Universidad San Pablo - CEU

Fundamentos Matemáticos de Ingeniería Biomédica 3

Ejercicios

Profesor:
Rodrigo García Carmona

Versión 1.32

CEU Universidad San Pablo

Temas 1 y 2: Lógica y Demostraciones

Ejercicio 1

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1:

$$(\exists a \in A, \forall b \in B, P(a,b)) \implies (\forall b \in B, \exists a \in A, P(a,b))$$

Vamos a darle significado a los diferentes conjuntos y elementos del teorema:

$$A = \{ \text{ estudiantes de FM3 } \}$$
$$B = \{ \text{ clases de FM3 } \}$$
$$P(a,b) = \text{"estudiante } a \text{ se duerme durante la clase } b\text{"}$$

El siguiente teorema es similar al anterior:

Teorema 2:

$$(\forall b \in B, \exists a \in A, P(a,b)) \implies (\exists a \in A, \forall b \in B, P(a,b))$$

Preguntas:

1. ¿Cómo se podría escribir en lenguaje natural el lado a la izquierda de la implicación del teorema 1?
2. ¿Cómo se podría escribir en lenguaje natural el lado a la derecha de la implicación del teorema 1?
3. Averigüe si el teorema 1 es cierto o no, y demuéstrelo.
4. Averigüe si el teorema 2 es cierto o no, y demuéstrelo.

Ejercicio 2

Una pequeña sociedad secreta dentro de la EPS tiene aviesas intenciones: hacer que el examen final de FM3 sea *obscenamente difícil*, con enunciados del estilo *"Demuestre que un conjunto de axiomas no puede ser a la vez consistente y completo."* o *"Demuestre el último teorema de Fermat."* La única forma de acabar con sus malvados planes es determinar con exactitud quién forma parte de dicha sociedad secreta. Tras intensas investigaciones se ha conseguido reducir el grupo de profesores de la EPS sospechosos a tan solo nueve personas:

$$\{Abraham, Ana, Carlos, Gabriel, Gianluca, Teo, Mariano, Rodrigo, Victor\}$$

La sociedad secreta es un subconjunto de estos nueve. Se ha encontrado una lista con los participantes en el complot, pero está cifrada utilizando notación lógica, para evitar que los descubran (pues saben que los alumnos de FM3 no

1. $\exists x, \exists y, \exists z, (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge miembro(x) \wedge miembro(y) \wedge miembro(z))$

2. $\neg(miembro(Ana) \wedge miembro(Gianluca))$

3. $(miembro(Mariano) \vee miembro(Gabriel)) \implies \forall x, miembro(x)$

4. $miembro(Ana) \implies miembro(Gianluca)$

5. $miembro(Carlos) \implies miembro(Mariano)$

6. $(miembro(Abraham) \vee miembro(Teo)) \implies \neg miembro(Victor)$

7. $(miembro(Abraham) \vee miembro(Gianluca)) \implies \neg miembro(Rodrigo)$

Ejercicio 3

Traduzca las siguientes frases del español a lenguaje de lógica de predicados. El dominio sobre el que se trabaja es X, el conjunto de todas las personas. Puede utilizar las siguientes funciones:

- $F(x)$: indica que x ha sido estudiante de FM3.
- $S(x)$: indica que x ha sacado sobresaliente en FM3.
- $J(x)$: indica que x le ha regalado un jamón a Rodrigo.
- $E(x, y)$: indica que x e y son la misma persona.

Las frases a traducir son las que siguen:

1. Hay gente que ha sido estudiante de FM3 y ha sacado sobresaliente en FM3.
2. Todos los que han cursado FM3 y le han regalado un jamón a Rodrigo han sacado sobresaliente en FM3.
3. No hay nadie que le haya regalado un jamón a Rodrigo y que no haya sacado sobresaliente en FM3.
4. Hay al menos tres personas que le han regalado un jamón a Rodrigo y no han cursado FM3.

Ejercicio 4

Use una tabla de verdad para demostrar si las siguientes proposicones son o no ciertas:

1. $\neg(P \vee (Q \wedge R)) = (\neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$

Ejercicio 5

Los conectores binarios $\wedge$ (*and*), $\vee$ (*or*) y $\implies$ (*implies*) aparecen multitud de veces en expresiones lógicas. Sin embargo, a la hora de diseñar chips y circuitos electronicos, suele ser mucho más económico construir la lógica del sistema utilizando únicamente otra operación: ***nand***, ya que ésta es más sencilla de representar en un circuito. Aquí tienes la tabla de verdad para la operación *nand*:

P	Q	P nand Q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Vamos a trabajar con esta operación lógica. Para cada una de las expresiones que siguen, encuentre una expresión equivalente usando únicamente *nand* y $\neg$ (*not*), así como cualesquiera paréntesis crea necesarios para especificar el orden en el que se aplican las operaciones. Puedes utilizar A, B y los operadores tantas veces como desee:

1. $A \wedge B$
2. $A \vee B$
3. $A \implies B$

Por otra parte, como es posible expresar cualquier expresión lógica usando únicamente *nand* (sin necesidad de usar $\neg$), encuentre una expresión equivalente a $(\neg A)$ utilizando sólo *nand* y, de ser necesario, paréntesis.

Es más, incluso las constantes T y F pueden ser expresadas únicamente recurriendo a *nand*. Construya una expresión gracias a la cual, a partir de una proposición arbitraria A y uno o más *nand*, dé como resultado siempre T, cualesquiera valores tome A. Construya también otra expresión que a partir de A y uno o más *nand*, dé como resultado siempre F, cualesquiera valores tome A.

