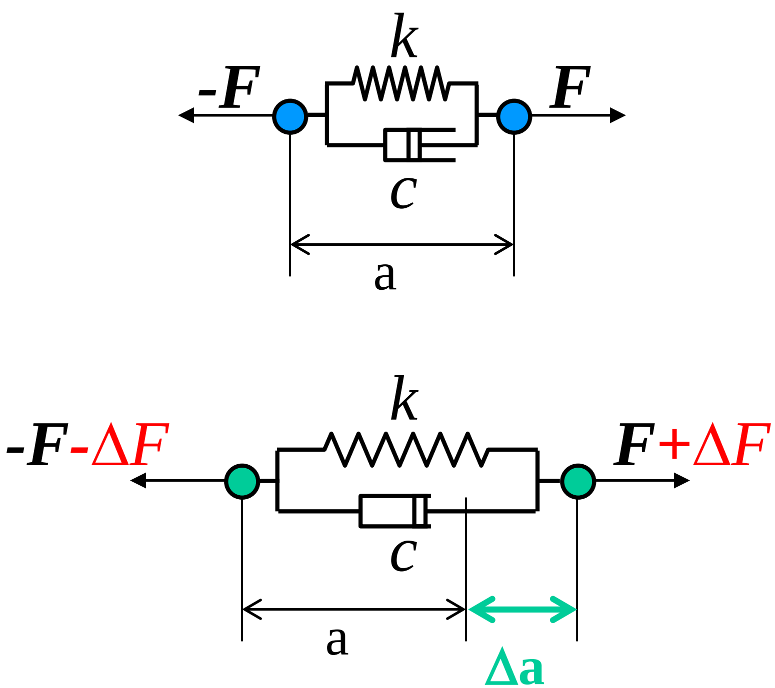
TEMA 4. MODELS CONSTITUTIUS

4.1. Introducció

Sistemes discrets

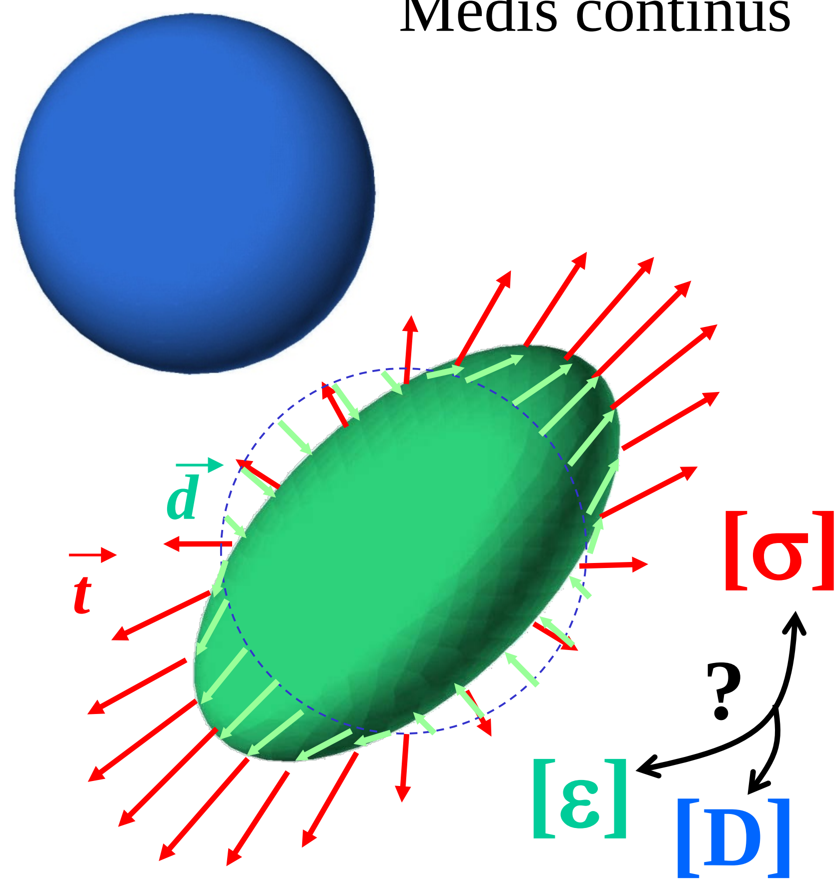


k: Rigidesa

c: Esmorteïment

$$\boxed{\Delta F = k \cdot \Delta a + c \cdot \dot{a}}$$

Medis continus



"Rigidesa" ?

"viscositat" ?

Teorema de les forces vives

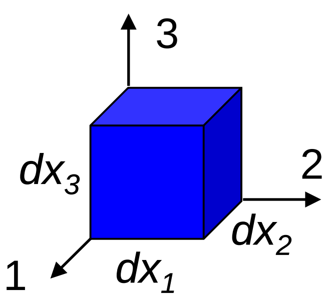
La suma de potències de les accions externes més la potència de les tensions internes, actuant sobre un sistema en un instant determinat, és igual a la velocitat de variació d'energia cinètica del sistema en el mateix instant.

$$\boxed{P_{ext} + P_{int} = \frac{D}{Dt} E_c}$$

En forma diferencial, sobre un *dV:*

$$\delta P_{ext} + \delta P_{int} = \frac{D}{Dt}\left(\delta E_c\right)$$

desenvolupant el terme de potència de les forces exteriors al *dV*:



$$\delta P_{ext} = \underbrace{\vec{v}^{\,T} \times \left(\nabla[\sigma] + \vec{b}\right) dV}_{\frac{D}{Dt}\left(\delta E_c\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 dV\right)} + \underbrace{[\sigma]:[D]\,dV}_{\delta P_\sigma = tr\left\|[\sigma]^T[D]\right\| dV}$$

