LO BÁSICO SOBRE NÚMEROS COMPLEJOS

Luis Felipe Prieto Martínez

16 de agosto de 2020

Resumen

Estos apuntes cubren los contenidos de 1º de bachillerato sobre números complejos. Aunque se han intentado tratar con algo más de formalidad y profundidad, para poder usarse también en un primer curso de grado de ciencias.

1. Introducción

- Los números **imaginarios puros** son las raíces cuadradas de números negativos, como por ejemplo: $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-64}$, ...El más importante es $i = \sqrt{-1}$, al que llamamos la **unidad imaginaria**.

- El conjunto de los **números complejos**, que se denota por $\mathbb{C}$, es el formado por todas las posibles expresiones z de la forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$. a decimos que es la **parte real** de z (la denotamos por $Re(z)$) y b la **parte imaginaria** ($Im(z)$).

- Los números reales son un tipo de números complejos (aquellos cuya parte imaginaria b es igual a 0), esto es, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. También los imaginarios puros son un tipo de números complejos (aquellos en los que la parte real a es igual a 0).

- No nos vamos a preocupar en este trabajo de si estos números son útiles. Veremos como se operan, y que lo hacen de forma coherente. Porque hay que tener cuidado al operar con los números complejos. No se cumplen todas las propiedaes de las operaciones con números reales. Por ejemplo cuando aparecen raíces y logaritmos nos encontramos cosas como las siguientes:

FALACIA 1

$$1 = (-1) \cdot (-1) \Longrightarrow \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \Longrightarrow 1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \Longrightarrow 1 = -1$$

FALACIA 2

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \Longrightarrow \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \Longrightarrow \sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \Longrightarrow 1 = -1$$

FALACIA 3

$$1^2 = (-1)^2 \Longrightarrow ln(1)^2 = ln(-1)^2 \Longrightarrow 2 \cdot ln(1) = 2 \cdot ln(-1) \Longrightarrow ln(1) = ln(-1) \Longrightarrow 1 = -1$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

2. Números Complejos y Polinomios

- Denotemos por $\mathbb{R}[x]$ al conjunto de todos los polinomios cuyos coeficientes son números reales. Y por $\mathbb{C}[x]$ al conjunto de todos los polinomios cuyos coeficientes son números complejos.
- La propiedad más importante que tienen los números complejos es que son **un cuerpo algebraicamente cerrado**. Esto quiere decir que se cumple una propiedad también llamada

> **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA**
> Todo polinomio de grado n en $\mathbb{C}[x]$ tiene n raíces que son números complejos.

Esto no pasa para los números reales. Por ejemplo existen polinomios de grado 2 en $\mathbb{R}[x]$ que no tienen 2 raíces que sean números reales. Por ejemplo $x^2 + 1$.

- Recordemos, desde esta nueva perspectiva, algunas cosas que ya sabíamos sobre factorización de polinomios.

> Un polinomio en $\mathbb{R}[x]$ es **irreducible** si no se puede expresar como producto de dos polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado menor.
>
> Los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ son, a lo sumo, de grado 2. Como consecuencia cualquier polinomio en $\mathbb{R}[x]$ se puede factorizar como producto de polinomios de grado a lo sumo 2.

- Con los números complejos no sucede lo mismo:

> Un polinomio en $\mathbb{C}[x]$ es **irreducible** si no se puede expresar como producto de dos polinomios en $\mathbb{C}[x]$ de grado menor.
>
> Los polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ son, a lo sumo, de grado 1. Por lo tanto cualquier polinomio en $\mathbb{C}[x]$ se puede factorizar como producto de polinomios de grado a lo sumo 1.

- Por último tenemos que saber lo siguiente. Dado un número complejo $z = a + bi$ se define su **conjugado** como $\overline{z} = a - bi$. Nótese que el producto $z \cdot \overline{z}$ siempre da como resultado un número real. Sucede que:

> $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$. Por lo tanto un mismo polinomio $p(x)$ de grado 2 con coeficientes reales puede ser irreducible como polinomio de $\mathbb{R}[x]$ pero no como polinomio de $\mathbb{C}$. En ese caso, las dos raíces de $p(x)$ son dos números complejos conjugados. Es una consecuencia de la "fórmula de la ecuación de segundo grado".