Ejercicio 6

Dado un $x \in \mathbb{Z}$, demuestre que si $x^3 + x^2 + x$ es impar $\implies$ x es impar. ¿Qué tipo de demostración ha utilizado?

Ejercicio 7

Considere las siguientes proposiciones:

1. P y Q son equivalentes.
2. $P \implies Q$
3. $Q \implies P$
4. Ninguna de las anteriores.

Dibuje una o más tablas de verdad para ilustrar su razonamiento. Puede utilizar tantas columnas como crea conveniente.

- Si aseguramos que A va a ser siempre 1, ¿cuál es la nueva relación entre P y Q?
- ¿Y si aseguramos que B va a ser siempre 1?
- ¿Y si aseguramos que C va a ser siempre 1?

Ejercicio 8

Dados los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
Stark &= \{Rob, Sansa, Arya, Bran, Rickon\} \\
Lannister &= \{Jaime, Cersei, Tyrion, Joffrey\} \\
Baratheon &= \{Robert, Stannis, Joffrey\} \\
Targaryen &= \{Daenerys\} \\
Casas &= \{Stark, Lannister, Baratheon, Targaryen\}
\end{aligned}$$

1. ¿Son $Stark$, $Lannister$ y $Casas$ mutuamente disjuntos?
2. ¿Son $Lannister$, $Baratheon$ y $Targaryen$ mutuamente disjuntos?
3. ¿Cuál es la cardinalidad de $Casas$?
4. ¿Cuál es el conjunto potencia de $Targaryen$?
5. Escriba el conjunto $Fanfic$, definido como $Baratheon \times Targaryen$.

Tema 3: Inducción

Ejercicio 1

Considere la siguiente función:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Recurra a la inducción para demostrar que la fórmula es correcta $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

Ejercicio 2

Considere la siguiente función, una serie geométrica:

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Recurra a la inducción para demostrar que la fórmula es correcta $\forall r \in \mathbb{R}$ con $r \neq 1$.

Ejercicio 3

Use la inducción para demostrar que, para todo entero positivo n, $6^n - 1$ es divisible por 5.

Ejercicio 4

Como parte de un nuevo *reality show*, un grupo de concursantes son abandonados en una isla remota. Los concursantes han estado de acuerdo en, antes de que empiece la emisión del programa, tatuarse en medio de la frente un pequeño dibujo en forma de ojo, de color rojo o morado. Ninguno de los concursantes sabe el color de su tercer ojo, ni cuántos ojos morados y rojos hay en total. En la isla no hay ningún espejo, y se prohíbe a los concursantes hablar sobre los tatuajes. Por tanto, todo el mundo sabe el color del tatuaje de todos los demás, pero no del suyo propio.

El primer día del concurso, para sorpresa de los ilusionados concursantes, el presentador se presenta ante ellos y les dice, con voz grave y misteriosa:

Contáis con provisiones para sobrevivir tantos días como personas sois.
No recibiréis más.
Al menos uno de vosotros posee un ojo púrpura.
Debéis obedecer las siguientes reglas:
1.- Los tatuados con un ojo púrpura sólo podrán abandonar la isla cuando puedan demostrar que ése es el color de su ojo.

imposible. Las tensiones internas deberían crear multitud de dramas personales y, en consecuencia, disparar los índices de audiencia.

Sin embargo, los creadores del programa no contaban con que todos los concursantes han cursado FM3 y son, por consiguiente, unos maestros en el uso de la lógica. Así que lo que al final sucede es que los concursantes pasan los días en alegre convivencia, hasta que un día (antes de que se acaben las provisiones), todos los que poseen un ojo púrpura demuestran esta circunstancia y abandonan la isla a la vez, terminando con el concurso.

Podemos representar esta situación con el siguiente teorema:

Teorema: Todos los concursantes con un ojo púrpura tatuado abandonan la isla el día p, dónde p es el número de concursantes con un ojo púrpura. $p \geq 1$

Demuestre, utilizando la inducción, que este teorema es cierto, al igual que hicieron los concursantes para salvar su vida. Como pista, sugerimos una hipótesis $P(n)$ que verifique que todos los siguientes casos son ciertos para el día n:

1. Si $p > n$, entonces ____
2. Si $p = n$, entonces ____
3. Si $p < n$, entonces ____

Para poder llevar a cabo la demostración deberá rellenar los espacios en blanco.

Ejercicio 5

Use la inducción para demostrar que, para todo entero positivo n:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Ejercicio 6

Use la inducción para demostrar que, para todo entero $n \geq 3$, $n^2 - 7n + 12$ no es negativo.

Ejercicio 7

Use la inducción para demostrar que, para todo entero no negativo n, tal que $n \neq 2$ y $n \neq 3$, se cumple que $n^2 \leq n!$ es cierto.

Ejercicio 8

Cuentan las leyendas que, perdido en medio de un valle secreto en el Tíel Templo de la Eternidad, sino que también se deben superar las pruebas que se encuentran en su interior.

Cada vez que un monje entra en el Templo de la Eternidad se le entrega un cuenco con 15 cuentas rojas y 12 cuentas verdes. Los monjes deben entonces meditar frente al impresionante Gong del Tiempo y, cada vez que este taña, decidir entre hacer una de las siguientes dos cosas:

- **Intercambiar:** Si un monje tiene al menos 3 cuentas rojas, podrá cambiar 3 cuentas rojas por 2 cuentas verdes.
- **Permutar:** Un monje puede cambiar todas sus cuentas rojas por verdes y todas sus cuentas verdes por rojas. Es decir, que si tiene i cuentas rojas y j cuentas verdes, tras acabar de permutar tendrá j cuentas rojas e i cuentas verdes.