Variació d'energia cinètica

potència de tensió

$$-\delta P_{int}$$

En forma intensiva:
(densitat de potència)

$$P^*_{ext} = \frac{D}{Dt} E^*_c + P^*_\sigma = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) + [\sigma]:[D]$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\delta P}{\Delta V}$$

Densitat d'energia de deformació

L'energia de deformació involucrada en la transformació geomètrica d'un medi continu és el treball realitzat per les tensions internes d'aquest medi en passar de la configuració inicial a la configuració actual. Expressada en forma intensiva, definim la densitat d'energia de deformació, E_ε^* .

multiplicant la potència de tensió per dt, $[d\varepsilon]=[D]dt \longrightarrow \delta\, dE_\varepsilon = [\sigma]:[d\varepsilon]dV$

expressada en forma intensiva: $\boxed{dE_\varepsilon^* = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\, dE_\varepsilon}{\Delta V} = [\sigma]:[d\varepsilon]} = tr[[\sigma][d\varepsilon]]$

Per a una deformació finita:

$$E_\varepsilon^* = \int dE_\varepsilon^* = \int [\sigma]:[d\varepsilon]$$

Energia de deformació

volumètrica

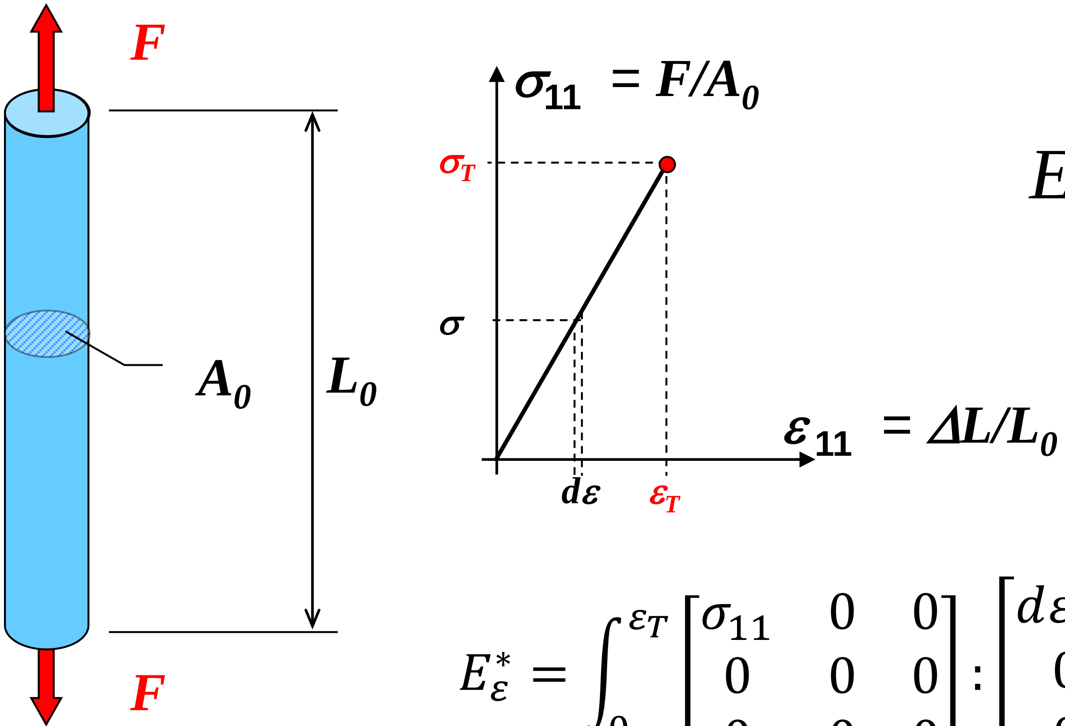
Energia de distorsió

$$dE_\varepsilon^* = [\sigma]:[d\varepsilon] = [\sigma_0]:[d\varepsilon_0] + \boxed{[s]:[de]}$$

L'energia total, per a un volum finit:

$$E_\varepsilon = \int_V E_\varepsilon^* dV = \int_V \left(\int [\sigma]:[d\varepsilon]\right) dV$$

Determinar la densitat d'energia elàstica de deformació involucrada en l'assaig de tracció uniaxial (material elàstic lineal) i l'energia total de deformació.



$$E_\varepsilon^* = \int dE_\varepsilon^* = \int [\sigma]:[d\varepsilon]$$

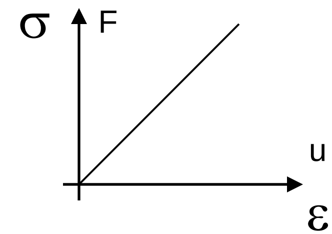
$$E_\varepsilon^* = \int_0^{\varepsilon_T} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d\varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \int_0^{\varepsilon_T} \sigma_{11} d\varepsilon_{11} =$$

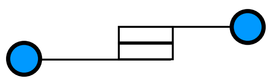
$$= \int_0^{\varepsilon_T} E\varepsilon_{11} d\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} E\varepsilon_T^2 = \frac{1}{2}\sigma_T\varepsilon_T = \frac{\sigma_T^2}{2E}$$

$$E_\varepsilon = \int_V E_\varepsilon^* dV = \frac{1}{2} V_0 \sigma_T \varepsilon_T$$

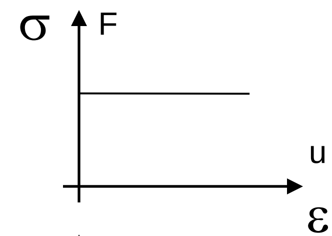
Models discrets atemporals

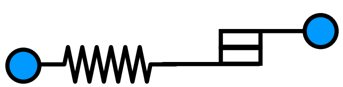
Elàstic lineal (Hooke)



