

# Caracterización del error permanente

*Ingeniería Electrónica de Comunicaciones*

Eva Besada Portas

Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática.  
Universidad Complutense de Madrid

Curso 2020-2021



## Esquema



- 1 **Objetivos**
- 2 Precisión y tipos de error
- 3 Caracterización del error de sistemas continuos
- 4 Caracterización del error de sistemas discretos



# Objetivos del tema



Los objetivos del tema son aprender a:

- Caracterizar el error en el permanente de los sistemas realimentados en función del:
  - ▶ 'Tipo' del sistema en lazo abierto
  - ▶ Su dominio:
    - ★ Sistema Continuo
    - ★ Sistema Discreto



# Objetivos del tema



Los objetivos del tema son aprender a:

- Caracterizar el error en el permanente de los sistemas realimentados en función del:
  - ▶ 'Tipo' del sistema en lazo abierto
  - ▶ Su dominio:
    - ★ Sistema Continuo
    - ★ Sistema Discreto
- Distinguir entre el error de control y el error verdadero





- 1 Objetivos
- 2 Precisión y tipos de error**
- 3 Caracterización del error de sistemas continuos
- 4 Caracterización del error de sistemas discretos



La situación ideal, en la mayoría de los sistemas, se da cuando la salida del sistema sigue a la entrada.



La situación ideal, en la mayoría de los sistemas, se da cuando la salida del sistema sigue a la entrada.

En el transitorio, tal y como vimos el año pasado, esto no se suele cumplir, por lo que se fijan las especificaciones que tiene que se deben alcanzar (por medio de parámetros relacionados con el comportamiento temporal).

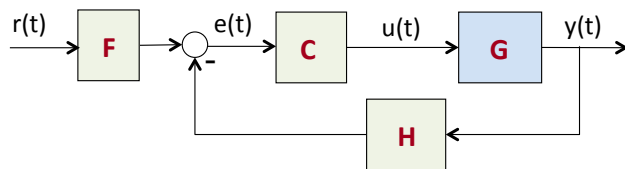


La situación ideal, en la mayoría de los sistemas, se da cuando la salida del sistema sigue a la entrada.

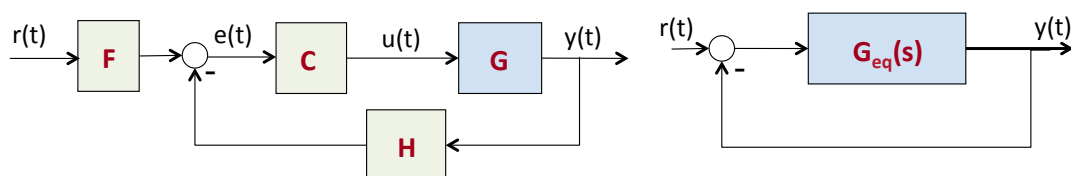
En el transitorio, tal y como vimos el año pasado, esto no se suele cumplir, por lo que se fijan las especificaciones que tiene que se deben alcanzar (por medio de parámetros relacionados con el comportamiento temporal).

Sin embargo, en el régimen permanente es importante que el sistema en lazo cerrado sea lo suficientemente preciso (es decir que la salida se parezca bastante a la entrada), y que las perturbaciones a variaciones en la entrada no afecten a la salida de un modo arbitrario.

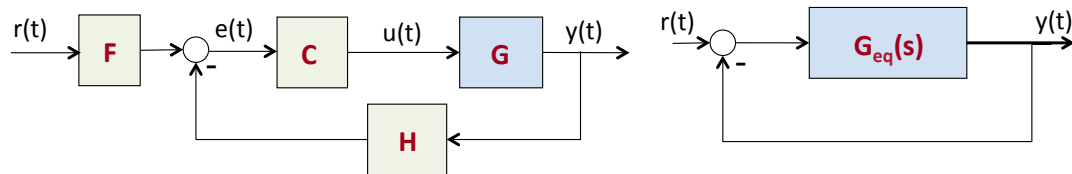
# Error de control y error verdadero I



# Error de control y error verdadero I

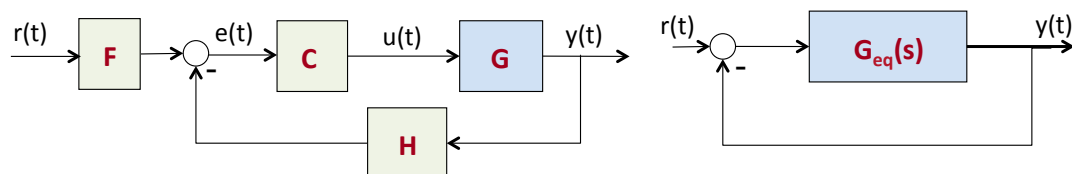


# Error de control y error verdadero I



En un caso genérico (figura de la izquierda), el error de control  $e(t)$  es la señal que le entra al bloque del controlador, mientras que el error verdadero es la diferencia que existe entre la salida y la entrada  $e(t)=r(t)-y(t)$ .

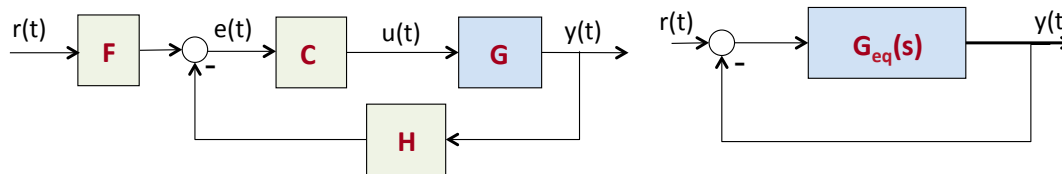
# Error de control y error verdadero I



En un caso genérico (figura de la izquierda), el error de control  $e(t)$  es la señal que le entra al bloque del controlador, mientras que el error verdadero es la diferencia que existe entre la salida y la entrada  $e(t)=r(t)-y(t)$ .

Para poder calcular el error verdadero de cualquier sistema, podemos manipularlo hasta llegar a su representación  $G_{eq}(s)$  y utilizar las expresiones vistas para el caso genérico.

# Error de control y error verdadero I



En un caso genérico (figura de la izquierda), el error de control  $e(t)$  es la señal que le entra al bloque del controlador, mientras que el error verdadero es la diferencia que existe entre la salida y la entrada  $e(t)=r(t)-y(t)$ .

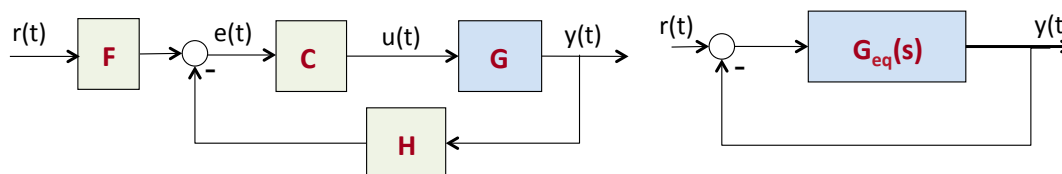
Para poder calcular el error verdadero de cualquier sistema, podemos manipularlo hasta llegar a su representación  $G_{eq}(s)$  y utilizar las expresiones vistas para el caso genérico.

Para caracterizar el comportamiento del error, hay que utilizar su función de transferencia, en la que se relaciona la entrada con el error:

- $M_e(s) = \frac{F(s)}{1+G(s)C(s)H(s)}$
- $M_e(s) = \frac{1}{1+G_{eq}(s)}$



# Error de control y error verdadero I



En un caso genérico (figura de la izquierda), el error de control  $e(t)$  es la señal que le entra al bloque del controlador, mientras que el error verdadero es la diferencia que existe entre la salida y la entrada  $e(t)=r(t)-y(t)$ .

Para poder calcular el error verdadero de cualquier sistema, podemos manipularlo hasta llegar a su representación  $G_{eq}(s)$  y utilizar las expresiones vistas para el caso genérico.

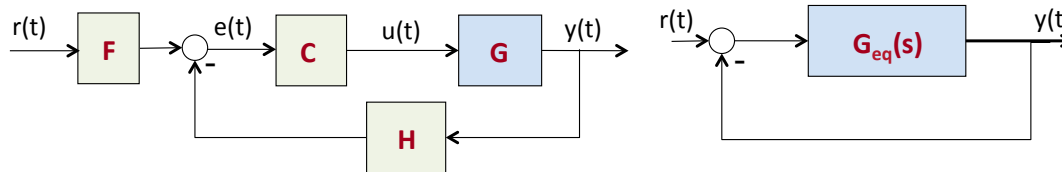
Para caracterizar el comportamiento del error, hay que utilizar su función de transferencia, en la que se relaciona la entrada con el error:

- $M_e(s) = \frac{F(s)}{1+G(s)C(s)H(s)}$
- $M_e(s) = \frac{1}{1+G_{eq}(s)}$

El error en el estacionario se puede calcular a través del teorema del límite.



# Error de control y error verdadero I



En un caso genérico (figura de la izquierda), el error de control  $e(t)$  es la señal que le entra al bloque del controlador, mientras que el error verdadero es la diferencia que existe entre la salida y la entrada  $e(t)=r(t)-y(t)$ .