Un monje sólo podrá abandonar el Templo de la Eternidad cuando tenga exactamente 5 cuentas rojas y 5 cuentas verdes en su cuenco. Momento en que, suponemos, habrá alcanzado la iluminación. Represente la situación descrita mediante una máquina de estados, y más concretamente:

1. Indique cómo se pueden representar los estados de dicha máquina de estados.
2. Use la notación que ha desarrollado para representar las transiciones posibles.
3. Dibuje un diagrama que represente los primeros 3 o 4 niveles de esta máquina de estados. No olvide indicar de qué tipo es cada transición.

Pero, ¡oh desgracia! La prueba a la que someten a los monjes en el Templo de la Eternidad no tiene solución, ya que el estado pedido (5 cuentas rojas y 5 verdes) viola un invariante de la máquina de estados presentada. Por tanto, deberá demostrar, utilizando la inducción, que se cumple el siguiente teorema.

Teorema 1: *Nadie abandona jamás el Templo de la Eternidad.*

Para demostrarlo, busque un invariante que se cumpla en el estado inicial y se mantenga tras cada transición, pero que no cumpla el estado que permite a los monjes salir del templo.

Aprovechando que estamos analizando la máquina de estados que representa el Templo de la Eternidad, demuestre también que se cumple el siguiente teorema:

Teorema 2: *El número de estados alcanzable en la máquina de estados del Templo de la Eternidad es finito.*

Para lograrlo, encuentre un invariante que sugiera un límite superior a la

Esto no es algo tan terrible como podría parecer, ya que esta súbita revelación hace que unos cuantos monjes alcancen la iluminación, su objetivo inicial cuando entraron en el templo. Sin embargo, para el resto las tribulaciones soportadas aún no son suficientes, y el conocimiento recién adquirido no hace sino minar su voluntad. Simplemente se deprimen. Dándose cuenta de esto, el abad del templo decide presentarse ante ellos y proponerles lo siguiente:

Si algún monje consigue visitar los 108 estados[1] *únicos en los que puede encontrarse su cuenco, entonces podrá abandonar el Templo de la Eternidad.*

¿Tienen los monjes alguna oportunidad de abandonar el Templo de la Eternidad? La respuesta, desafortunadamente, es que no. Demuestre el siguiente teorema, buscando una contradicción:

Teorema 3: *No es posible visitar 108 estados distintos en la máquina de estados del Templo de la Eternidad.*

¿Cuál es el máximo número de estados que se pueden alcanzar? ¿Cómo?

Ejercicio 9

Probablemente uno de los tipos de robots más populares ahora mismo en el mercado sean los robots-aspiradora. Su cometido es, como se puede deducir a partir del nombre, aspirar el polvo del suelo de una casa. Para este problema consideraremos uno de los primeros prototipos de este robot, para el cual se han programado una serie de movimientos que deberían permitirle cubrir todo el suelo de una habitación.

Desde el punto de vista del robot, la habitación es una rejilla bidimensional, siendo la posición inicial del robot $(0, 0)$, dónde el primer valor representa la coordenada x y el segundo la y. A partir de esta posición inicial, el robot puede moverse en cualquiera de las cuatro diagonales. Es decir, que puede aumentar o reducir su x en 1 y aumentar o reducir su y en 1. Es decir, que el robot no puede moverse simplemente a la derecha, izquierda, arriba o abajo, sino que tendrá que hacerlo en diagonal.

Demuestre, utilizando inducción, que éste es un mal programa para el robot, pues nunca podrá alcanzar la posición $(1, 0)$.

Ejercicio 10

Demuestre que, para todo entero positivo n:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = 1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

[1] 108 es el número místico que representa la totalidad de la existencia, pues sus dígitos son 1, que representa una cosa; 0, que representa la nada; y 8, que representa la eternidad (el infinito). 108 fueron también las preguntas que hizo Buda, y además 108 = 42 + 24 + 42

Ejercicio 11

Guybrush Threepwood, Barbarrosa y Barbacoa son los tres piratas más temidos de todo el Caribe. Su base de operaciones es la isla Mêlée^{TM}. Desde ella parten a bordo de su navío que, con diez cañones por banda, viento en popa a toda vela, no corta el mar, sino vuela. Es un bajel que llaman por su bravura el "Temido", en todo el mar conocido del uno al otro confín.

Como repartir los tesoros saqueados siempre es problemático, y cada bucanero tiene sus manías, estos tres piratas han llegado a un acuerdo: Guybrush insiste en que su parte del botín tiene que ser un múltiplo de 5 doblones, Barbarrosa exige que su parte debe ser múltiplo de 7 doblones, y Barbacoa no aceptará una parte que no sea un múltiplo de 9 doblones. Para los piratas la idea de no repartir **todo** el tesoro es inconcecible. Por tanto, si tuvieran la desgracia de saquear un tesoro que no pudiera repartirse entre los 3 respetando las reglas antes nombradas, acabarían matándose entre ellos para ver quién se queda con los doblones que sobran.

Por ejemplo, si saquearan un tesoso de 12 doblones, Guybrush se quedaría 5, Barbarrosa 7 y Barbacoa 0. Sin embargo, si el tesoro fuera de 13 doblones, no habría manera de repartírselo y los piratas se matarían los unos a los otros.

Demuestre, utilizando inducción fuerte, que los piratas pueden repartirse cualquier tesoro que tenga el menos 20 doblones.