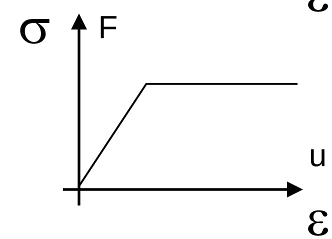


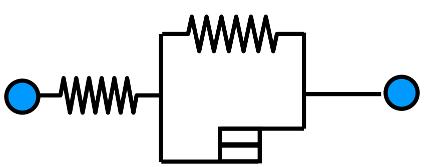
Rígid-perfectament plàstic



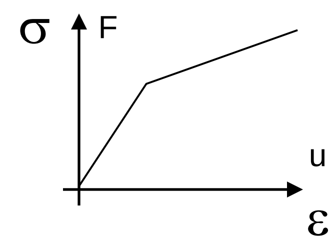


Elàstic-perfectament plàstic

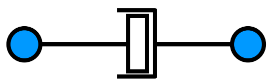




Elàstic-plàstic amb
enduriment

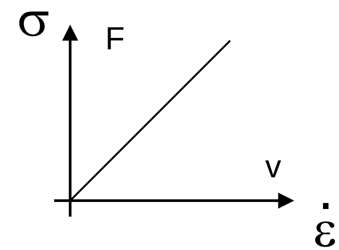


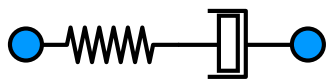
Models discrets temporals



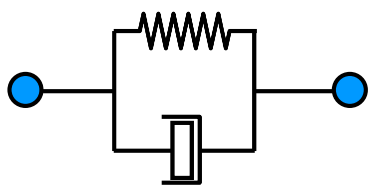
Newton

Viscós pur

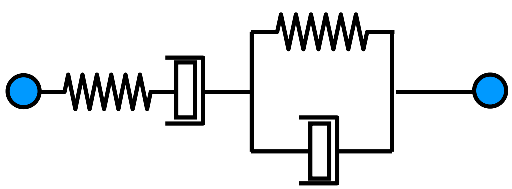




Maxwell

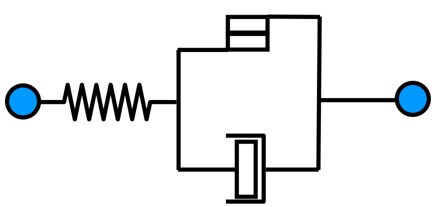


Kelvin



Burger

Visco-elàstics



Bingham

Visco-elasto-plàstic

4.2. Principis Bàsics

1. $[\sigma]$ queda determinat per la història temporal de la cinemàtica

2. $[\sigma]$ depèn només de la cinemàtica de l'entorn immediat del punt

3. Les equacions constitutives no depenen del sistema de referència

4. Les equacions constitutives son compatibles amb el 1er i 2^{on} principi de la Termodinàmica

4.3. Llei de Hooke Generalitzada

$$\{\bar{\bar{\varepsilon}}\} = [C]\{\bar{\bar{\sigma}}\} \longrightarrow \{\bar{\bar{\sigma}}\} = [D]\{\bar{\bar{\varepsilon}}\}$$

Eq. de Lamé $[D]=[C]^{-1}$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & C & \\ & (\text{cnt}) & \\ & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

Materials <u>isòtrops</u>:

$[C]$; $[D]$ independents de la base en la què s'expressin.

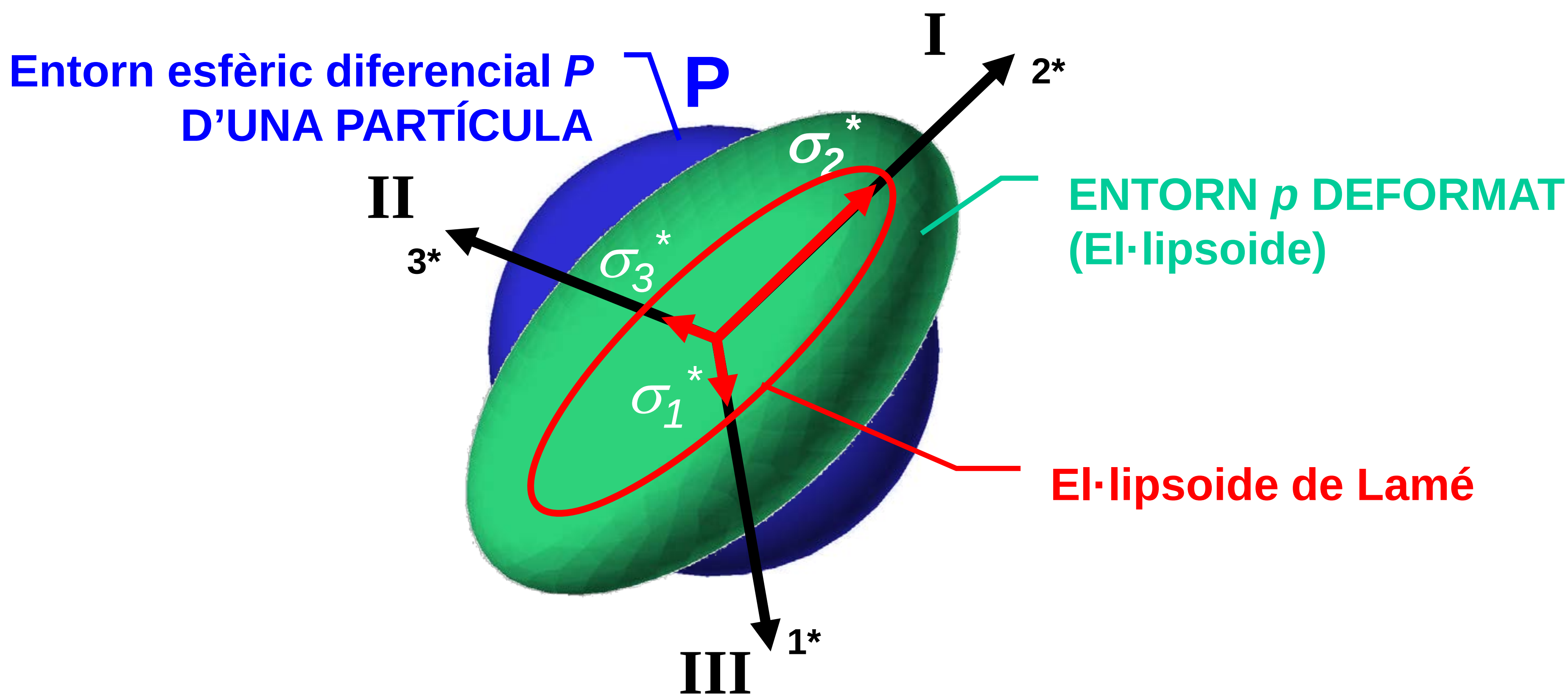
$\Downarrow$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