Para poder calcular el error verdadero de cualquier sistema, podemos manipularlo hasta llegar a su representación  $G_{eq}(s)$  y utilizar las expresiones vistas para el caso genérico.

Para caracterizar el comportamiento del error, hay que utilizar su función de transferencia, en la que se relaciona la entrada con el error:

- $M_e(s) = \frac{F(s)}{1+G(s)C(s)H(s)}$
- $M_e(s) = \frac{1}{1+G_{eq}(s)}$

El error en el estacionario se puede calcular a través del teorema del límite.

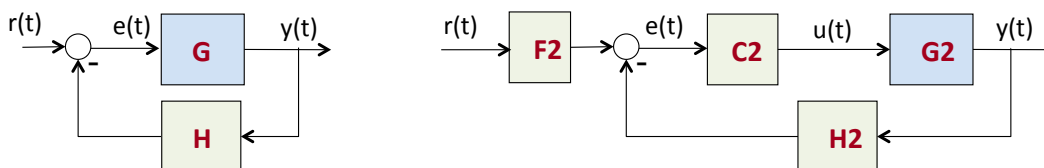
Además, aunque hemos representado un sistema continuo, el razonamiento es igualmente válido para discreto



# Error de control y error verdadero II



Sin embargo, para caracterizar el error, habitualmente se utiliza la siguiente disposición de bloques de la figura de la izquierda.

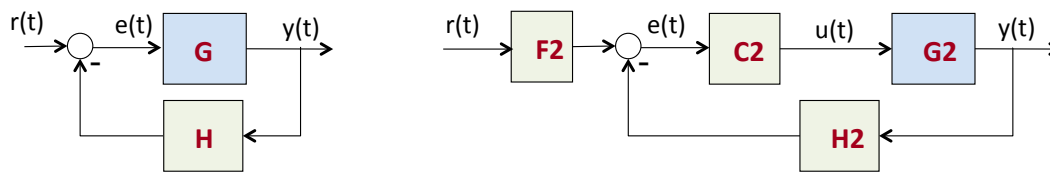




## Error de control y error verdadero II



Sin embargo, para caracterizar el error, habitualmente se utiliza la siguiente disposición de bloques de la figura de la izquierda.



Para llegar a ella a partir de la figura de la derecha (combinación genérica en LC), únicamente<sup>1</sup> hay que aplicar algebra de bloques y obtener la relación entre las funciones de transferencia:  $H(s) = H_2(s)/F_2(s)$  y  $G(s) = C_2(s)G_2(s)F_2(s)$

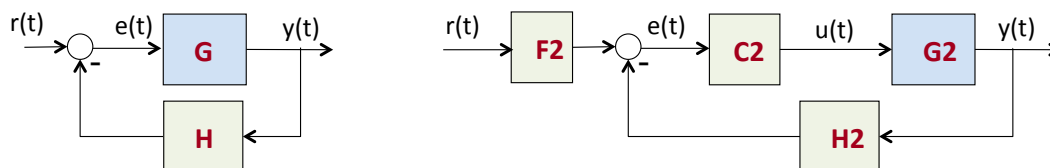
<sup>1</sup>En el cálculo también hemos redefinido el error como la diferencia entre  $r(t)$  y la  $H(t)y(t)$ .



## Error de control y error verdadero II



Sin embargo, para caracterizar el error, habitualmente se utiliza la siguiente disposición de bloques de la figura de la izquierda.



Para llegar a ella a partir de la figura de la derecha (combinación genérica en LC), únicamente<sup>1</sup> hay que aplicar algebra de bloques y obtener la relación entre las funciones de transferencia:  $H(s) = H_2(s)/F_2(s)$  y  $G(s) = C_2(s)G_2(s)F_2(s)$

La representación de la izquierda también se da de forma natural en los sistemas en LC sin acción directa, haciendo que  $G(s) = C_2(s)G_2(s)$

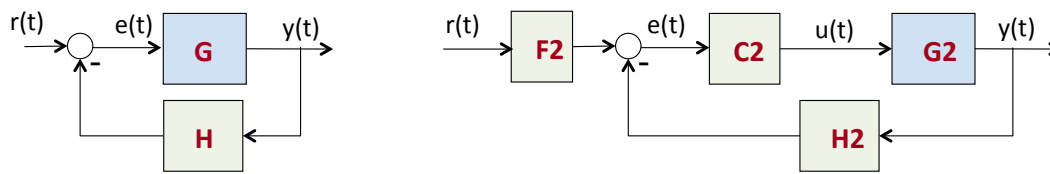
<sup>1</sup>En el cálculo también hemos redefinido el error como la diferencia entre  $r(t)$  y la  $H(t)y(t)$ .



# Error de control y error verdadero II



Sin embargo, para caracterizar el error, habitualmente se utiliza la siguiente disposición de bloques de la figura de la izquierda.



Para llegar a ella a partir de la figura de la derecha (combinación genérica en LC), únicamente<sup>1</sup> hay que aplicar algebra de bloques y obtener la relación entre las funciones de transferencia:  $H(s) = H_2(s)/F_2(s)$  y  $G(s) = C_2(s)G_2(s)F_2(s)$

La representación de la izquierda también se da de forma natural en los sistemas en LC sin acción directa, haciendo que  $G(s) = C_2(s)G_2(s)$

Con la representación de la figura de la izquierda, nos queda que:

- La función de transferencia del error es:  $M_e(s) = \frac{1}{1+GH}$
- Su representación en  $G_{eq}(s)$  hace que  $G_{eq}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-1]}$

<sup>1</sup>En el cálculo también hemos redefinido el error como la diferencia entre  $r(t)$  y la  $H(t)y(t)$ .



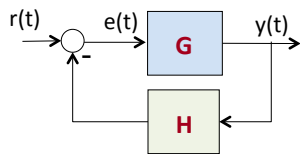
# Esquema



- 1 Objetivos
- 2 Precisión y tipos de error
- 3 Caracterización del error de sistemas continuos
- 4 Caracterización del error de sistemas discretos



# Constantes de error permanente I

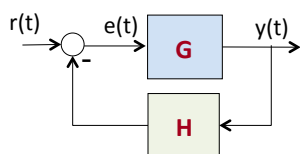


Para caracterizar el error en el permanente ante diferentes entradas se usa su FT ( $E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$ ) y se definen unas constantes de error<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Alternativamente, llega con calcular el limite de la expresión del error genérica ante cualquiera de las entradas clásicas.



# Constantes de error permanente I



Para caracterizar el error en el permanente ante diferentes entradas se usa su FT ( $E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$ ) y se definen unas constantes de error<sup>1</sup>

**Error ante la entrada escalón de altura M:**  $R(s) = \frac{M}{s}$

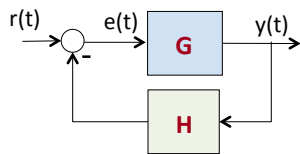
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sM}{s(1 + G(s)H(s))} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M}{1 + G(s)H(s)} = \frac{M}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)}$$

Si  $\exists$  el lim y definimos  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$  (cte de error de posición),  $\implies e_{ss} = \frac{M}{1+K_p}$ .

<sup>1</sup>Alternativamente, llega con calcular el limite de la expresión del error genérica ante cualquiera de las entradas clásicas.



# Constantes de error permanente I



Para caracterizar el error en el permanente ante diferentes entradas se usa su FT ( $E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$ ) y se definen unas constantes de error<sup>1</sup>

**Error ante la entrada escalón de altura M:**  $R(s) = \frac{M}{s}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sM}{s(1 + G(s)H(s))} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M}{1 + G(s)H(s)} = \frac{M}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)}$$

Si  $\exists$  el lim y definimos  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$  (cte de error de posición),  $\implies e_{ss} = \frac{M}{1+K_p}$ .

**Error ante la entrada rampa con pendiente M:**  $R(s) = \frac{M}{s^2}$

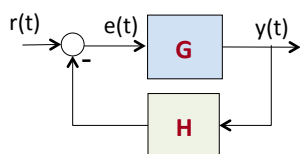
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sM}{s^2(1 + G(s)H(s))} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M}{s + sG(s)H(s)} = \frac{M}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)}$$

Si  $\exists$  el lim y definimos  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$  (cte. de error de velocidad),  $\implies e_{ss} = \frac{M}{K_v}$ .

<sup>1</sup>Alternativamente, llega con calcular el limite de la expresión del error genérica ante cualquiera de las entradas clásicas.



# Constantes de error permanente I



Para caracterizar el error en el permanente ante diferentes entradas se usa su FT ( $E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$ ) y se definen unas constantes de error<sup>1</sup>

**Error ante la entrada escalón de altura M:**  $R(s) = \frac{M}{s}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sM}{s(1 + G(s)H(s))} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M}{1 + G(s)H(s)} = \frac{M}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)}$$

Si  $\exists$  el lim y definimos  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$  (cte de error de posición),  $\implies e_{ss} = \frac{M}{1+K_p}$ .

**Error ante la entrada rampa con pendiente M:**  $R(s) = \frac{M}{s^2}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sM}{s^2(1 + G(s)H(s))} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M}{s + sG(s)H(s)} = \frac{M}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)}$$

Si  $\exists$  el lim y definimos  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$  (cte. de error de velocidad),  $\implies e_{ss} = \frac{M}{K_v}$ .