Ejercicio 12

En un valle secreto, perdido en lo más profundo de una selva sin identificar en el sudeste asiático, se libra un terrible combate a muerte entre el clan ninja Hattori y un dragón de 4 cabezas (un primo de la Hidra de Lerna). El combate se desarrolla de la siguiente forma, paso a paso:

- Las cabezas del dragón son muy educadas, y siempre esperan a que el número de ninjas sea tal que se pueda repartir de forma equitativa entre las 4. Es decir, que sólo procederán a devorar ninjas cuando el número de éstos sea múltiplo de 4. Sin embargo, una de las cabezas es vegetariana, por lo que, cuando el dragón decida devorar a los ninjas, sólo 3 cabezas se comerán a los ninjas que les corresponden. Es decir, que una cuarta parte de los ninjas no serán devorados.

- Si hay un número par de ninjas pero las cabezas no se los comen (es decir, si no son un múltiplo de 4), entonces uno de los ninjas hará sonar un silbato y aparecerán dos ninjas más.

- Si hay un número impar de ninjas, éstos considerarán que ha llegado el momento de preparar el ataque final, así que llamarán a aún más compañeros. Cada ninja actualmente en combate lanzará una bengala hacia el cielo, y dos ninjas más acudirán por cada una de estas bengalas. Desgraciadamente, siempre que se llama a ninjas utilizando bengalas uno de

$$f(n) = \begin{cases} n/4 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ (n+2) & \text{si } n \text{ es par pero no divisible por } 4 \\ 3n-1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

El principio de conservación del Ninjutsu [2] dicta que los ninjas sólo podrán matar al dragón cuando quede un único ninja, que será capaz de cortar las 4 cabezas de un solo golpe (la única forma de matar al dragón, ya que las cabezas vuelven a crecer si queda alguna viva). Por lo tanto, si en algún momento queda sólo un ninja en combate, el dragón será exterminado.

Demuestre, utilizando inducción fuerte, que no importa cuántos ninjas comiencen a luchar contra el dragón, al final siempre quedará uno, que será quién derrote a la terrible criatura.

Ejercicio 13

La función de distancia de Hamming cumple una función muy importante en la detección de errores de transmisión de información. Sirve para calcular la "distancia" o diferencia entre dos secuencias de bits de igual longitud. La función de distancia de Hamming ($H(s,t) = n$) acepta a la entrada dos secuencias (s y t) de 0s y 1s de igual longitud, y produce a la salida un número (n) que indica cuántas posiciones difieren en las dos secuencias de entrada. Por ejemplo:

- $H(11111, 00000) = 5$
- $H(11001, 00000) = 3$
- $H(01101, 01001) = 1$

1. ¿Cuáles son el dominio y el codominio de la función de Hamming?
2. ¿Es esta función inyectiva y/o sobreyectiva?
3. ¿Puede existir la función inversa a la función distancia de Hamming? De ser así, defina dicha función inversa.

Tema 4: Teoría de números

Ejercicio 1

Encuentre el $mcd(10933, 832)$.

Ejercicio 2

Considere la siguiente ecuación:

$$13x = 60y + 1.$$

Utilizando el algoritmo del Pulverizador, encuentre la pareja de valores x e y solución de la ecuación con la x positiva más pequeña posible. La variable y puede ser negativa. Tanto x como y deben ser enteros.

Ejercicio 3

Calcule el residuo de $12^{43} \pmod{713}$.

Ejercicio 4

Recurriendo a la aritmética modular, demuestre que $100|(11^{10} - 1)$.

Ejercicio 5

Recurriendo a la aritmética modular, demuestre que $7|(2222^{5555} + 5555^{2222})$.

Ejercicio 6

Demuestre que $7^{11}|(3^{6\cdot 7^{10}} - 1)$.

Ejercicio 7

Tenemos una hoja de papel, y se nos permite cortarla en 7 trozos distintos. Podemos repetir este proceso tantas veces deseemos. Es decir, podemos cortar uno de los 7 trozos obtenidos en otros 7, y así sucesivamente. Demuestre, utilizando artimética modular, que no se pueden lograr dividir la hoja en 1997 trozos mediante este proceso.

Ejercicio 8

Considere la siguiente ecuación:

$$113x = 1 - 11y.$$

Utilizando el algoritmo del Pulverizador, encuentre la pareja de valores x e

Ejercicio 10

Encuentre el inverso multiplicativo de 13 más pequeño en módulo 56.

Ejercicio 11

Indique si la relación aCb, definida como "las personas a y b cumplen años el mismo día" es una relación de equivalencia, razonando por qué. En caso de que la respuesta a la pregunta anterior sea afirmativa, indique también el número de clases de equivalencia que posee dicha relación.

Temas 5, 6 y 7: Teoría de grafos

Ejercicio 1

Ha llegado el tan temido momento de planear su boda. Una de las partes más conflictivas y complejas de una boda (de hecho, se trata de un problema NP completo), consiste en decidir quién se sentará en cada mesa en el banquete. En contra de lo que se podría pensar, la dificultad de este problema no reside en el tamaño de las mesas, que puede ser tan grande como se desee, sino en las "incompatibilidades" que se producen entre varios comensales.

Tras pensarlo detenidamente, ha tomado papel y lápiz y ha elaborado la siguiente lista de incompatibilidades, de tal forma que debajo de cada uno de los invitados se muestra con quién **bajo ningún concepto** dicho invitado podrá compartir mesa. Por ejemplo, la "tía Juana" jamás se sentará con "tu ex" ni con "la Charito", pues de hacerlo las consecuencias serían terribles.

A continuación se muestra la tabla completa.