Ejercicio Resuelto 2.1 ***Factoriza el polinomio*** $\mathbf{p(x) = 2x^2 + 2x + 2}$.

1) $2x^2 + 2x + 2 = 2 \cdot (x^2 + x + 1)$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

3. Forma Binómica de los Números Complejos

- Hasta ahora, si decir el nombre, hemos presentado los numeros complejos expresados en **forma binómica**: con una expresión del tipo $z = a + bi$.
- i cumple las propiedades habituales de los números reales respecto a la suma y al producto.Lo único que debemos recordar es que $i \cdot i = -1$. Esto es suficiente para que sepamos sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos en forma binómica.

  Para dividir dos números complejos y expresar el resultado en forma binómica hay que **racionalizar**: multiplicar dividendo y divisor por el conjugado del denominador.
- Podemos también calcular potencias naturales de un número complejo en forma binómica sabiendo que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, ...y utilizando las fórmulas del **Binomio de Newton**, que recordamos a continuación:

BINOMIO DE NEWTON

Los coeficientes de las potencias de $(a + b)$

$$\begin{array}{lcl} (a+b)^0 & \longrightarrow & 1 \\ (a+b)^1 & \longrightarrow & a+b \\ (a+b)^2 & \longrightarrow & a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 & \longrightarrow & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 & \longrightarrow & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

son los números que aparecen en la columna correspondiente del **Triángulo de Pascal** (en el que cada entrada se obtiene sumando las dos que tiene encima):

$$\begin{array}{lccccccccc} n=0: & & & & & 1 & & & & \\ n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\ n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & \end{array}$$

Ejercicio Resuelto 3.1 ***Suma, resta, multiplica y divide los números complejos $\mathbf{z = 3 + 2i}$, $\mathbf{w = 4 - 7i}$. Después eleva el primero al cuadrado y segundo a la cuarta.***

1) $z + w = (3 + 2i) + (4 - 7i) = 7 - 5i$.

2) $z - w = (3 + 2i) - (4 - 7i) = 3 + 2i - 4 + 7i = -1 + 9i$.

3) $z \cdot w = (3 + 2i) \cdot (4 - 7i) = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 7i + 2i \cdot 4 - 2i \cdot 7i = 12 - 21i + 8i + 14 = 26 - 13i$.

4) $\frac{z}{w} = \frac{(3+2i)}{(4-7i)} = \frac{(3+2i)\cdot(4+7i)}{(4-7i)(4+7i)} = \frac{12+8i+21i-14}{(16+49)} = -\frac{2}{65} + \frac{29}{65}i$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

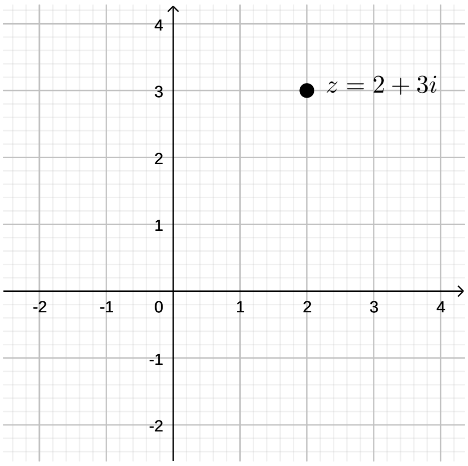
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