(amb $c_3 = c_1 - c_2$)

Components normals i transversals desacoblades.

$\Downarrow$



Nomenclatura I, II, III:

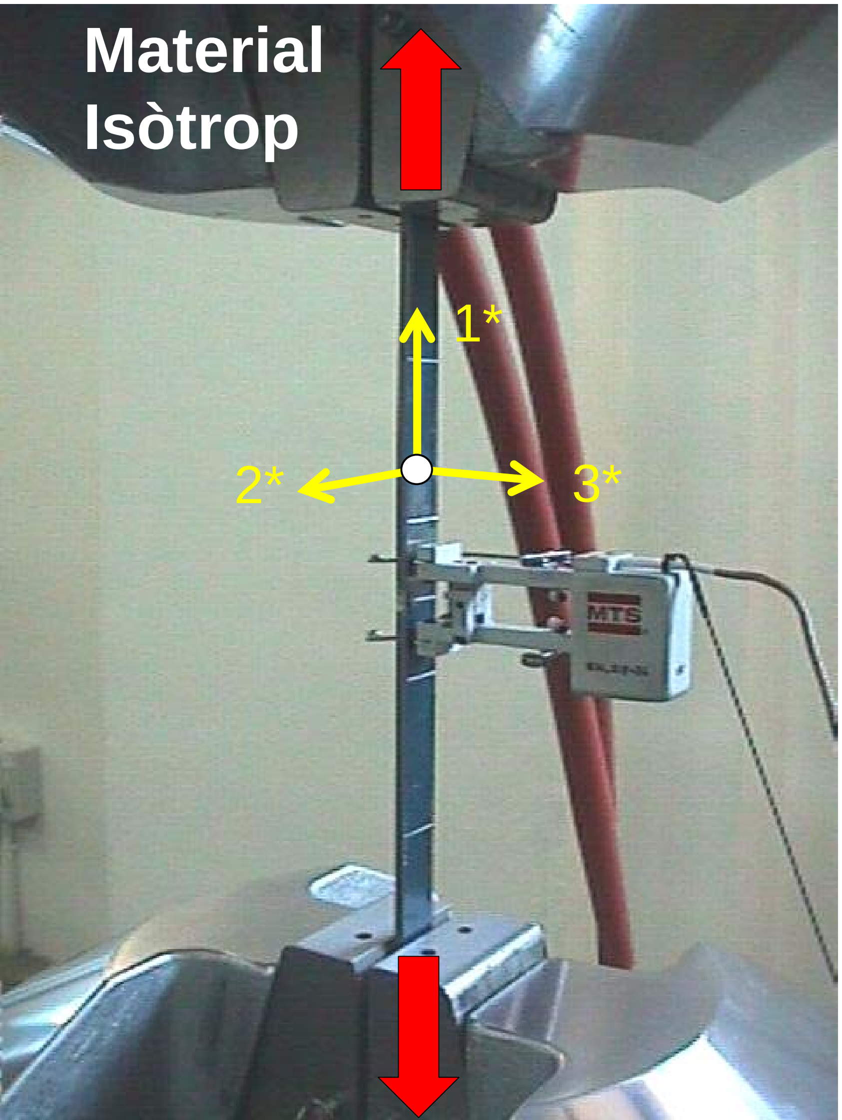
direccions ordenades de major (I) a menor (III)

$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ $\varepsilon_I > \varepsilon_{II} > \varepsilon_{III}$

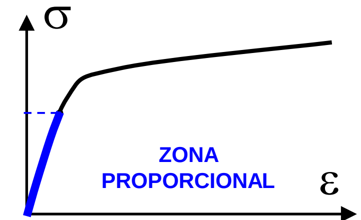
(traccions/allargaments positius)
(compressions/escurçaments negatius)

En materials ISÒTROPS en règim elàstic, els eixos principals de tots els el·lipsoides són coincidents

Cas uniaxial



$$[\sigma]=\begin{bmatrix} F/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} \varepsilon_1^* & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^* & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_1^*}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\upsilon\dfrac{\sigma_1^*}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\upsilon\dfrac{\sigma_1^*}{E} \end{bmatrix}$$