**Error ante la entrada parábola  $\frac{M}{2}t^2$ :**  $R(s) = \frac{M}{s^3}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sM}{s^3(1 + G(s)H(s))} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M}{s^2 + s^2G(s)H(s)} = \frac{M}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s)}$$

Si  $\exists$  el lim y definimos  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s)$  (cte de error de aceleración),  $\implies e_{ss} = \frac{M}{K_a}$ .

<sup>1</sup>Alternativamente, llega con calcular el limite de la expresión del error genérica ante cualquiera de las entradas clásicas.



## Constantes de error permanente II



Resumiendo:

- Entrada escalón de altura M:  $e_{ss} = \frac{M}{1+K_p}$  con  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$
- Entrada rampa pendiente M:  $e_{ss} = \frac{M}{K_v}$  con  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$
- Entrada parábola  $\frac{M}{2}t^2$ :  $e_{ss} = \frac{M}{K_a}$  con  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$



## Constantes de error permanente II



Resumiendo:

- Entrada escalón de altura M:  $e_{ss} = \frac{M}{1+K_p}$  con  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$
- Entrada rampa pendiente M:  $e_{ss} = \frac{M}{K_v}$  con  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$
- Entrada parábola  $\frac{M}{2}t^2$ :  $e_{ss} = \frac{M}{K_a}$  con  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$

Para entradas de orden mayor, se sigue el mismo método. Sin embargo, hay que tener en cuenta que habitualmente no se utilizan en control.



## Constantes de error permanente II



Resumiendo:

- Entrada escalón de altura M:  $e_{ss} = \frac{M}{1+K_p}$  con  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$
- Entrada rampa pendiente M:  $e_{ss} = \frac{M}{K_v}$  con  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$
- Entrada parábola  $\frac{M}{2}t^2$ :  $e_{ss} = \frac{M}{K_a}$  con  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$

Para entradas de orden mayor, se sigue el mismo método. Sin embargo, hay que tener en cuenta que habitualmente no se utilizan en control.

Para entradas que sean una combinación lineal de las anteriores, siguiendo el principio de superposición de los sistemas lineales, el error se calcula como combinación lineal de los errores.



## Constantes de error permanente II



Resumiendo:

- Entrada escalón de altura M:  $e_{ss} = \frac{M}{1+K_p}$  con  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$
- Entrada rampa pendiente M:  $e_{ss} = \frac{M}{K_v}$  con  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$
- Entrada parábola  $\frac{M}{2}t^2$ :  $e_{ss} = \frac{M}{K_a}$  con  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$

Para entradas de orden mayor, se sigue el mismo método. Sin embargo, hay que tener en cuenta que habitualmente no se utilizan en control.

Para entradas que sean una combinación lineal de las anteriores, siguiendo el principio de superposición de los sistemas lineales, el error se calcula como combinación lineal de los errores.

**Ejemplo:** calcular el error estacionario del sistema ante  $r(t) = A + Bt + \frac{C}{2}t^2$

$$e_{ss} = \frac{A}{1+K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a}$$



# Clasificación del error respecto al tipo de sistema I



Acabamos de ver que el error del sistema ante diferentes entradas depende del  $\lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s)H(s)$ .



# Clasificación del error respecto al tipo de sistema I



Acabamos de ver que el error del sistema ante diferentes entradas depende del  $\lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s)H(s)$ .

De forma genérica  $G(s)H(s)$  se puede escribir como una función

$$\frac{K \prod (a_i s + 1) \prod (b_i s^2 + c_i s + 1)}{s^n \prod (d_i s + 1) \prod (e_i s^2 + f_i s + 1)}$$



# Clasificación del error respecto al tipo de sistema I



Acabamos de ver que el error del sistema ante diferentes entradas depende del  $\lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s)H(s)$ .

De forma genérica  $G(s)H(s)$  se puede escribir como una función

$$\frac{K \prod (a_i s + 1) \prod (b_i s^2 + c_i s + 1)}{s^n \prod (d_i s + 1) \prod (e_i s^2 + f_i s + 1)}$$

Según el número de polos en el origen que tiene la función  $G(s)H(s)$  y la función de entrada (que proporciona los  $k$  ceros de la expresión  $\lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s)H(s)$ ) las constantes de error tomarán el valor 0, constante o infinito.



# Clasificación del error respecto al tipo de sistema I



Acabamos de ver que el error del sistema ante diferentes entradas depende del  $\lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s)H(s)$ .

De forma genérica  $G(s)H(s)$  se puede escribir como una función

$$\frac{K \prod (a_i s + 1) \prod (b_i s^2 + c_i s + 1)}{s^n \prod (d_i s + 1) \prod (e_i s^2 + f_i s + 1)}$$

Según el número de polos en el origen que tiene la función  $G(s)H(s)$  y la función de entrada (que proporciona los  $k$  ceros de la expresión  $\lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s)H(s)$ ) las constantes de error tomarán el valor 0, constante o infinito.

Por lo tanto, si clasificamos los sistemas según el número de polos que la función  $G(s)H(s)$  tiene en el origen, podremos caracterizar de una forma generalizada el comportamiento de los sistemas ante las diferentes tipos de entrada.





# Clasificación del error respecto al tipo de sistema I



Acabamos de ver que el error del sistema ante diferentes entradas depende del  $\lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s)H(s)$ .

De forma genérica  $G(s)H(s)$  se puede escribir como una función

$$\frac{K \prod (a_i s + 1) \prod (b_i s^2 + c_i s + 1)}{s^n \prod (d_i s + 1) \prod (e_i s^2 + f_i s + 1)}$$

Según el número de polos en el origen que tiene la función  $G(s)H(s)$  y la función de entrada (que proporciona los  $k$  ceros de la expresión  $\lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s)H(s)$ ) las constantes de error tomarán el valor 0, constante o infinito.

Por lo tanto, si clasificamos los sistemas según el número de polos que la función  $G(s)H(s)$  tiene en el origen, podremos caracterizar de una forma generalizada el comportamiento de los sistemas ante las diferentes tipos de entrada.

Siguiendo esta idea, se dice que un **sistema es tipo  $n$  si su función  $G(s)H(s)$  tiene  $n$  polos en el origen.**



# Clasificación del error respecto al tipo de sistema II



Según el tipo del sistema, se cumplen las siguientes propiedades



# Clasificación del error respecto al tipo de sistema II



Según el tipo del sistema, se cumplen las siguientes propiedades

Respecto a las constantes de error:

TIPO	"G(s)H(s)"	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$
0	K	K	0	0
1	$\frac{K}{s}$	$\infty$	K	0
2	$\frac{K}{s^2}$	$\infty$	$\infty$	K

"G(s)H(s)" muestra la tendencia principal del sistema, es decir su ganancia y el número de polos en el origen, ya que el resto de polos y ceros, al tomar el limite, dan valores unitarios.



# Clasificación del error respecto al tipo de sistema II



Según el tipo del sistema, se cumplen las siguientes propiedades

Respecto a las constantes de error:

TIPO	"G(s)H(s)"	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$
0	K	K	0	0
1	$\frac{K}{s}$	$\infty$	K	0
2	$\frac{K}{s^2}$	$\infty$	$\infty$	K

Respecto al error

TIPO	Escalón: $e_{ss} = \frac{M}{1+K_p}$	Rampa: $e_{ss} = \frac{M}{K_v}$	Parábola: $e_{ss} = \frac{M}{K_a}$
0	$\frac{M}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{M}{K}$	$\infty$
2	0	0	$\frac{M}{K}$

"G(s)H(s)" muestra la tendencia principal del sistema, es decir su ganancia y el número de polos en el origen, ya que el resto de polos y ceros, al tomar el limite, dan valores unitarios.



# Ejemplos de error permanente I



**Ejemplo:** ¿Cual es el error permanente de un sistema con  $G(s)H(s) = \frac{8}{s^2+3s+5}$ ?



# Ejemplos de error permanente I



**Ejemplo:** ¿Cual es el error permanente de un sistema con  $G(s)H(s) = \frac{8}{s^2+3s+5}$ ?

Sistema tipo 0. Constantes de error:

- Entrada escalón:  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \frac{8}{5} \implies e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{M}{1+\frac{8}{5}}$
- Entrada rampa:  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = 0 \implies e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$
- Entrada parabola:  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s) = 0 \implies e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$



# Ejemplos de error permanente I



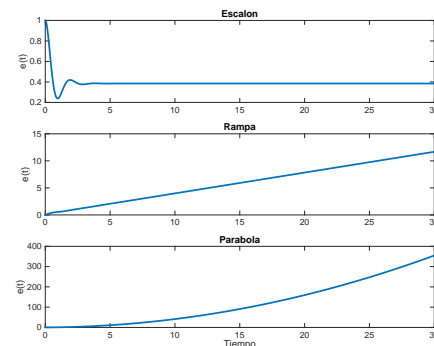
**Ejemplo:** ¿Cual es el error permanente de un sistema con  $G(s)H(s) = \frac{8}{s^2+3s+5}$ ?