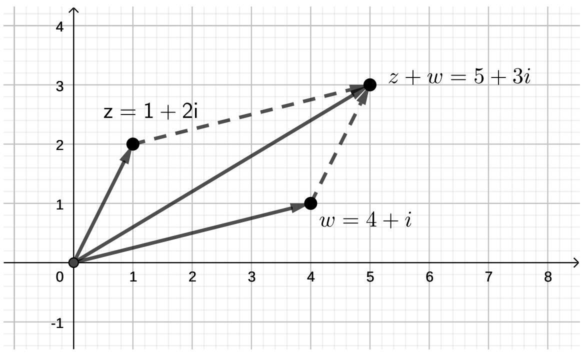
4. Representación Gráfica de los Números Complejos

- Si vamos a estudiar números complejos en forma binómica $z = a + bi$ identificando a con "la coordenada x" y b con "la coordenada y" es posible representar los números complejos como puntos del plano cartesiano, que en este contexto llamamos **Plano Complejo**.

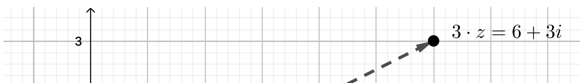


- El 0 se encuentra en el origen de coordenadas. Los números reales se encuentran en el eje de **abscisas** (horizontal) y los números imaginarios puros en el de **ordenadas** (vertical).

- **La suma de complejos coincide con la suma de vectores:** Si tenemos dos números complejos z, w respresentados en el plano complejo, el vector posición de la suma de dichos números $z + w$ coincide con la suma de vectores posición de z y w.



- **La multiplicación de un número real por un número complejo coincide con la multiplicación de vector por escalar:** Si tenemos un número complejo z, y un número real λ, el vector posición que une el origen y el número complejo $\lambda \cdot z$ coincide con el resultado de multiplicar por λ el vector posición de z.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

5. Forma Polar y Trigonométrica de los Números Complejos

- Una vez que hemos comprendido como se representa un número complejo dado en forma binómica en el plano complejo, definimos dos conceptos asociados:

> Dado un número complejo $z = a + bi$:
> 1) El **módulo** de z, que se denota por $|z|$, es la distancia de dicho número al origen de coordenadas.
> $$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
> 2) El **argumento** de z, que se denota por $arg(z)$, es el ángulo θ entre el vector posición de z y el vector $(0, 1)$. El argumento no está definido si $z = 0$.
> $$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } z = bi, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } z = -bi, b > 0 \\ arctg(\frac{b}{a}) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La expresión de z en **forma polar** es $z = r \cdot e^{\theta i}$. El por qué de esta expresión (¿que pinta ahí una exponencial?) se explicará en la sección siguiente.

- Sumar y restar números complejos en forma polar es más complicado, pero multiplicarlos, dividirlos y elevarlos a una potencia natural es muy fácil: se cumplen las correspondientes propiedades propiedades de las potencias.

- Esta expresión, también permite comprender un hecho muy importante:

> Dado un número complejo z, existen n números complejos w (sus raíces) que cumplen $w^n = z$.

  Además es sencillo calcular dichas raices en forma polar.

- Si conocemos la expresión en forma polar de un número complejo, es fácil volver a obtener su expresión en forma binómica:

> $$r \cdot e^{\theta i} = r \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)$$
> A la expresión de la izquierda, previa a la forma binómica (que se obtiene sencillamente quitando paréntesis) se la conoce como **forma trigonométrica**.

- Como consecuencia de todo lo anterior, llegamos a dos fórmulas "famosillas":

> **FÓRMULA DE DE MOIVRE:** $(cos(x) + isen(x))^n = cos(nx) + isen(nx)$.

> **FÓRMULA DE EULER:** $e^{\pi i} + 1 = 0$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

6. ¿Por qué lo anterior tiene sentido? Funciones Analíticas de Variable Compleja. Exponenciales, Funciones Trigonométricas y Números Complejos

- Esta sección esta dedicada a contestar la siguiente pregunta: *¿Qué sentido tiene la expresión* $r \cdot e^{i\theta}$*?*

- Debemos saber algo primero. En el instituto hemos tratado principalmente con un tipo de funciones, que se llaman **elementales**. Pero existe otro tipo de funciones que se llaman **analíticas**. Son aquellas del estilo:

  $$f(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + d_3(x-a)^3 + \dots$$

  para algún número real a.

