laplace, hallar la solución de los problemas del capítulo 1.

54.– Resolver los problemas de valor inicial del capítulo 2 utilizando el método de la transformada de Laplace.