Sistema tipo 0. Constantes de error:

- Entrada escalón:  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \frac{8}{5} \implies e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{M}{1+\frac{8}{5}}$
- Entrada rampa:  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = 0 \implies e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$
- Entrada parabola:  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s) = 0 \implies e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$

Suponer que parte de  $G(s)H(s)$  es de  $G(s)$  y que parte de  $H(s)$ . Lo más sencillo, salvo que nos indiquen como están, es que todo está en  $G(s)$  ya que así el error es el verdadero.

```
ghs=tf(8,[1 3 5]);gslc=feedback(ghs,1);
t=0:0.01:30;
[y,t]=step(gslc,t);er=1-y(end)
subplot(3,1,1);plot(t,1-y);
ylabel('e(t)');title('Escalon');
x=t;[y,t]=lsim(gslc,x,t);er=x(end)-y(end)
subplot(3,1,2);plot(t,x-y);
ylabel('e(t)');title('Rampa');
x=t.^2;[y,t]=lsim(gslc,x,t);er=x(end)-y(end)
subplot(3,1,3);plot(t,x-y);
ylabel('e(t)');title('Parabola');
xlabel('Tiempo');
```



# Ejemplos de error permanente II



**Ejemplo:** ¿Dado un sistema tipo 0, se puede eliminar el error ante la entrada escalón con una realimentación unitaria?



## Ejemplos de error permanente II



**Ejemplo:** ¿Dado un sistema tipo 0, se puede eliminar el error ante la entrada escalón con una realimentación unitaria?

Si un sistema es tipo 0,  $K_p = cte$ , así que  $e_{ss} = \frac{1}{1+cte} = cte'$ .

En este caso, nunca se puede alcanzar el valor deseado.



## Ejemplos de error permanente II



**Ejemplo:** ¿Dado un sistema tipo 0, se puede eliminar el error ante la entrada escalón con una realimentación unitaria?

Si un sistema es tipo 0,  $K_p = cte$ , así que  $e_{ss} = \frac{1}{1+cte} = cte'$ .

En este caso, nunca se puede alcanzar el valor deseado.

**Ejemplo:** ¿Que se puede hacer para eliminar el error ante la entrada escalón de un sistema tipo 0?



## Ejemplos de error permanente II



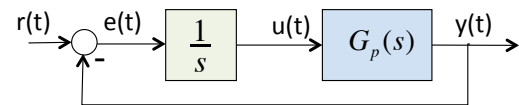
**Ejemplo:** ¿Dado un sistema tipo 0, se puede eliminar el error ante la entrada escalón con una realimentación unitaria?

Si un sistema es tipo 0,  $K_p = cte$ , así que  $e_{ss} = \frac{1}{1+cte} = cte'$ .

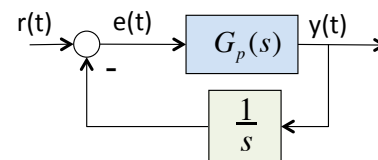
En este caso, nunca se puede alcanzar el valor deseado.

**Ejemplo:** ¿Que se puede hacer para eliminar el error ante la entrada escalón de un sistema tipo 0?

- Añadirle un integrador en el controlador y utilizar una realimentación unitaria.



- Añadirle un integrador en la realimentación unitaria.



## Ejemplos de error permanente II



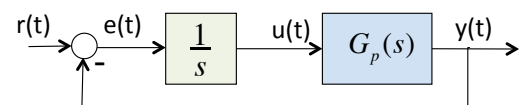
**Ejemplo:** ¿Dado un sistema tipo 0, se puede eliminar el error ante la entrada escalón con una realimentación unitaria?

Si un sistema es tipo 0,  $K_p = cte$ , así que  $e_{ss} = \frac{1}{1+cte} = cte'$ .

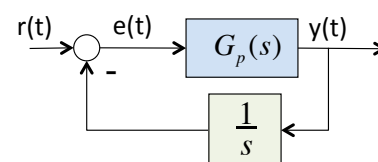
En este caso, nunca se puede alcanzar el valor deseado.

**Ejemplo:** ¿Que se puede hacer para eliminar el error ante la entrada escalón de un sistema tipo 0?

- Añadirle un integrador en el controlador y utilizar una realimentación unitaria. Esto hace que tengamos un sistema tipo 1, por lo que presentará un error nulo frente al escalón



- Añadirle un integrador en la realimentación unitaria.



## Ejemplos de error permanente II



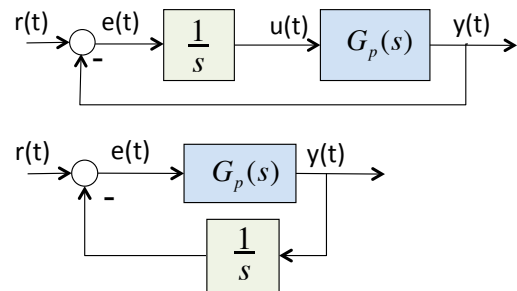
**Ejemplo:** ¿Dado un sistema tipo 0, se puede eliminar el error ante la entrada escalón con una realimentación unitaria?

Si un sistema es tipo 0,  $K_p = cte$ , así que  $e_{ss} = \frac{1}{1+cte} = cte'$ .

En este caso, nunca se puede alcanzar el valor deseado.

**Ejemplo:** ¿Que se puede hacer para eliminar el error ante la entrada escalón de un sistema tipo 0?

- Añadirle un integrador en el controlador y utilizar una realimentación unitaria. Esto hace que tengamos un sistema tipo 1, por lo que presentará un error nulo frente al escalón. Además, como el error es el verdadero  $r(t)-y(t)$  será 0.
- Añadirle un integrador en la realimentación unitaria.



## Ejemplos de error permanente II



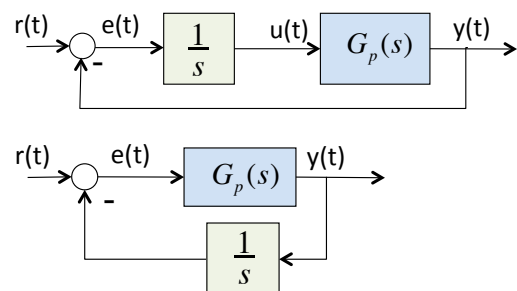
**Ejemplo:** ¿Dado un sistema tipo 0, se puede eliminar el error ante la entrada escalón con una realimentación unitaria?

Si un sistema es tipo 0,  $K_p = cte$ , así que  $e_{ss} = \frac{1}{1+cte} = cte'$ .

En este caso, nunca se puede alcanzar el valor deseado.

**Ejemplo:** ¿Que se puede hacer para eliminar el error ante la entrada escalón de un sistema tipo 0?

- Añadirle un integrador en el controlador y utilizar una realimentación unitaria. Esto hace que tengamos un sistema tipo 1, por lo que presentará un error nulo frente al escalón. Además, como el error es el verdadero  $r(t)-y(t)$  será 0.
- Añadirle un integrador en la realimentación unitaria. Esto hace que tengamos un sistema tipo 1, por lo que presentará un error nulo frente al escalón.



## Ejemplos de error permanente II



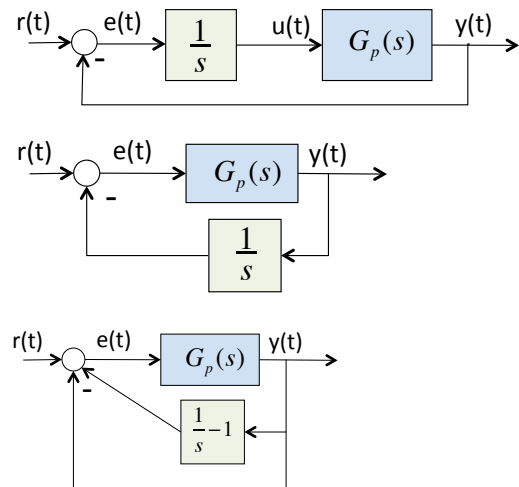
**Ejemplo:** ¿Dado un sistema tipo 0, se puede eliminar el error ante la entrada escalón con una realimentación unitaria?

Si un sistema es tipo 0,  $K_p = cte$ , así que  $e_{ss} = \frac{1}{1+cte} = cte'$ .

En este caso, nunca se puede alcanzar el valor deseado.

**Ejemplo:** ¿Que se puede hacer para eliminar el error ante la entrada escalón de un sistema tipo 0?

- Añadirle un integrador en el controlador y utilizar una realimentación unitaria. Esto hace que tengamos un sistema tipo 1, por lo que presentará un error nulo frente al escalón. Además, como el error es el verdadero  $r(t)-y(t)$  será 0.
- Añadirle un integrador en la realimentación unitaria. Esto hace que tengamos un sistema tipo 1, por lo que presentará un error nulo frente al escalón. Pero en esta caso el error  $e(t)$  no es el verdadero, así que la salida no tiene porque seguir a la entrada.