Llei de Hooke **uniaxial**

Coef. de Poisson

$$\varepsilon_1^* = \frac{\sigma_1^*}{E} \qquad \varepsilon_2^* = \varepsilon_3^* = -\nu\varepsilon_1^*$$

$-1 < \nu < 0.5$

Mòdul Elàstic (N/mm²)

Normalment $0 < \nu < 0.5$

Activitat 4.1

Aplicant el principi de superposició, deduir les expressions de les deformacions longitudinals totals dels eixos principals, superposant tres estats uniaxials de tensió.

$$[\sigma_{1*}] = \begin{bmatrix} \sigma_{1*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\sigma_{2*}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\sigma_{3*}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3*} \end{bmatrix}$$

Si actuen simultàniament σ_1^* σ_2^* i σ_3^* ,
pel principi de superposició tenim:

	σ_1^*	σ_2^*	σ_3^*
ε_1^*	σ_1^*/E	$-\nu\sigma_2^*/E$	$-\nu\sigma_3^*/E$
ε_2^*	$-\nu\sigma_1^*/E$	σ_2^*/E	$-\nu\sigma_3^*/E$
ε_3^*	$-\nu\sigma_1^*/E$	$-\nu\sigma_2^*/E$	σ_3^*/E

$$\begin{cases} \varepsilon_1^* = \dfrac{\sigma_1^*}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_2^* + \sigma_3^*\right) = -\dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^*\right) + \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_1^* \\ \varepsilon_2^* = \dfrac{\sigma_2^*}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_1^* + \sigma_3^*\right) = -\dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^*\right) + \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_2^* \\ \varepsilon_3^* = \dfrac{\sigma_3^*}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_1^* + \sigma_2^*\right) = -\dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^*\right) + \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_3^* \end{cases}$$

En forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^* & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^* & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^* \end{bmatrix} = -\frac{\nu}{E} 3\sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma_1^* & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^* & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^* \end{bmatrix}$$

Aquesta relació és independent dels eixos de referència (medi isòtrop),

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = -\frac{\nu}{E} 3\sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Llei de Hooke Generalitzada

$$\boxed{[\varepsilon] = -\frac{3\nu}{E}[\sigma_0] + \frac{1+\nu}{E}[\sigma]}$$

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})\right] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right] \end{aligned}\right.$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{13}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23}$$

Llei de Hooke Generalitzada

Materials isòtrops

2 constants independents

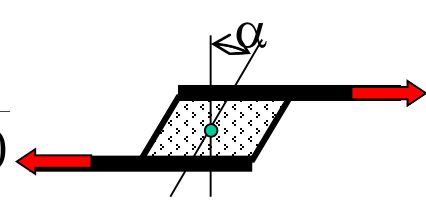
$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{E} \\ c_2 = \dfrac{-\nu}{E} \end{cases}$$

$$c_3 = c_1 - c_2 = \frac{1+\nu}{E}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 - c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 - c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



G Mòdul d'Elasticitat Transversal (N/mm²)

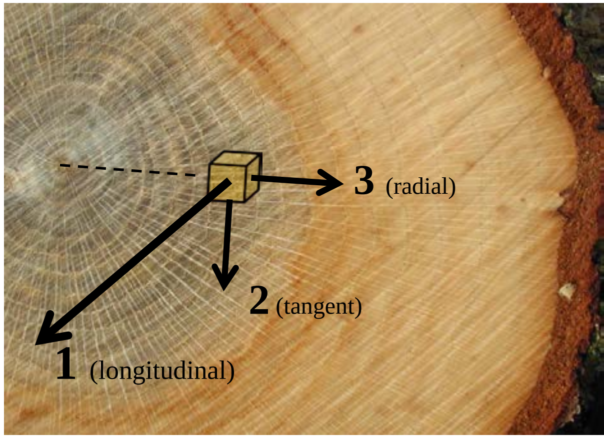
Llei de Hooke Generalitzada

Materials ortòtrops:

9 constants independents

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_2 & c_6 & 0 & 0 & 0 \\ c_5 & c_6 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

p.ex. fusta (composite natural)



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1} & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & \dfrac{1}{E_2} & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & \dfrac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

S'ha de complir que:

$$\nu_{12}/E_2 = \nu_{21}/E_1$$

$$\nu_{13}/E_3 = \nu_{31}/E_1$$

$$\nu_{23}/E_3 = \nu_{32}/E_2$$

Activitat 4.2 (a casa, temps 30 min)
Entregable 11
(límit 1 setmana)

Amb quants i quins assaigs podríem determinar les 9 constants elàstiques d'un material ortòtrop com la fusta? $E_L \quad E_T \quad E_R \quad \nu_{LT} \quad \nu_{LR} \quad \nu_{TR} \quad G_{LT} \quad G_{LR} \quad G_{TR}$ (suposar igual comportament tracció-compressió). Buscar exemples de fustes diferents.