Tía Juana	**Mi ex**	**La Charito**	**El jefe**
Mi ex	Tía Juana	Tía Juana	Mi ex
La Charito	El jefe	Mamá	Mamá
	Mamá	La prima moderna	Ella

Mamá	**La prima moderna**	**"Ella"**	**El cuñado**
Mi ex	La Charito	El jefe	Mamá
La Charito	El cuñado	Mamá	La prima moderna
El jefe		El cuñado	"Ella"
"Ella"			
El cuñado			

Utilizando lo que ha aprendido de teoría de grafos, indiqué quién se sentará con quién para evitar conflictos y que la boda se desarrolle con éxito. Recurra el menor número de mesas posible, pues estamos en crisis y la empresa de cátering cobra por mesa en lugar de por cubierto.

Utilizando el algoritmo más sencillo existente, el presentado en clase. ¿Cuál será, en el caso peor, la cantidad máxima de mesas que tendrá que utilizar?

Ejercicio 2

Su empresa ha sido subcontratada por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, como parte de la enésima renovación del sistema educativo, para diseñar un sistema que permita asignar a alumnos a universidades. Puesto que se considera que la prueba de acceso a la universidad y la nota de corte son conceptos caducos, en su lugar se utilizarán varias listas de precedencias.

En el nuevo sistema se cuenta con N alumnos $a_1, a_2, \ldots, a_N$ y M universidades

De tal manera que todos los alumnos tendrán plaza en alguna universidad. Nadie podrá quedarse sin acceso a educación superior.

Cada alumno ha confeccionado una lista de preferencias por orden que contiene todas las universidades y cada universidad ha publicado una lista de preferencias por orden que contiene todos los alumnos. Los criterios utilizados para la confección de estas listas son, en el caso de los alumnos, sus deseos para el mañana (o el azar) y, en el caso de las universidades, desconocidos. En ambas listas no puede haber empates.

Su tarea será diseñar un algoritmo que asigne alumnos a universidades que cumpla con las siguientes propiedades.

1. Cada alumno es asignado a una universidad.
2. $\forall i, u_i$ tendrá asignados n_i alumnos.
3. No pueden existir dos parejas de alumnos y universidades $a_i - u_k$ y $a_j - u_l$ en las que a_j prefiera a u_k frente a u_l y que u_k prefiera a a_j frente a a_i.
4. El algoritmo es óptimo para los alumnos. Esto quiere decir que, entre todas las posibles asignaciones que cumplen con las 3 propiedades anteriores, el algoritmo elige aquella en la que el alumno acaba en la mejor universidad **posible** acorde a sus preferencias.

El algoritmo pedido debería consistir en una ligera modificación del algoritmo de cortejo que se ha visto en clase. Por facilidad de consulta, se incluye dicho algoritmo a continuación.

Algoritmo de cortejo

Condición inicial:

- N chicos.
- N chicas.
- Cada uno de los chicos tiene una lista de todas las chicas ordenada acorde a sus preferencias, y viceversa. No se permiten empates.

Cada día:

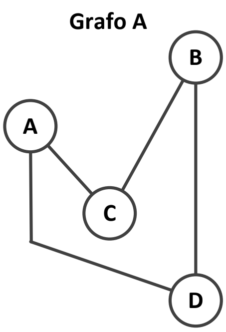
1. Cada chica espera en su balcón.
2. Cada chico va al balcón de la chica más alta en su lista que no esté tachada y se declara. Si no le quedan chicas sin tachar se va a casa a hacer deberes de matemáticas.
3. Cada chica le dice a su pretendiente favorito: "Quizá me case contigo, vuelve mañana." A los demás pretendientes les dice: "No vuelvas, nunca me casaré contigo."

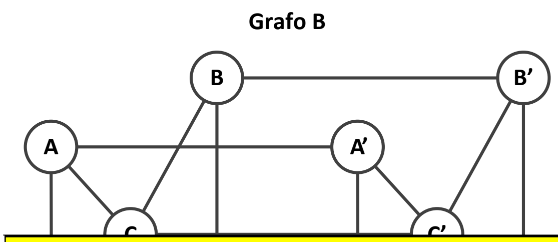
Una vez haya creado su algoritmo, demuestre sin lugar a dudas que es adecuado para las propiedades pedidas. Por tanto, debe:

- Demostrar que el algoritmo termina.
- Demostrar que cada alumno acaba asignado a una universidad.
- Demostrar que, para todo i, la universidad u_i acepta n_i alumnos.
- Demostrar que no pueden existir dos parejas de alumnos y universidades $a_i - u_k$ y $a_j - u_l$ en las que a_j prefiera a u_k frente a u_l y que u_k prefiera a a_j frente a a_i. Fíjese en que esto es equivalente al concepto de "pareja peligrosa" presentado en clase.
- Demostrar que el algoritmo es óptimo para los alumnos. Esto quiere decir que, entre todas las posibles asignaciones que cumplen con las propiedades anteriores, el algoritmo elige aquella en la que el alumno acaba en la mejor universidad **posible** acorde a sus preferencias. Para ello, pruebe a definir el concepto de "abanico de posibilidades" del alumno.

Ejercicio 3

Definimos el *doble* de un grafo como dos copias de dicho grafo con aristas adicionales uniendo los vértices correspondientes. La mejor forma de verlo es con un ejemplo. En la siguiente figura se puede ver un grafo A y su doble, el grafo B.





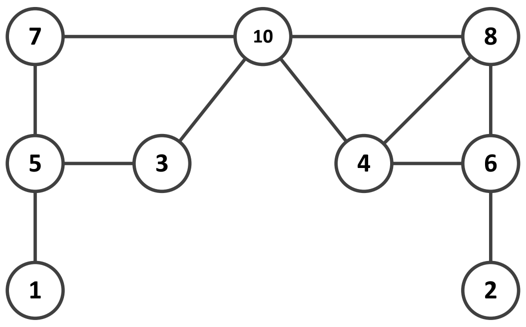
Responda a las siguientes preguntas.