## Ejemplos de error permanente II



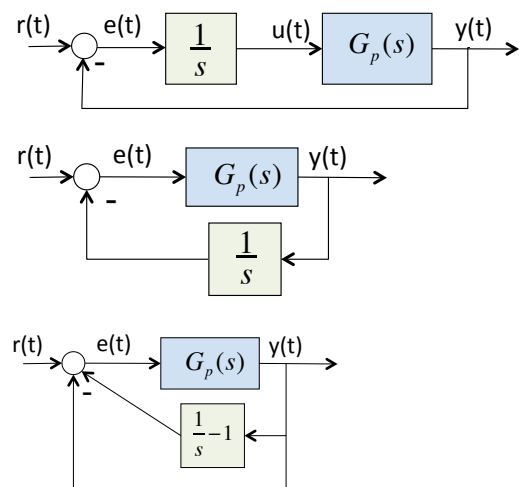
**Ejemplo:** ¿Dado un sistema tipo 0, se puede eliminar el error ante la entrada escalón con una realimentación unitaria?

Si un sistema es tipo 0,  $K_p = cte$ , así que  $e_{ss} = \frac{1}{1+cte} = cte'$ .

En este caso, nunca se puede alcanzar el valor deseado.

**Ejemplo:** ¿Que se puede hacer para eliminar el error ante la entrada escalón de un sistema tipo 0?

- Añadirle un integrador en el controlador y utilizar una realimentación unitaria. Esto hace que tengamos un sistema tipo 1, por lo que presentará un error nulo frente al escalón. Además, como el error es el verdadero  $r(t)-y(t)$  será 0.
- Añadirle un integrador en la realimentación unitaria. Esto hace que tengamos un sistema tipo 1, por lo que presentará un error nulo frente al escalón. Pero en esta caso el error  $e(t)$  no es el verdadero, así que la salida no tiene porque seguir a la entrada. Para saber si la salida sigue a la entrada, hay que pasar a la representación  $G_{eq}(s)$ , y determinar el tipo de  $G_{eq}(s)$ .





## Ejemplos de error permanente III

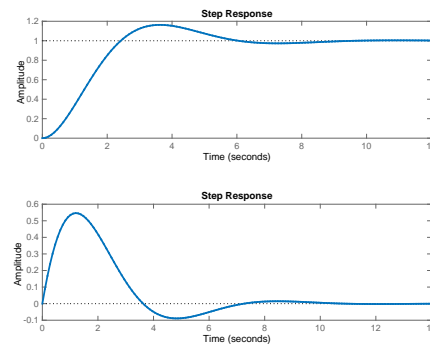


**Ejemplo:** Controlar un sistema planta  $G_p(s) = \frac{1}{s+1}$  con a) un controlador integral realimentado unitariamente o b) una realimentación integral. Estudiar el comportamiento del error verdadero ante la entrada escalón de forma teórica y simulada.

- Con el controlador integral y realimentación unitaria,  $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow$  Tipo 1. demás el error es el verdadero. Presenta error nulo frente a la entrada escalón.

```
gp=tf(1,[1,1]);
gc=tf(1,[1,0]);
subplot(2,1,1);step(feedback(gc*gp,1))
gh=tf(1,[1,0]);
subplot(2,1,2);step(feedback(gp,gh))
geq=feedback(gp,gh-1)
```

- Con realimentación integral,  $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow$  Tipo 1. Como el error no es el verdadero, tenemos que obtener la  $G_{eq}(s) = \frac{G_p(s)}{1+G_p(s)(H(s)-1)} = \frac{s}{s^2+1}$ . Su Tipo es 0. Por lo tanto, presentará un error finito ante la entrada escalón:  
 $K_p = 0 \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+0} = 1.$



## Ejemplos de error permanente IV



**Ejemplo:** Controlar la planta  $G_p(s) = \frac{1}{(s-5)(s+10)}$  con un controlador proporcional realimentado unitariamente. Determinar la ganancia  $K$  del controlador que asegura que el error estacionario ante la entrada escalón es menor que el 10%.



## Ejemplos de error permanente IV



**Ejemplo:** Controlar la planta  $G_p(s) = \frac{1}{(s-5)(s+10)}$  con un controlador proporcional realimentado unitariamente. Determinar la ganancia  $K$  del controlador que asegura que el error estacionario ante la entrada escalón es menor que el 10%.

Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K}{(s-5)(s+10)}$$



## Ejemplos de error permanente IV



**Ejemplo:** Controlar la planta  $G_p(s) = \frac{1}{(s-5)(s+10)}$  con un controlador proporcional realimentado unitariamente. Determinar la ganancia  $K$  del controlador que asegura que el error estacionario ante la entrada escalón es menor que el 10%.

Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K}{(s-5)(s+10)}$$

$$\text{Tipo 0} \rightarrow K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH(s) = -\frac{K}{50} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{50}{50-K}$$



## Ejemplos de error permanente IV

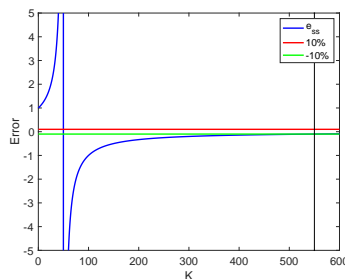


**Ejemplo:** Controlar la planta  $G_p(s) = \frac{1}{(s-5)(s+10)}$  con un controlador proporcional realimentado unitariamente. Determinar la ganancia  $K$  del controlador que asegura que el error estacionario ante la entrada escalón es menor que el 10%.

Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K}{(s-5)(s+10)}$$

$$\text{Tipo 0} \rightarrow K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH(s) = -\frac{K}{50} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{50}{50-K}$$



El signo - en  $\frac{50}{50-K}$ , da dos comportamientos de  $e_{ss}$  diferentes según  $K$  crece.



## Ejemplos de error permanente IV

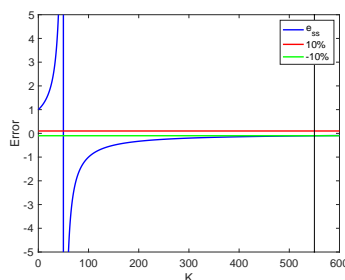


**Ejemplo:** Controlar la planta  $G_p(s) = \frac{1}{(s-5)(s+10)}$  con un controlador proporcional realimentado unitariamente. Determinar la ganancia  $K$  del controlador que asegura que el error estacionario ante la entrada escalón es menor que el 10%.

Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K}{(s-5)(s+10)}$$

$$\text{Tipo 0} \rightarrow K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH(s) = -\frac{K}{50} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{50}{50-K} < -0,1 \rightarrow K > 550$$



El signo - en  $\frac{50}{50-K}$ , da dos comportamientos de  $e_{ss}$  diferentes según  $K$  crece.



# Ejemplos de error permanente IV



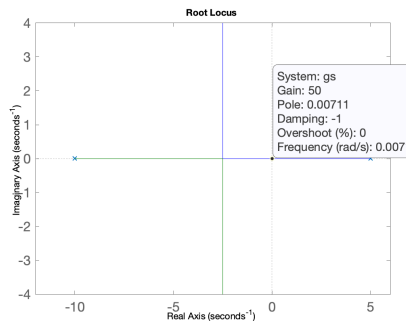
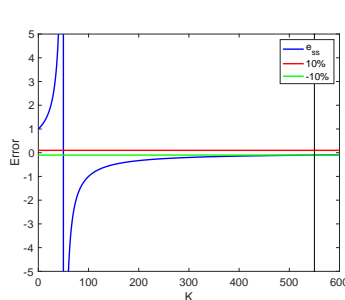
**Ejemplo:** Controlar la planta  $G_p(s) = \frac{1}{(s-5)(s+10)}$  con un controlador proporcional realimentado unitariamente. Determinar la ganancia  $K$  del controlador que asegura que el error estacionario ante la entrada escalón es menor que el 10%.

Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K}{(s-5)(s+10)}$$

$$\text{Tipo 0} \rightarrow K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH(s) = -\frac{K}{50} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{50}{50-K} < -0,1 \rightarrow K > 550$$

Lugar de las raíces es estable para  $K > 50$ .



El signo - en  $\frac{50}{50-K}$ , da dos comportamientos de  $e_{ss}$  diferentes según  $K$  crece.



# Ejemplos de error permanente IV



**Ejemplo:** Controlar la planta  $G_p(s) = \frac{1}{(s-5)(s+10)}$  con un controlador proporcional realimentado unitariamente. Determinar la ganancia  $K$  del controlador que asegura que el error estacionario ante la entrada escalón es menor que el 10%.

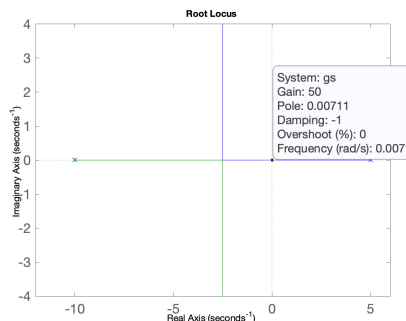
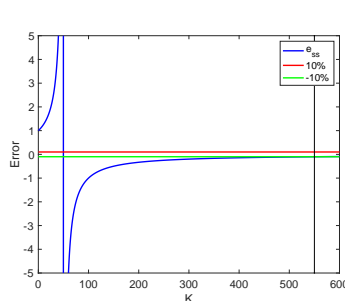
Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K}{(s-5)(s+10)}$$

$$\text{Tipo 0} \rightarrow K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH(s) = -\frac{K}{50} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{50}{50-K} < -0,1 \rightarrow K > 550$$

Lugar de las raíces es estable para  $K > 50$ .