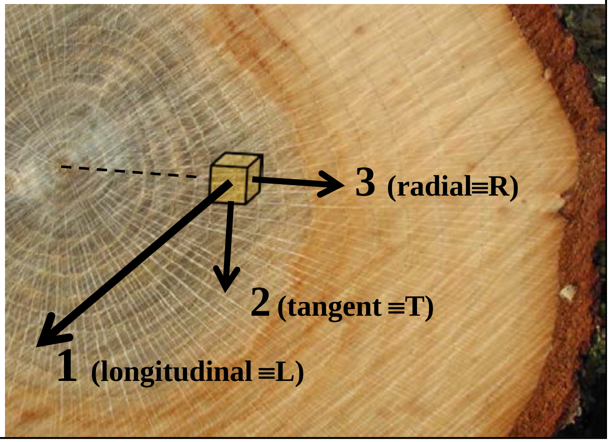
normalment:

$$E_L >> E_R > E_T$$

$$G_{LR} > G_{TL} >> G_{RT}$$

$$\nu_{RT} > \nu_{LT} > \nu_{LR} \approx \nu_{TR} >> \nu_{RL} > \nu_{TL}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_R \\ \varepsilon_{LT} \\ \varepsilon_{LR} \\ \varepsilon_{TR} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_L} & -\nu_{TL}/E_T & -\nu_{RL}/E_R & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{LT}/E_L & \dfrac{1}{E_T} & -\nu_{RT}/E_R & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{LR}/E_L & -\nu_{TR}/E_T & \dfrac{1}{E_R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_{LT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{LR} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{TR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_R \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LR} \\ \sigma_{TR} \end{Bmatrix}$$



Activitat 4.3

Una placa plana quadrada de 2m de costat i 5cm de gruix està sotmesa a un estat pla de tensió tal que: (x_1 , x_2 en cm i σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} en N/cm^2)

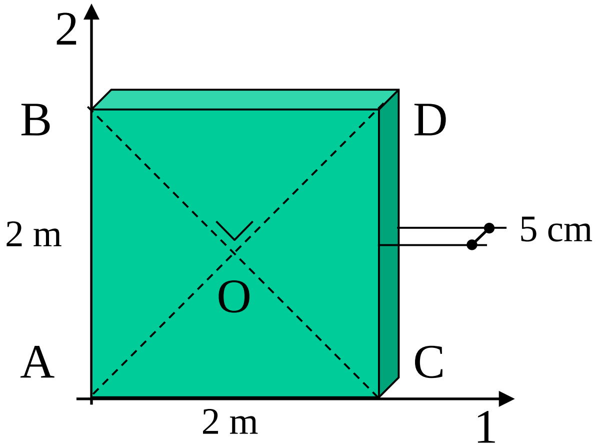
$$\sigma_{11} = 4x_1 + x_2$$

$$\sigma_{22} = x_1 + 4x_2$$

$$\sigma_{12} = 100$$

$$E = 2{\cdot}10^6 \quad \text{N/cm}^2$$

$$\nu = 0{,}25$$



Determinar:

1) Allargament de la diagonal AD.

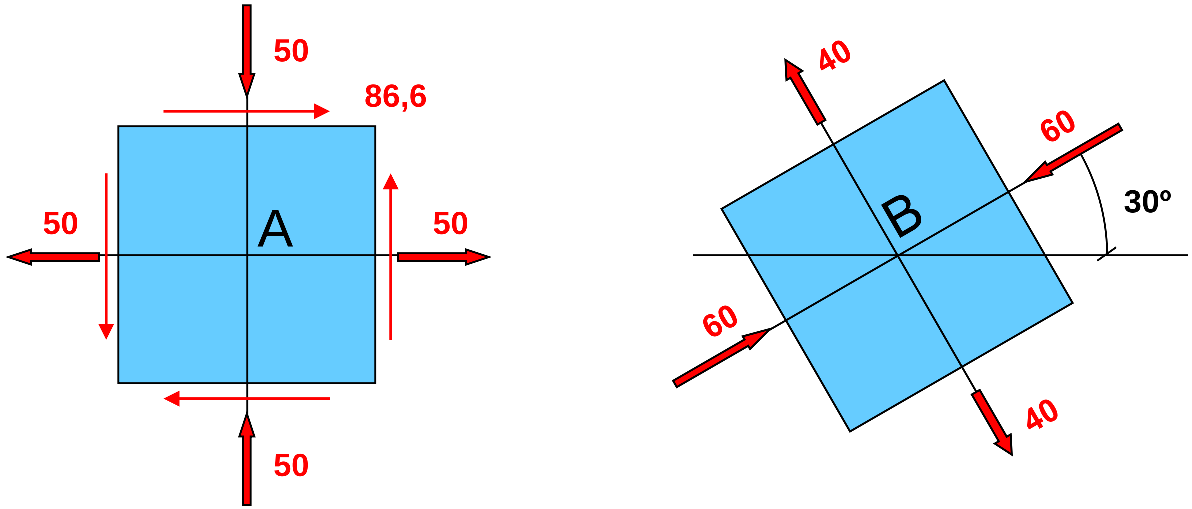
2) Variació de l'angle recte BOD.

Activitat 4.4

En un medi elàstic continu i isòtrop, s'obté determinat estat tensional com a suma dels estats A i B de la figura.
Determinar els allargaments unitaris principals i les seves direccions.

$E = 210.000\ \mathrm{MPa}$

$\nu = 0{,}25$



4.4. Equacions de Lamé

Materials isòtrops

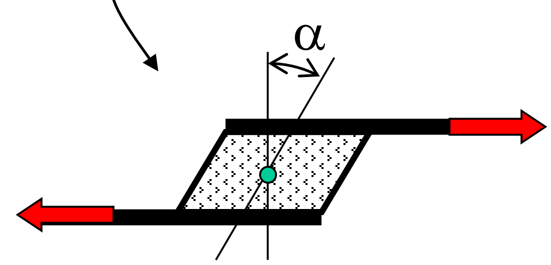
$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda\varepsilon_V + 2\mu\varepsilon_{11} & \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} = \lambda\varepsilon_V + 2\mu\varepsilon_{22} & \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} \\ \sigma_{33} = \lambda\varepsilon_V + 2\mu\varepsilon_{33} & \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\boxed{[\sigma] = \lambda\varepsilon_V[I] + 2\mu[\varepsilon]}$$