  A ese tipo de expresiones se les llaman **series de potencias**, en este caso **centradas** en a.

  Todas ellas están definidas en $x = a$. Pero son interesantes las que están definidas en más puntos.

- ¿Cómo podemos evaluar la función $f(x)$ en un valor $b \neq a$? En otras palabras, ¿Qué significa la siguiente expresión?

  $$f(b) = d_0 + d_1(b-a) + d_2(b-a)^2 + d_3(b-a)^3 + \dots$$

  Nosotros no sabemos "sumar infinitas cosas". Lo que sí sabemos es calcular límites. La expresión anterior es una manera de escribir el siguiente límite:

  $$f(b) = \lim_{n\to\infty} [d_0 + d_1(b-a) + d_2(b-a)^2 + \dots + d_n(b-a)^n]$$

  Si este límite existe, b está en el domino de $f(x)$.

- Una de las ventajas que tienen este tipo de funciones respecto a las funciones elementales es la siguiente: se pueden evaluar en números complejos.

  Bueno, ¡cuidado! primero hay que entender lo que significa un límite con números complejos. No lo voy a hacer en detalle ahora, aunque la definición es muy similar a la definición de límite de una sucesión de números reales.

- Las funciones elementales son siempre analíticas (al menos coinciden con alguna función analítica en algún intervalo de su dominio). Por ejemplo:

  $$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

  $$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \qquad sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

  Dada una función elemental, para encontrar la correspondiente serie de potencias se usa la llamada **Series de Taylor**. Estas series se estudian en cualquier curso de primero de carrera

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

- Consecuencia de todo lo anterior, y de interés independiente en otros contextos, son las siguientes fórmulas:

$$cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad sen(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

- Precisamente, del hecho de que ni la función $f(x) = \sqrt{x}$ ni $g(x) = ln(x)$ son "tan analíticas como nos gustaría", se derivan las falacias que vimos en la Sección 1 relacionadas con las operaciones de números complejos. No se pueden hacer raices ni logaritmos de números complejos "alegremente".

- De las fórmulas que aparecen en esta sección, se obtiene como conclusión que las ecuaciones $ln(x) = -1$, $sen(x) = 2$, ... sí que tienen solución. Pero es un número complejo.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

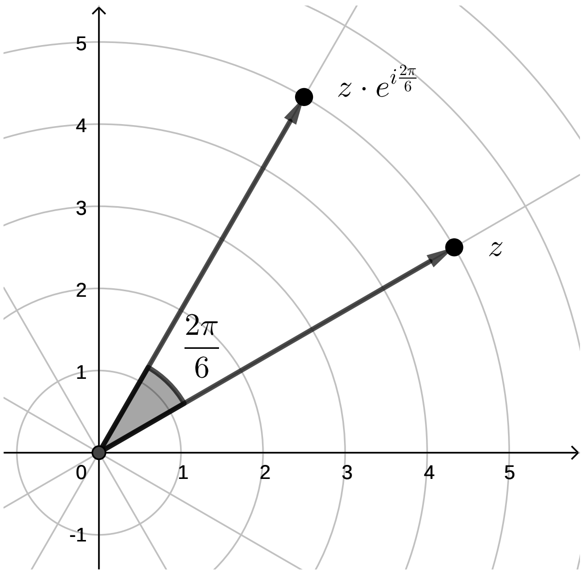
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

7. Interpretación Geométrica del Producto de Números Complejos

Sean dos números complejos z, w. Supongamos que el segundo de ellos tiene módulo 1 o, en otras palabras, $w = e^{i\theta}$. Entonces, en el plano complejo, $z \cdot w$ es el punto obtenido al girar el punto z un ángulo θ respecto del origen de coordenadas



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Ejercicios (UAM, INGENIERÍA QUÍMICA 2019-20)

1) Dados los números complejos $z = 2 + 2i$ y $w = 1 - 3i$, calcula z^2, z^{-1}, wz y w/z.
Solución: $8i$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$, $8 - 4i$, $-\frac{1}{2} - i$.