Error es menor que 10% para  $K > 550$ .



El signo - en  $\frac{50}{50-K}$ , da dos comportamientos de  $e_{ss}$  diferentes según  $K$  crece.





## Ejemplos de error permanente IV

**Ejemplo:** Controlar la planta  $G_p(s) = \frac{1}{(s-5)(s+10)}$  con un controlador proporcional realimentado unitariamente. Determinar la ganancia  $K$  del controlador que asegura que el error estacionario ante la entrada escalón es menor que el 10%.

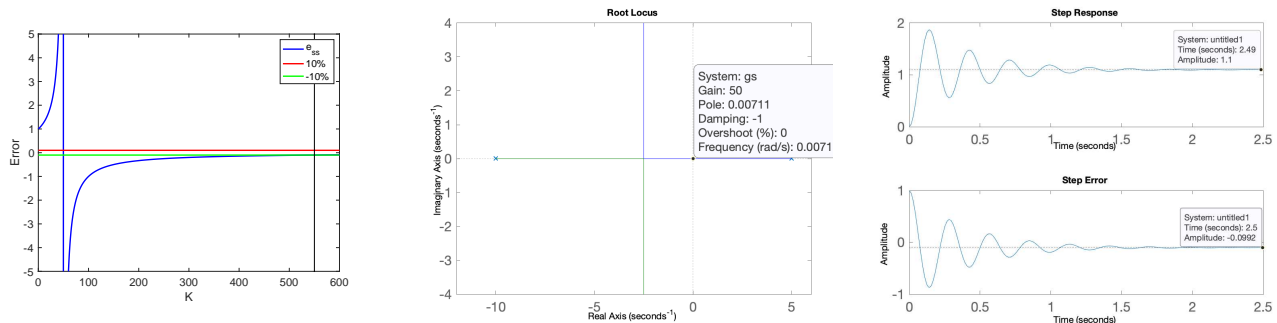
Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K}{(s-5)(s+10)}$$

$$\text{Tipo 0} \rightarrow K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH(s) = -\frac{K}{50} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{50}{50-K} < -0,1 \rightarrow K > 550$$

Lugar de las raíces es estable para  $K > 50$ .

Error es menor que 10% para  $K > 550$ .



El signo - en  $\frac{50}{50-K}$ , da dos comportamientos de  $e_{ss}$  diferentes según  $K$  crece.



## Ejemplos de error permanente V

**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(s) = \frac{s^2 - 6s + 13}{s(s+3)}$  mediante un controlador adecuado y una realimentación unitaria, que asegure que el  $e_{ss} < 10\%$  ante la entrada rampa.



## Ejemplos de error permanente V



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(s) = \frac{s^2 - 6s + 13}{s(s+3)}$  mediante un controlador adecuado y una realimentación unitaria, que asegure que el  $e_{ss} < 10\%$  ante la entrada rampa.

Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.



## Ejemplos de error permanente V



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(s) = \frac{s^2 - 6s + 13}{s(s+3)}$  mediante un controlador adecuado y una realimentación unitaria, que asegure que el  $e_{ss} < 10\%$  ante la entrada rampa.

Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

Como el  $G_p(s)$  es Tipo 1, si ponemos un controlador proporcional, conseguimos un error finito ante la entrada rampa



## Ejemplos de error permanente V



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(s) = \frac{s^2 - 6s + 13}{s(s+3)}$  mediante un controlador adecuado y una realimentación unitaria, que asegure que el  $e_{ss} < 10\%$  ante la entrada rampa.

Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

Como el  $G_p(s)$  es Tipo 1, si ponemos un controlador proporcional, conseguimos un error finito ante la entrada rampa

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K(s^2 - 6s + 13)}{s(s+3)}$$



## Ejemplos de error permanente V



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(s) = \frac{s^2 - 6s + 13}{s(s+3)}$  mediante un controlador adecuado y una realimentación unitaria, que asegure que el  $e_{ss} < 10\%$  ante la entrada rampa.

Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

Como el  $G_p(s)$  es Tipo 1, si ponemos un controlador proporcional, conseguimos un error finito ante la entrada rampa

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K(s^2 - 6s + 13)}{s(s+3)}$$

$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH(s) = \frac{13K}{3} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{3}{13K} < 0,1 \rightarrow K > 2,3$$



# Ejemplos de error permanente V



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(s) = \frac{s^2 - 6s + 13}{s(s+3)}$  mediante un controlador adecuado y una realimentación unitaria, que asegure que el  $e_{ss} < 10\%$  ante la entrada rampa.

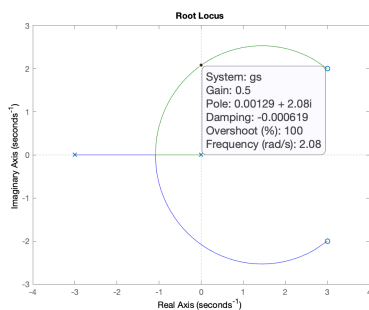
Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

Como el  $G_p(s)$  es Tipo 1, si ponemos un controlador proporcional, conseguimos un error finito ante la entrada rampa

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K(s^2 - 6s + 13)}{s(s+3)}$$

$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH(s) = \frac{13K}{3} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{3}{13K} < 0,1 \rightarrow K > 2,3$$

Lugar de las raíces es estable para  $K < 0,5$ .



# Ejemplos de error permanente V



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(s) = \frac{s^2 - 6s + 13}{s(s+3)}$  mediante un controlador adecuado y una realimentación unitaria, que asegure que el  $e_{ss} < 10\%$  ante la entrada rampa.

Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

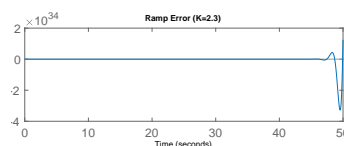
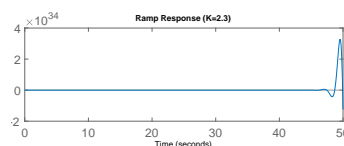
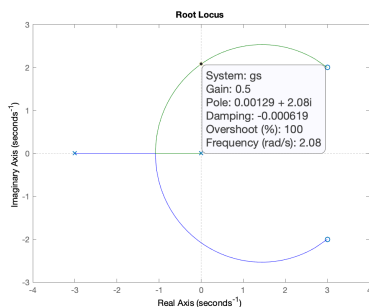
Como el  $G_p(s)$  es Tipo 1, si ponemos un controlador proporcional, conseguimos un error finito ante la entrada rampa

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K(s^2 - 6s + 13)}{s(s+3)}$$

$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH(s) = \frac{13K}{3} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{3}{13K} < 0,1 \rightarrow K > 2,3$$

Lugar de las raíces es estable para  $K < 0,5$ .

Error no puede ser menor que 10%.





# Ejemplos de error permanente V



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(s) = \frac{s^2 - 6s + 13}{s(s+3)}$  mediante un controlador adecuado y una realimentación unitaria, que asegure que el  $e_{ss} < 10\%$  ante la entrada rampa.

Sistema realimentado con  $H(s) = 1 \rightarrow$  error verdadero = error de control.

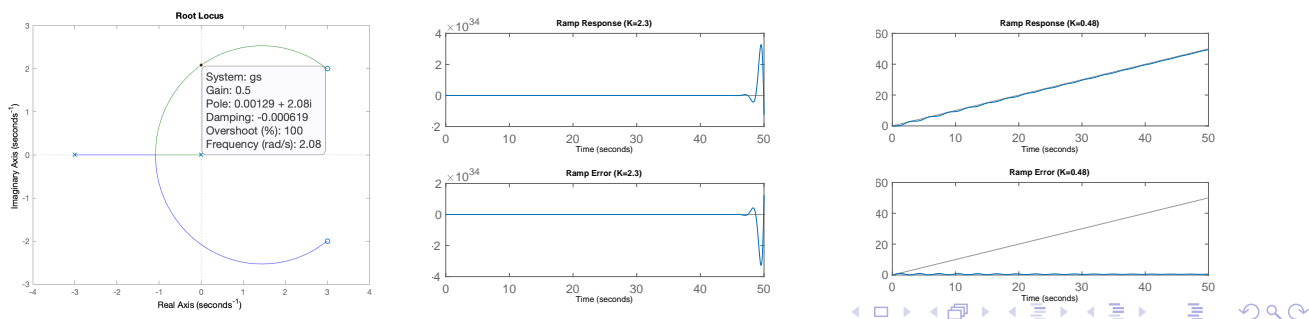
Como el  $G_p(s)$  es Tipo 1, si ponemos un controlador proporcional, conseguimos un error finito ante la entrada rampa

$$GH(s) = G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{K(s^2 - 6s + 13)}{s(s+3)}$$

$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH(s) = \frac{13K}{3} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{3}{13K} < 0,1 \rightarrow K > 2,3$$

Lugar de las raíces es estable para  $K < 0,5$ .

