

14. REGULARIDAD DE LA SOLUCIÓN

135.— Hallar la solución general maximal de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x^2 - y \\ \dot{z} = x^2 - z. \end{cases}$$

136.— Hallar la solución general maximal de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y + \frac{1}{x}. \end{cases}$$

137.— Para las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 135 y 136 calcular las derivadas parciales con respecto a los datos iniciales de la solución general hallada. Por otro lado, plantear y resolver la ecuación variacional para hallar, de nuevo, dichas derivadas parciales por medio de la ecuación variacional.

138.— El problema de valor inicial $\dot{x} = (x - 1)(t + x^2)$ con $x(0) = 1$ tiene por solución $x(t) = 1$. Hallar el valor de las derivadas parciales de la solución general con respecto a las condiciones y al tiempo iniciales en $t_0 = 0$, $x_0 = 1$.

139.— Comprobar que el problema de valor inicial dado por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + (t - x)y \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

y las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ tiene solución $(x(t), y(t)) = (t, 0)$. Hallar la linealización de dicha ecuación diferencial a lo largo de esta solución. Hallar la derivada parcial en el punto $(t_0 = 0, x_0 = 0, y_0 = 0)$ de la solución general con respecto al tiempo inicial y también con respecto a las condiciones iniciales.

140.— Sea $\dot{x} = f(t, x)$ una ecuación diferencial, con $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 en el abierto $\mathcal{D}$, y sea $\psi(t, \tau, x)$ la solución general maximal. Probar que la solución general maximal del problema de valor inicial definido en $\mathbb{R}^{2n}$ por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ \dot{w} = D_x f(t, x)w \\ x(t_0) = x_0 \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$$

es $(x(t), w(t)) = (\psi(t, t_0, x_0), D_x \psi(t, t_0, x_0)w_0)$.

Ayuda: tener en cuenta el problema 130, y la teoría ¡claro!

141.— Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales de orden k

$$y^{(k)} = g(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)})$$

donde g es una aplicación de clase C^1 . Probar que la solución general maximal $y(t, t_0, y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(k-1)})$, junto con sus derivadas parciales con respecto a t hasta orden k , son funciones diferenciables de clase C^1 . Hallar las ecuaciones diferenciales que satisfacen las derivadas parciales de dicha función con respecto a las condiciones iniciales $(y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(k-1)})$, probando que dichas ecuaciones también son ecuaciones diferenciales de orden k .

142.— Consideremos la ecuación diferencial $\dot{x} = \mu - x$ y sea $\psi(t, t_0, x_0, \mu)$ el valor en t de la solución de dicha ecuación que pasa por (t_0, x_0) . Calcular las derivadas parciales de ψ . Resolver la ecuación diferencial y calcular de nuevo dichas derivadas.

143.— Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden $\ddot{y} + \mu y = 0$. Para $\mu > 0$, la ecuación describe un oscilador armónico de frecuencia $\sqrt{\mu}$; para $\mu < 0$ la ecuación describe el movimiento de una partícula en un lanzador centrífugo que gira con velocidad angular $\sqrt{-\mu}$; para $\mu = 0$ la ecuación describe el movimiento de una partícula libre. Utilizando la teoría estudiada en clase, analizar la diferenciabilidad de las soluciones con respecto al parámetro μ . Además, para simplificar, fijemos las condiciones iniciales $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$. Hallar la solución explícitamente y volver a analizar la diferenciabilidad de la solución a partir de la expresión encontrada.

144.— Comprobar que el problema de valor inicial dado por las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = -y + \mu x(1 - x^2 - y^2) \quad \dot{y} = x + \mu y(1 - x^2 - y^2)$$

y las condiciones iniciales $x(0) = 1, y(0) = 0$ tiene solución $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$. Hallar la linealización de dicha ecuación diferencial a lo largo de esta solución y resolverla (probar con términos de la forma $e^{at} \sin t$ y $e^{at} \cos t$). Hallar la derivada parcial de la solución general con respecto a μ en $\mu = 0$ (y con $t_0 = 0, x_0 = 1$ e $y_0 = 0$).

145.— Consideremos una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$, con f de clase C^1 en un cierto abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $\gamma(t)$ la solución que satisface $x(0) = x_0$. Probar que la derivada de la solución general con respecto a

t_0 es $\frac{\partial \psi}{\partial t_0}(t, 0, x_0) = -f(\gamma(t))$. Deducir de este hecho que $w(t) = f(\gamma(t))$ es una solución de la ecuación variacional a lo largo de $\gamma(t)$.

Ayuda: la solución de la ecuación diferencial con $x(t_0) = x_0$ es $\gamma(t - t_0)$.

- 146.**— Probar que para todo $\mu \geq 0$ la solución $y = \gamma(t, \mu)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} + \mu \dot{y} + y^3 = 0 \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

está definida en el intervalo $[0, \infty)$ y $\lim_{\mu \rightarrow 0} y(t, \mu) = y(t, 0)$ para todo $t \geq 0$.

Ayuda: Considerar la función $E = \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{4}y^4$.

- 147.**— Comprobar que para todo $\mu > 0$ la solución $x = \gamma(t, \mu)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mu \dot{x} = -x^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

está definida en el intervalo $[0, \infty)$ pero $\lim_{\mu \rightarrow 0} \gamma(t, \mu)$ no es solución del problema anterior para $\mu = 0$.

- 148.**— Para cada $\mu \in \mathbb{R}$ consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + \mu)x - \mu x^2 - 1 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

y sea $x(t, \mu)$ su solución.

1. Demostrar que para $0 \leq \mu \leq 1/2$, la solución $x(t, \mu)$ está definida en $\mathbb{R}$.
2. Probar que para todo $T > 0$ existe $\mu_0 < 0$ tal que si $\mu_0 < \mu < 0$ entonces $x(t, \mu)$ está definida en el intervalo $[0, T]$.
3. Calcular $\frac{\partial x}{\partial \mu}(t, 0)$.