2) Despeja z en la ecuación $(2 + 3i)z + (4 - i) = (2 + i)z - 4i$.
Solución: $-\frac{3}{2} + 2i$.

3) Resolver $iz + (2 - 10i)z = 3z + 2i$.
Solución: $-9/41 - i/41$.

4) Halla un polinomio de segundo grado con coeficientes enteros que tenga como raíz al número complejo $z_0 = 2 - i$.

5) Comprueba que si $z = a + bi$ es una raíz de cierto polinomio P con coeficientes reales, entonces $\overline{z} = a - bi$ también es una raíz del mismo polinomio.
Ayuda: Recuerda que $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ y $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

6) Usando el ejercicio anterior, demuestra que un polinomio con coeficientes reales y grado impar siempre tiene al menos una raíz real. Muestra un ejemplo de polinomio de grado cuatro que no tenga raices reales.

7) Calcula el módulo y el argumento de $z = -2+2i$, $w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. ¿Cuál es el módulo y argumento de zw y de z/w?
Solución: $2\sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{4}$; 1, $\frac{4\pi}{3}$; $2\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{12}$; $2\sqrt{2}$, $-\frac{7\pi}{12}$.

8) Describir el conjunto del plano complejo determinado por las siguientes relaciones:
(i) $|z - 2| > |z + 2|$; (ii) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$; (iii) $|z| > 4$.

9) Demostrar las fórmulas:
(i) $|z + 1|^2 - |z - 1|^2 = 4 \operatorname{Re} z$; (ii) $|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2 + 2\,|z|^2$.

10) Dado n un número entero, el polinomio $z^n - 1$ tiene n raíces complejas, pero ninguna de ellas tiene módulo mayor que uno. ¿Por qué?
Ayuda: Que z_0 sea una raíz de ese polinomio se puede reescribir como $z_0^n = 1$.

11) Resolver $z^3 = i$ en las formas exponencial, polar y binomial.
Solución: $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}/2 + i/2$, $e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos(\frac{5\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3}/2 + i/2$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -i$.

12) Escribir en forma exponencial $4 + i, -3/2 - i/2, -1 + 2i$.
Solución: $\sqrt{17}e^{i\arctan(\frac{1}{4})}$, $\sqrt{\frac{5}{2}}e^{i(\arctan(\frac{1}{3})-\pi)}$, $\sqrt{5}e^{i(\pi-\arctan(2))}$.

13) Comprobar que $(1 + i)^{12} = -64$, y $((1 - i)/\sqrt{2})^{-6} = -i$.

14) Resolver las siguientes ecuaciones i) $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$; ii) $z^4 = i$; iii) $z^3 = -8i$.
Soluciones a iii): $z = 2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$.

15) Resolver $z^2 = -8 - 6i$.

16) Resolver $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$.
Solución: $2 - i, 1 + 2i$.

17) Usando la multiplicación de complejos en forma polar, deduce las fórmulas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

En cada caso, encontrar las raíces y sus respectivas multiplicidades.

19) Encontrar las factorizaciones de los siguientes polinomios con coeficientes reales en el producto de factores **de grados 1 y 2 con coeficientes reales:**

(a) $z^3 - z^2 - 5z - 3$; (b) $z^4 + 5z^2 + 4$; (c) $z^4 - 5z^2 + 4$; (d) $z^5 - 1$.

Encontrar todas las raíces complejas y sus multiplicidades.

20) Escribir los binomios de Newton hasta el grado 5. Calcular: $\binom{5}{1}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{2000}{1}$, $\binom{10}{5}$.

21) Simplificar $(z+1)^5 + (z-1)^5$.

22) Tenemos un triángulo equilátero en el plano complejo cuyo centro está en el origen de coordenadas. Si tiene uno de sus vértices en el punto $z = 1 + 3i$, ¿dónde tiene los otros?

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.