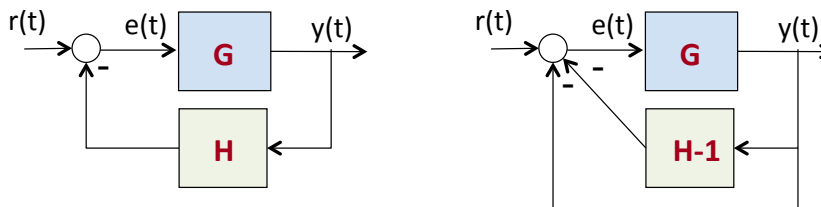
Error no puede ser menor que 10%. En el mejor de los casos,  $e_{ss} = \frac{3}{13 \cdot 0,5} = 46\%$



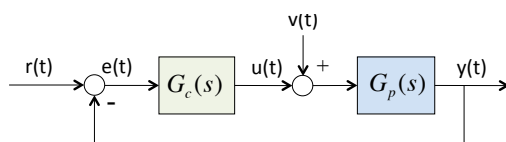
# Caracterización del error permanente



- Hay que distinguir entre el error del sistema y el verdadero. Y si estamos calculando el error verdadero, caracterizar el comportamiento del error a partir del tipo del sistema  $G_{eq}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-1]}$



- En el caso en el que haya perturbaciones, se calcula la señal de salida frente a todas las entradas a partir del principio de superposición, y el error como la diferencia entre la entrada y la salida.



$$Y_r(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} R(s)$$

$$Y_v(s) = \frac{G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} V(s)$$

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_v(s)$$

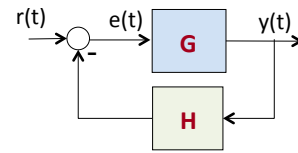
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[R(s) - Y(s)]$$

Hacer el análisis con las entradas correspondientes.

# Caracterización del error transitorio y permanente



En algunos casos, también es necesario caracterizar el comportamiento del error en el transitorio.

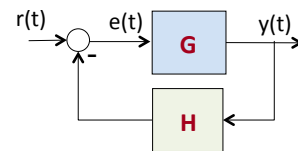


# Caracterización del error transitorio y permanente



En algunos casos, también es necesario caracterizar el comportamiento del error en el transitorio.

- $E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) = M_e(s)R(s)$ , con  $M_e(s)$  la FT del error.

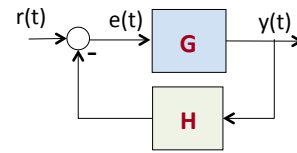


# Caracterización del error transitorio y permanente



En algunos casos, también es necesario caracterizar el comportamiento del error en el transitorio.

- $E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) = M_e(s)R(s)$ , con  $M_e(s)$  la FT del error.
- En el espacio temporal, usamos la convolución:  $e(t) = \int_0^\infty m_e(\tau)r(t-\tau)d\tau$  donde  $m_e(t)$  es la respuesta del sistema a la entrada impulso (o la transformada de Laplace inversa de  $M_e(s)$ )

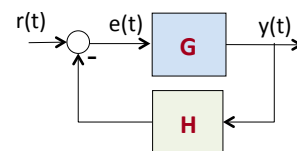


# Caracterización del error transitorio y permanente



En algunos casos, también es necesario caracterizar el comportamiento del error en el transitorio.

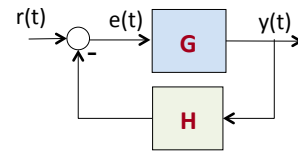
- $E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) = M_e(s)R(s)$ , con  $M_e(s)$  la FT del error.
- En el espacio temporal, usamos la convolución:  $e(t) = \int_0^\infty m_e(\tau)r(t-\tau)d\tau$  donde  $m_e(t)$  es la respuesta del sistema a la entrada impulso (o la transformada de Laplace inversa de  $M_e(s)$ )
- Si  $\forall t \exists$  las  $n$  primeras derivadas de  $r(t - \tau)$ , ésta se puede desarrollar por Taylor:  
$$r(t - \tau) = r(t) - \dot{r}(t)\tau + \frac{\ddot{r}(t)}{2}\tau^2 - \dots$$



# Caracterización del error transitorio y permanente



En algunos casos, también es necesario caracterizar el comportamiento del error en el transitorio.



- $E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) = M_e(s)R(s)$ , con  $M_e(s)$  la FT del error.
- En el espacio temporal, usamos la convolución:  $e(t) = \int_0^\infty m_e(\tau)r(t-\tau)d\tau$  donde  $m_e(t)$  es la respuesta del sistema a la entrada impulso (o la transformada de Laplace inversa de  $M_e(s)$ )
- Si  $\forall t \exists$  las  $n$  primeras derivadas de  $r(t - \tau)$ , ésta se puede desarrollar por Taylor:  

$$r(t - \tau) = r(t) - \dot{r}(t)\tau + \frac{\ddot{r}(t)}{2}\tau^2 - \dots$$
- $$e(t) = \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)(r(t) - \dot{r}(t)\tau + \frac{\ddot{r}(t)}{2}\tau^2 - \dots)d\tau =$$
  

$$= r(t) \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)d\tau - \dot{r}(t) \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)\tau d\tau + \frac{\ddot{r}(t)}{2} \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)\tau^2 d\tau - \dots =$$
  

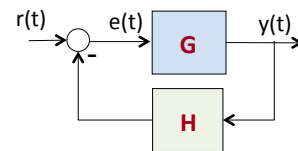
$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{k!} r^{(k)}(t), \text{ con } c_k = (-1)^k \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)\tau^k d\tau$$



# Caracterización del error transitorio y permanente



En algunos casos, también es necesario caracterizar el comportamiento del error en el transitorio.



- $E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) = M_e(s)R(s)$ , con  $M_e(s)$  la FT del error.
- En el espacio temporal, usamos la convolución:  $e(t) = \int_0^\infty m_e(\tau)r(t-\tau)d\tau$  donde  $m_e(t)$  es la respuesta del sistema a la entrada impulso (o la transformada de Laplace inversa de  $M_e(s)$ )
- Si  $\forall t \exists$  las  $n$  primeras derivadas de  $r(t - \tau)$ , ésta se puede desarrollar por Taylor:  

$$r(t - \tau) = r(t) - \dot{r}(t)\tau + \frac{\ddot{r}(t)}{2}\tau^2 - \dots$$
- $$e(t) = \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)(r(t) - \dot{r}(t)\tau + \frac{\ddot{r}(t)}{2}\tau^2 - \dots)d\tau =$$
  

$$= r(t) \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)d\tau - \dot{r}(t) \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)\tau d\tau + \frac{\ddot{r}(t)}{2} \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)\tau^2 d\tau - \dots =$$
  

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{k!} r^{(k)}(t), \text{ con } c_k = (-1)^k \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)\tau^k d\tau$$

- Cálculo de los  $c_k$  (coeficientes generalizados de error):

$$\lim_{s \rightarrow 0} M_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau) d\tau = c_0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{dM_e(s)}{ds} = - \lim_{s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)e^{-s\tau} \tau d\tau = - \int_{-\infty}^\infty m_e(\tau)\tau d\tau = c_1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^k M_e(s)}{ds^k} = c_k$$



## Ejemplo de caracterización del error general



**Ejemplo:** Caracterizar, ante la entrada parábola y a lo largo de todo instante de tiempo, el error del sistema  $G(s) = \frac{1}{s+1}$  realimentado unitariamente.



## Ejemplo de caracterización del error general



**Ejemplo:** Caracterizar, ante la entrada parábola y a lo largo de todo instante de tiempo, el error del sistema  $G(s) = \frac{1}{s+1}$  realimentado unitariamente.

- $M_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1+s}{1+2s}$
- $e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} \frac{d^{(k)}x(t)}{d^k t} = c_0 t^2 + 2c_1 t + c_2$
- Constantes de error:  $c_k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{(k)}M_e(s)}{d^k s}$



# Ejemplo de caracterización del error general



**Ejemplo:** Caracterizar, ante la entrada parábola y a lo largo de todo instante de tiempo, el error del sistema  $G(s) = \frac{1}{s+1}$  realimentado unitariamente.

- $M_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1+s}{1+2s}$
- $e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} \frac{d^{(k)}x(t)}{d^k t} = c_0 t^2 + 2c_1 t + c_2$
- Constantes de error:  $c_k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{(k)}M_e(s)}{d^k s}$

```
syms s
gs=1/(s+1)
Mes=simple(simple(1/(1+gs)))
c0=eval(subs(Mes,'s',0));
Mes1=diff(Mes,'s');
c1=eval(subs(Mes1,'s',0));
Mes2=diff(Mes1,'s');
c2=eval(subs(Mes2,'s',0));

Metf=tf([1,1],[1,2])
t=0:0.01:20
x=t.^2;
lsim(Metf,x,t)
hold on;
t=0:1:20;
plot(t,c0*t.^2+2*c1*t+c2,'mo')
```

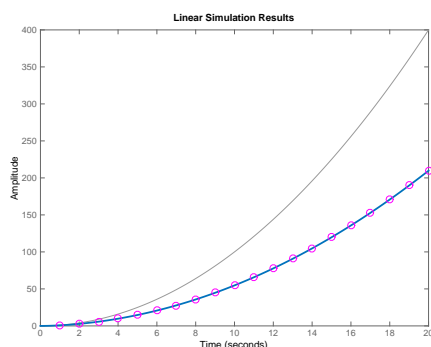


# Ejemplo de caracterización del error general



**Ejemplo:** Caracterizar, ante la entrada parábola y a lo largo de todo instante de tiempo, el error del sistema  $G(s) = \frac{1}{s+1}$  realimentado unitariamente.