λ, μ Constants de Lamé (N/mm^2)



$$E = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

G Mòdul d'Elasticitat Transversal (N/mm^2)

Equacions de Lamé

Materials isòtrops

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & d_2 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

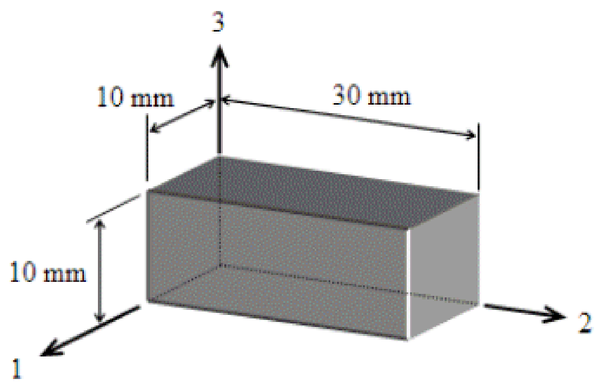
Activitat 4.5
Entregable 12
(límit 1 setmana)

MECÀNICA DE MEDIS CONTINUS | **PROBLEMA 1** | **17.06.05**

Permutació **1** | Temps 70 min | Punts 10 | Pes: 1

La pieza prismática de la figura experimenta una transformación geométrica representada mediante las ecuaciones lagrangianas $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ siguientes:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + aX_1 + 400 \cdot 10^{-6} X_3 \\ x_2 = (1 - 900 \cdot 10^{-6}) X_2 \\ x_3 = X_3(1 + c) + bX_2 - d \cdot 200 \cdot 10^{-6} X_1 \end{cases}$$



Sabiendo que:

- La transformación no cambia el volumen del prisma.
- Se tiene, en todo el prisma, un estado plano de deformación (plano 1-2).
- El material es frágil, de resistencia $\sigma_r = 200 \ N/mm^2$.

  Propiedades elásticas: $E = 200.000 \ N/mm^2$, $\nu = 0.12$
- Se puede admitir la hipótesis de transformación infinitésima.

se pide determinar:

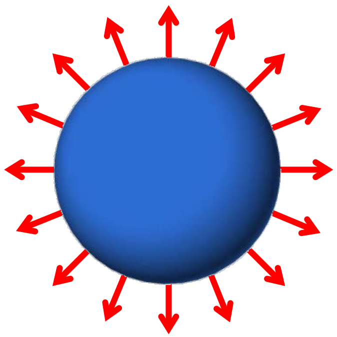
a) Las constantes **a**, **b**, **c** y **d**.

b) El estado final del prisma: longitudes de los lados, volumen y rotación de sólido rígido $\vec{\omega}$. Ilustrar gráficamente el estado de deformación (no es necesario ilustrar los movimientos de sólido rígido)

c) Determinar la tensión tangencial máxima. Dibujar el plano sobre el que actúa y el vector tensión.

4.5. Índex de Compressibilitat

Materials isòtrops



Component Hidrostàtica $\sigma_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$

Definim $K = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_V}$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3\varepsilon_0$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})\right]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right]$$

$$\varepsilon_V = 3\frac{1-2\nu}{E}\sigma_0$$

$$\boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K} \qquad e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G}$$

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0 \qquad s_{ij} = 2Ge_{ij}$$

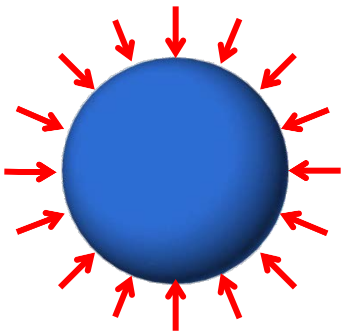
$$\boxed{[\varepsilon] = \frac{[\sigma_0]}{3K} + \frac{[s]}{2G}}$$

$$\boxed{[\sigma] = 3K[\varepsilon_0] + 2G[e]}$$

4.6. Materials Fluids

Fluids ideals: No ofereixen resistència al canvi de forma.
Només s'oposen a canviar de volum.

Només es generen estats de tensió esfèrics.



$$[\sigma]=\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \qquad -p = K\varepsilon_V$$

Vectors tensió concèntrics i d'igual mòdul $\rightarrow$ l'estat de tensió (magnitud tensorial) s'assimila a una magnitud "*escalar*" anomenada *pressió.*

En "Mecànica de Fluids":
Tensions de compressió, positives (pressió)
Tensions de tracció, negatives (depressió o succió)
(respecte l'estat de referència, p. ex. $P_{atm} = 0$ "pressions relatives")

Fluids reals: Ofereixen resistència, tant al canvi de volum com al canvi de forma.

La resistència al canvi de forma no depèn de la magnitud d'aquest canvi, sinó només de la velocitat a la que es produeix.

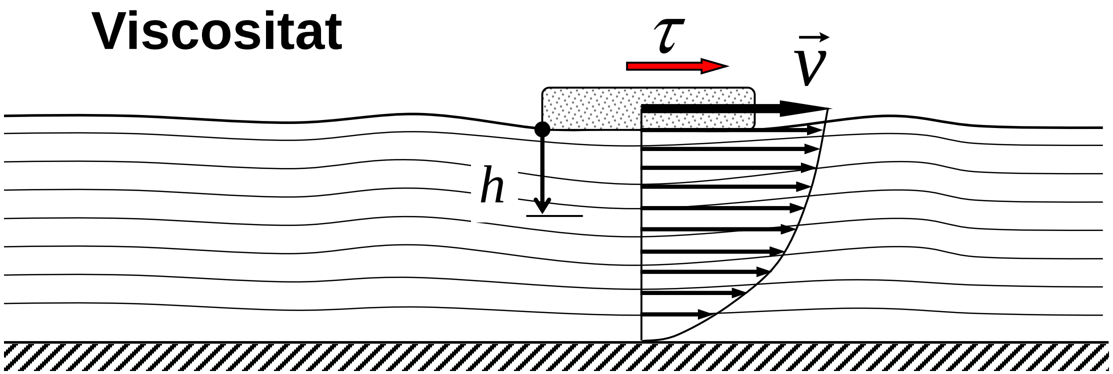
La resistència al canvi de volum depèn principalment de la magnitud d'aquest canvi i pot dependre també de la velocitat a la que es produeix.