1. ¿Es el grafo A bipartito? De serlo, díbujelo indicando claramente qué vértices corresponden a cada parte.

2. ¿Es el grafo B bipartito? De serlo, dibújelo indicando claramente qué vertices corresponden a cada parte.

Ejercicio 4

Observe el siguiente grafo, que representa una serie de edificios y unos puentes que los conectan.



Responda a las siguientes preguntas.

1. ¿Es el grafo bipartito? Justifique su respuesta.

2. ¿Tiene el grafo un circuito de Euler? Justifique su respuesta.

Ejercicio 5

A continuación se muestra la matriz de adyacencia de un grafo.

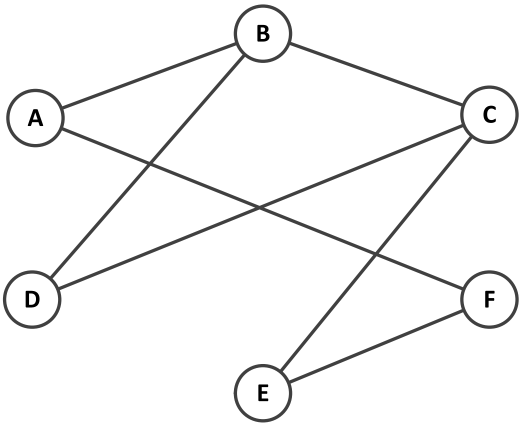
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dibuje el grafo correspondiente a la matriz ilustrada. Etiquete los vértices con los números del 1 al 6 de tal forma que el vértice i se corresponda a

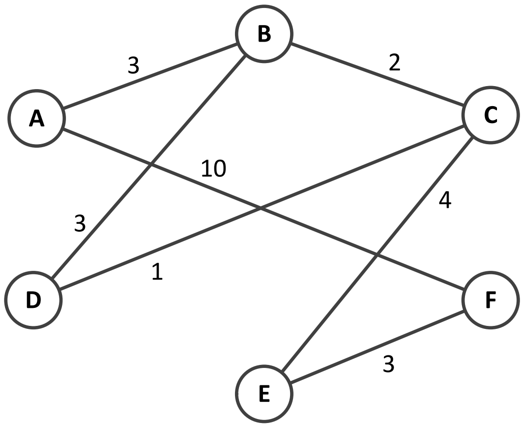
3. Encuentre en el grafo el ciclo de longitud más larga posible y explique por qué sabe que dicha longitud es máxima.

Ejercicio 6

Observe el grafo simple que se muestra a continuación.



1. ¿Cuál es el diámetro del grafo? Recuerde, de la definición del ejercicio anterior, que el diámetro es el más largo de los caminos más cortos entre todas las parejas de vértices del grafo.
2. Encuentre un ciclo Hamiltoniano en el grafo.
3. Coloree el grafo con la menor cantidad de colores posible e indique por qué es ésa cantidad.
4. ¿Tiene el grafo un ciclo Euleriano?
5. Ahora considere la siguiente versión del grafo, con pesos añadidos en sus aristas:



Usando el algoritmo que se presentó en clase indique qué aristas serían elegidas para formar un MST (*Minimum Spanning Tree*). Indique también el orden en que serían elegidas.

Ejercicio 7

A continuación se muestra la matriz de adyacencia de un grafo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dibuje el grafo correspondiente a la matriz ilustrada. Etiquete los vértices con los números del 1 al 5 de tal forma que el vértice i se corresponda a la fila y columnas i de la matriz.
2. ¿Es el grafo dibujado dirigido? Justifique su respuesta.
3. ¿Es el grafo dibujado conexo? ¿Y fuertemente conexo? ¿Por qué lo sabe?
4. ¿Es el grafo dibujado acíclico? Justifique su respuesta. Si la respuesta a la pregunta anterior es negativa, ¿contiene el grafo un ciclo Hamiltoniano?
5. ¿Es el grafo dibujado un grafo de torneo? En caso de que no lo sea, indique qué cambios habría que hacer en el grafo para que sí lo fuera.

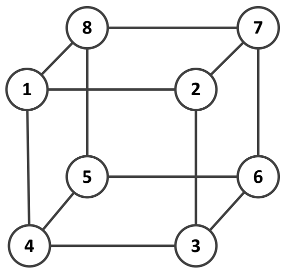
$$
\begin{array}{rr}
IB.C.001 \to IB.A.042 & IB.C.001 \to IB.C.002 \\
IB.C.001 \to IB.C.003 & IB.A.046 \to IB.A.840 \\
IB.B.001 \to IB.B.002 & IB.A.001 \to IB.A.034 \\
IB.A.042 \to IB.A.046 & IB.C.003, IB.B.002 \to IB.A.002 \\
IB.A.001, IB.A.002 \to IB.A.003 & IB.A.001, IB.A.002 \to IB.A.004 \\
IB.A.004 \to IB.A.033 & IB.A.033 \to IB.A.857
\end{array}
$$

Teniendo en cuenta las restricciones presentadas:

1. Dibuje un diagrama de Hasse para el *poset* correspondiente a las restricciones. Sea cuidadoso, ya que va a tener que usar este diagrama en los siguientes puntos.
2. Indique la cadena más larga.
3. Imagine que ha decidido convertirse en el mejor estudiante de Ingenieria Biomédica que habrá jamás y, para lograrlo, decide cursar todas las asignaturas que existen. Sabiendo que todas las asignaturas están disponibles tanto en el primer como en el segundo cuatrimestre. ¿Cuál es el número mínimo de cuatrimestres que tendrá que estar estudiando para conseguir su objetivo, sabiendo que en un cuatrimestre puede cursar tantas asignaturas como quiera? Asuma que es capaz de aprobar todas a la primera, que para eso va a convertirse en el mejor estudiante de Ingeniería Biomédica de la historia.
4. Indique la anticadena más larga.
5. ¿Cuántas asignaturas podrá cursar al mismo tiempo como máximo?
6. Identifique una ordenación topológica de las asignaturas.
7. Suponga que quiere cursar todas las asignaturas, pero que su apretada agenda sólo le permite cursar (¡y aprobar!) dos por cuatrimestre. ¿Cuántos años tardará en graduarse?
8. ¿Y si, haciendo un esfuerzo, puediera aprobar tres en cada cuatrimestre?

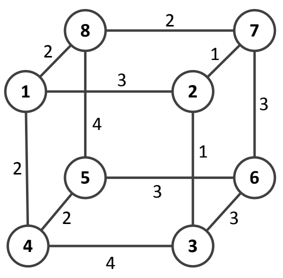
Ejercicio 9

Considere el siguiente dibujo de un grafo:



Responda a las siguientes preguntas, justificando su respuesta:

1. ¿Tiene el grafo un Ciclo Hamiltoniano?
2. ¿Tiene el grafo un Circuito de Euler?
3. ¿Es el grafo bipartito?
4. ¿Cuál es el número mínimo de colores con los que puede colorearse el grafo?
5. Dibuje el grafo para demostrar que es planar.
6. Dibuje la matriz de adyacencia del grafo.
7. Definimos la *distancia* entre dos vértices como la longitud del camino más corto entre ellos. Definimos el *diámetro* de un grafo como la distancia más larga en dicho grafo ¿Cuál es el diámetro de este grafo? Recurra a la matriz de adyacencia para calcularlo.
8. Asignamos los siguientes pesos a las aristas del grafo:



Ejercicio 10

Antes de que los ordenadores binarios se impusieran como el estándar en computación, se consideraron otras alternativas, una de las cuales fue el sistema ternario, en el cual la información se codifica en forma de *trits*, que pueden almacenar uno de los siguientes tres valores: 0, +1 y -1. El sistema ternario se mostró muy útil para realizar ciertas operaciones matemáticas, debido a que el cambio de signo era tan sencillo como cambiar todos los trits con un -1 por un +1, y viceversa. De esta forma, el manejo de enteros con signo no requería de una codificación especial, y además hacer una resta era tan sencillo como efectuar un cambio de signo y luego llevar a cabo una suma. Los defensores de este sistema argumentan que esta estructura hace los cálculos con un ordenador de este tipo muy intuitivos, además de presentar una tercera alternativa a la lógica tradicional de verdadero/falso, una especie de "quizás" que facilita en gran medida la representación de la lógica borrosa.

Por diversas razones, la más importante el menor precio de los componentes electrónicos binarios, los ordenadores ternarios no son más que un pie de página en los libros de historia. Pero, en su recuerdo, les dedicamos este problema.

Definimos el conjunto T como todos los estados posibles en los que se encuentra un trit: 0, +1 y -1.

Responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto T? ¿Y la del conjunto potencia de T? Definimos Y como el conjunto de todas las posibles secuencias de 8 trits, es decir, un tryte. ¿Cuál es la cardinalidad de Y? ¿Y la del conjunto potencia de Y?

2. ¿Cuántos valores distintos se pueden almacenar en un tryte? ¿Cuántos bits serían necesarios para almacenar al menos la misma información que un trit (tenga en cuenta que no puede usar fracciones de bit)? ¿Y para almacenar al menos la misma información que un tryte?

3. Deseamos diseñar un conversor que transforme un trit en un bit, para ello lo que hacemos es convertir un trit de valor 0 en un bit de valor 0, y un trit de valor +1 o -1 en un bit de valor 1. Si consideramos esta transformación como una función, ¿cuáles son su domino y su codominio? ¿Es esta función inyectiva? ¿Es sobreyectiva? ¿Es biyectiva? ¿Puede existir la función inversa a ésta?

4. Definimos la relación $\leq$ (menor o igual) para comparar trits, de tal manera que:

$$-1 \leq 0 \qquad\qquad 0 \not\leq -1$$
$$0 \leq +1 \qquad\qquad +1 \not\leq 0$$

La relación dada ($\leq$), ¿es antisimétrica? ¿Es reflexiva? ¿Es irreflexiva? ¿Es transitiva? ¿Es una relación de orden parcial?

Tema 8: Combinatoria

Ejercicio 1

En este problema utilizará lo que ha aprendido sobre combinatoria para meditar sobre la peculiar palabra inglesa $BOOKKEEPER$.

Responda a las siguientes preguntas:

1. ¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $POKE$?

2. ¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra BO_1O_2K? Fíjese en que hemos puesto un subíndice en las Os para indicar que las consideramos letras distintas.

3. Vamos a hacer un mapeo de las ordenaciones de las letras de BO_1O_2K a las ordenaciones de las letras de $BOOK$ (sin subíndices). Indique utilizando flechas este mapeo en los ejemplos que se encuentran a continuación. La columna de la izquierda contiene ordenaciones de BO_1O_2K y la de la derecha de $BOOK$.