Fluid Newtonià :

$$\frac{\Delta v}{\Delta h} = \frac{\tau}{\mu^*}$$

Viscositat dinàmica

Viscositat



$$[N{\cdot}s\,/\,m^2] = [Kg\,/\,(m{\cdot}s)] = 10\,P \qquad 1\,Poise = [g\,/\,(cm{\cdot}s)]$$

Viscositat cinemàtica $\dfrac{\mu^*}{\rho}$

$$[m^2/s] = 10^4\ \text{St}$$
$$1\,Stoke = [cm^2/s]$$

$$\frac{dv}{dh} = \frac{d}{dh}\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{du}{dh} = \frac{d}{dt}\gamma = \dot{\gamma}$$

$$\boxed{\tau = \mu^*\dot{\gamma}}$$

En un fluid real:

$$[\sigma] = [-p] + [\tau]$$

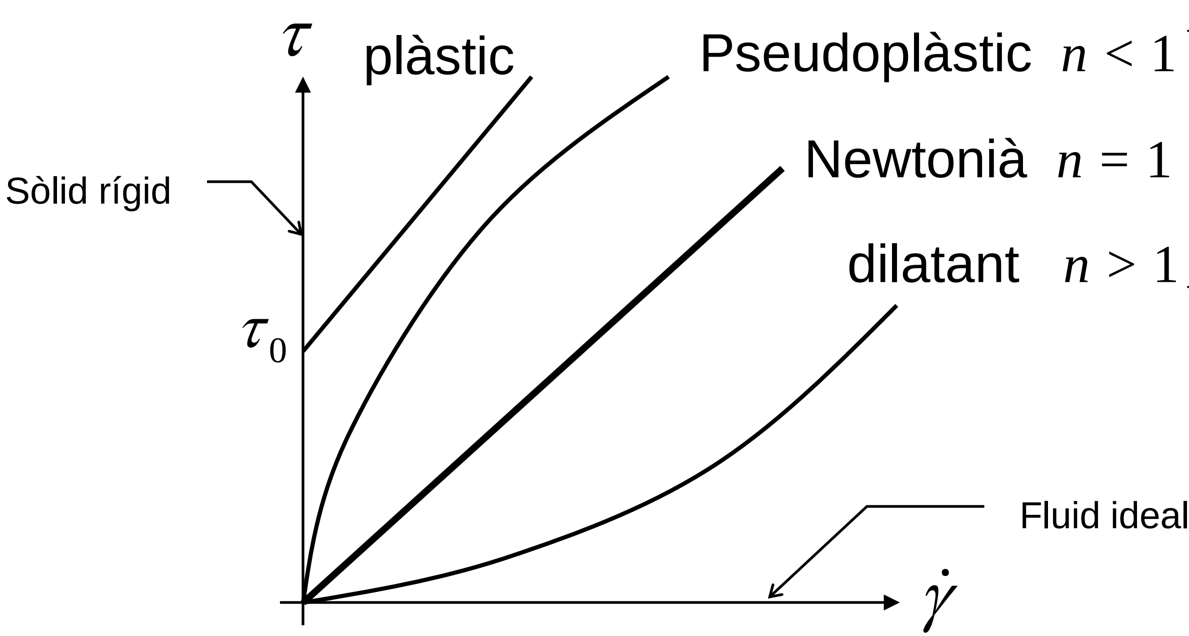
Tensions viscoses

Pressió "estàtica" o termodinàmica

Pressió que tindria el fluid en repòs
Determinada per l'equació d'estat (funció densitat i temperatura)

Models uniaxials

$$\tau = f(\dot{\gamma})$$



$\tau_0 = 0 \rightarrow$ purament viscosos $\tau = m \cdot (\dot{\gamma})^n$

Plàstics $\tau = \tau_0 + f(\dot{\gamma})$

Plàstic de Bingham $\tau = \tau_0 + \mu^* \dot{\gamma}$

Fluids Newtonians: Tensor de tensions viscoses proporcional al tensor velocitat de deformació

Tensor de coeficients viscosos del medi

$$\{\bar{\bar{\tau}}\} = [V]\{\bar{\bar{D}}\}$$

Fluids Newtonians isòtrops: $[\sigma] = [-p] + \underbrace{3\lambda^*[D_0] + 2\mu^*[D]}_{[\tau]}$

Part esfèrica de $[D]$

Part desviadora de $[D]$

Viscositat volumètrica

$$K^* = \lambda^* + \frac{2}{3}\mu^*$$

$$[\sigma] = \underbrace{[-p] + 3K^*[D_0]}_{[\sigma_0]} + \underbrace{2\mu^*[d]}_{[s]}$$

Fluids Newtonians Stokesians:

$K^* = 0 \rightarrow [\sigma_0] = [-p]$

$\lambda^* = -2\mu^*/3$

Fluids Incompressibles: $[D_0] = 0$

p no determinable per les eq. d'estat, valor arbitrari compatible amb les eq. de moviment i contorn.