O_2BO_1K	
KO_2BO_1	BOOK
O_1BO_2K	OBOK
KO_1BO_2	KOBO
BO_1O_2K	
BO_2O_1K	

4. ¿Qué clase de función de mapeo es ésta, atendiendo a la regla de la división? ¿Es una función biyectiva?

5. Usando la regla de la división, calcule de cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $BOOK$.

6. ¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $KE_1E_2PE_3R$?

7. Suponga que, de forma análoga a como hemos trabajado con $BOOK$, definimos un mapeo de las ordenaciones de las letras de $KE_1E_2PE_3R$ a las ordenaciones de las letras de $KEEPER$ (sin subíndices). Enumere

9. Sabiendo esto, ¿de cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $KEEPER$?
10. Por fin está preparado para enfrentarse a $BOOKKEEPER$. ¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $BO_1O_2K_1K_2E_1E_2PE_3R$?
11. ¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $BOOK_1K_2E_1E_2PE_3R$?
12. ¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $BOOKKE_1E_2PE_3R$?
13. ¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $BOOKKEEPER$?
14. ¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $VOODOODOLL$?

Ejercicio 2

Solucione los siguientes problemas utilizando el principio del palomar. Para cada problema identifique las *palomas*, los *palomares* y la *regla* o *mapeo* que asigna a cada paloma a su palomar.

1. Demuestre que si en una habitación hay 500 personas, entonces al menos 2 cumplen años el mismo día.
2. Sabiendo que en ingeniería en el CEU hay matriculados 115 alumnos y que los DNIs tienen 8 cifras, si sumamos los dígitos del DNI de cada alumno, ¿habrá dos con la misma suma?
3. En todos los conjuntos de 100 enteros tienen que existir al menos dos cuya diferencia sea un múltiplo de 37.

Ejercicio 3

Volvamos, como no podría ser de otra manera, a hablar de donuts. ¿Cuántas combinaciones de 12 donuts podemos elegir si tenemos a nuestra disposición 4 variedades distintas? Las variedades son "azucarado", "chocolate", "limón", y "crema". Defina un mapeo $1 - a - 1$ (una función biyectiva).

Ejercicio 4

En el Colegio Mayor Universitario de San Pablo CEU en Madrid es costumbre asignar a los novatos las tareas menos agradecidas, para que así los recién llegados se curtan y, de paso, acumulen inquina para a su vez torturar a las generaciones venideras.

En un momento dado en el colegio mayor hay 8 novatos, a los que el resto de estudiantes se refieren cariñosamente como $N_1, N_2, ...N_8$. A cada novato se le asigna una tarea: 2 deben lavar los platos, 2 deben limpiar la cocina, 1 debe limpiar los baños (¡pobre!), 1 debe limpiar las zonas comunes y 2 deben servir

Ejercicio 5

Vamos a mezclar dos barajas de 52 cartas completamente indistinguibles una de la otra. ¿De cuántas formas pueden ordenarse las cartas de esta nueva baraja compuesta de las dos anteriores?

Ejercicio 6

El idioma Hawaiano ('olelo Hawai'i) es una lengua muy particular, ya que cuenta con tan sólo 8 consonantes, pero al mismo tiempo tiene 25 vocales (incluyendo vocales largas y diptongos). Además, en Hawaiano todas las palabras deben acabar en una vocal y no deben tener dos o más consonantes seguidas. Vamos a suponer que todas las palabras que cumplen con estas condiciones son válidas.

Nos gustaría saber cuántas palabras de n fonemas hay en Hawaiano. A efectos de este problema definiremos fonema como una única vocal o consonante, no pudiendo un fonema ser una vocal y una consonante a la vez. Para hacer las cosas más sencillas asumiremos que n es par.

1. En primer lugar averigüe cuántas palabras podemos crear con exactamente 4 fonemas. Tenga en cuenta las distribuciones de vocales y consonantes posibles.

2. Ahora consideramos el caso general. Definimos A como el conjunto de todas las palabras de n fonemas, y A_k como el conjunto de todas las palabras de n fonemas con exactamente k consonantes. Exprese $|A|$ en términos de $|A_k|$ para todos los k posibles.

3. Suponga, hasta que se le indique lo contario, que el Hawaiano sólo tiene un tipo de consonante y un tipo de vocal. Ahora debemos encontrar $|A_k|$ para una k cualquiera. Encuentre una función biyectiva entre A_k (recuerde, por ahora con sólo un tipo de vocal y un tipo de consonante) y conjunto de secuencias de 0s y 1s de longitud p.

4. Usando esta función biyectiva, calcule $|A_k|$.

5. Dejemos a un lado nuestro Hawaiano simplificado y volvamos al real. ¿Cómo cambiaría la expresión para calcular $|A_k|$ que ya ha obtenido para permitir 8 consonantes y 25 vocales, y no sólo un tipo de cada?

6. Finalmente, ya puede calcular el número de palabras con n fonemas que existen en Hawaiano. ¿Cuál es?

Ejercicio 7

Supongamos que queremos ir del punto (0,0,0) en el plano tridimensional al punto (10,20,30). Podemos movernos dando pasos discretos en los que avan-

Ejercicio 8

Se diseña un robot capaz de moverse por un plano tridimensional, y éste debe ir del punto (0,0,0) al punto (30,30,30). Dicho robot puede llevar a cabo los siguientes movimientos:

1. Moverse en el eje x: moverse de (x,y,z) a (x+1,y,z)
2. Moverse en diagonal en los ejes x e y: moverse de (x,y,z) a (x+1,y+2,z)
3. Moverse en diagonal en los ejes y y z: moverse de (x,y,z) a (x,y-1,z+3)

¿Cuántos caminos diferentes puede recorrer el robot hasta llegar a su destino?