- $M_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1+s}{1+2s}$
- $e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} \frac{d^{(k)}x(t)}{d^k t} = c_0 t^2 + 2c_1 t + c_2$
- Constantes de error:  $c_k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{(k)}M_e(s)}{d^k s}$



```
syms s
gs=1/(s+1)
Mes=simple(simple(1/(1+gs)))
c0=eval(subs(Mes,'s',0));
Mes1=diff(Mes,'s');
c1=eval(subs(Mes1,'s',0));
Mes2=diff(Mes1,'s');
c2=eval(subs(Mes2,'s',0));

Metf=tf([1,1],[1,2])
t=0:0.01:20
x=t.^2;
lsim(Metf,x,t)
hold on;
t=0:1:20;
plot(t,c0*t.^2+2*c1*t+c2,'mo')
```



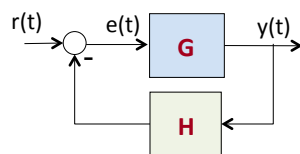


- 1 Objetivos
- 2 Precisión y tipos de error
- 3 Caracterización del error de sistemas continuos
- 4 Caracterización del error de sistemas discretos**

## Constantes de error permanente I



En discreto, al igual que en continuo, lo habitual es que se busque que la señal de salida siga a la entrada. Las diferencias entre el error de control y el error verdadero se mantienen.



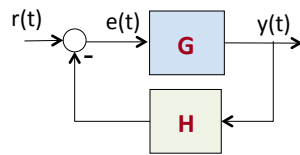
Para caracterizar el error en el permanente ante diferentes entradas se usa su FT ( $E(z) = \frac{1}{1+G(z)H(z)} R(z)$ ) y unas constantes de error<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Alternativamente, llega con calcular el limite de la expresión del error genérica ante cualquiera de las entradas clásicas. Además, las entradas de orden superior (como la parábola) o las combinaciones de ellas tienen comportamientos análogos a continuos.

# Constantes de error permanente I



En discreto, al igual que en continuo, lo habitual es que se busque que la señal de salida siga a la entrada. Las diferencias entre el error de control y el error verdadero se mantienen.



Para caracterizar el error en el permanente ante diferentes entradas se usa su FT ( $E(z) = \frac{1}{1+G(z)H(z)}R(z)$ ) y unas constantes de error<sup>1</sup>

**Error ante la entrada escalón de altura M:**  $R(z) = \frac{Mz}{z-1}$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{zM}{(1+G(z)H(z))} = \frac{M}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z)}$$

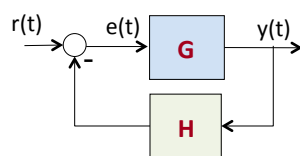
Si  $\exists$  el lim y definimos  $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z)$  (cte de error de posición),  $\implies e_{ss} = \frac{M}{1+K_p}$ .

<sup>1</sup> Alternativamente, llega con calcular el limite de la expresión del error genérica ante cualquiera de las entradas clásicas. Además, las entradas de orden superior (como la parábola) o las combinaciones de ellas tienen comportamientos análogos a continuos.

# Constantes de error permanente I



En discreto, al igual que en continuo, lo habitual es que se busque que la señal de salida siga a la entrada. Las diferencias entre el error de control y el error verdadero se mantienen.



Para caracterizar el error en el permanente ante diferentes entradas se usa su FT ( $E(z) = \frac{1}{1+G(z)H(z)}R(z)$ ) y unas constantes de error<sup>1</sup>

**Error ante la entrada escalón de altura M:**  $R(z) = \frac{Mz}{z-1}$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{zM}{(1+G(z)H(z))} = \frac{M}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z)}$$

Si  $\exists$  el lim y definimos  $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z)$  (cte de error de posición),  $\implies e_{ss} = \frac{M}{1+K_p}$ .

**Error ante la entrada rampa con pendiente M:**  $R(z) = \frac{zM}{(z-1)^2}$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{zM}{(z-1)(1+G(z)H(z))} = \frac{M}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)H(z)}$$

Si  $\exists$  el lim y definimos  $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)H(z)$  (cte. de error de velocidad),

$$\implies e_{ss} = \frac{M}{K_v}$$

<sup>1</sup> Alternativamente, llega con calcular el limite de la expresión del error genérica ante cualquiera de las entradas clásicas. Además, las entradas de orden superior (como la parábola) o las combinaciones de ellas tienen comportamientos análogos a continuos.



# Clasificación del error respecto al tipo de sistema I



Acabamos de ver que el error del sistema ante diferentes entradas depende del  $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^k G(z)H(z)$ .



# Clasificación del error respecto al tipo de sistema I



Acabamos de ver que el error del sistema ante diferentes entradas depende del  $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^k G(z)H(z)$ .

De forma genérica  $G(z)H(z)$  se puede escribir como una función

$$\frac{\prod (a_i z + 1) \prod (b_i z^2 + c_i z + 1)}{(z - 1)^n \prod (d_i z + 1) \prod (e_i z^2 + f_i z + 1)}$$



# Clasificación del error respecto al tipo de sistema I



Acabamos de ver que el error del sistema ante diferentes entradas depende del  $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^k G(z)H(z)$ .

De forma genérica  $G(z)H(z)$  se puede escribir como una función

$$\frac{\prod (a_i z + 1) \prod (b_i z^2 + c_i z + 1)}{(z - 1)^n \prod (d_i z + 1) \prod (e_i z^2 + f_i z + 1)}$$

Según el número de polos en 1 que tiene la función  $G(z)H(z)$  y la función de entrada (que proporciona los  $k$  ceros en 1 de la expresión  $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^k G(z)H(z)$ ) las constantes de error tomarán el valor 0, constante o infinito.



# Clasificación del error respecto al tipo de sistema I



Acabamos de ver que el error del sistema ante diferentes entradas depende del  $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^k G(z)H(z)$ .

De forma genérica  $G(z)H(z)$  se puede escribir como una función

$$\frac{\prod (a_i z + 1) \prod (b_i z^2 + c_i z + 1)}{(z - 1)^n \prod (d_i z + 1) \prod (e_i z^2 + f_i z + 1)}$$

Según el número de polos en 1 que tiene la función  $G(z)H(z)$  y la función de entrada (que proporciona los  $k$  ceros en 1 de la expresión  $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^k G(z)H(z)$ ) las constantes de error tomarán el valor 0, constante o infinito.

Siguiendo esta idea, se dice que un **sistema es tipo  $n$  si su función  $G(z)H(z)$  tiene  $n$  polos en el  $z=1$ .**



## Clasificación del error respecto al tipo de sistema II



Según el tipo del sistema, se cumplen las siguientes propiedades



## Clasificación del error respecto al tipo de sistema II



Según el tipo del sistema, se cumplen las siguientes propiedades

Respecto a las constantes de error:

TIPO	"G(z)H(z)"	$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z)$	$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)G(z)H(z)$
0	K	K	0
1	$\frac{K}{z-1}$	$\infty$	K
2	$\frac{K}{(z-1)^2}$	$\infty$	$\infty$

"G(z)H(z)" muestra la tendencia principal del sistema, es decir su ganancia y el número de polos en  $z=1$ , ya que el resto de polos y ceros, al tomar el limite, contribuyen a la ganancia.





Según el tipo del sistema, se cumplen las siguientes propiedades

Respecto a las constantes de error:

TIPO	"G(z)H(z)"	$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z)$	$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)H(z)$
0	K	K	0
1	$\frac{K}{z-1}$	$\infty$	K
2	$\frac{K}{(z-1)^2}$	$\infty$	$\infty$

Respecto al error

TIPO	Escalón: $e_{ss} = \frac{M}{1+K_p}$	Rampa: $e_{ss} = \frac{M}{K_v}$
0	$\frac{M}{1+K}$	$\infty$
1	0	$\frac{M}{K}$
2	0	0

"G(z)H(z)" muestra la tendencia principal del sistema, es decir su ganancia y el número de polos en z=1, ya que el resto de polos y ceros, al tomar el limite, contribuyen a la ganancia.

## Ejemplo de error permanente en discreto I



**Ejemplo:** Cual es el error ante la entrada escalón de los siguientes sistemas discretos realimentados unitariamente?

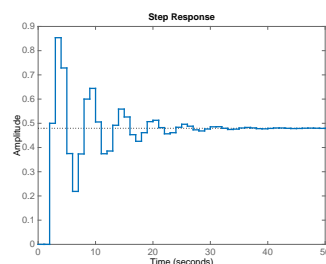
$$G(z) = \frac{0,5}{z^2 - 0,7071z + 0,25}$$

Tipo 0: presenta un error finito

$$K_p = \frac{0,5}{1 - 0,7071 + 0,25} = 0,9210$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0,5206$$

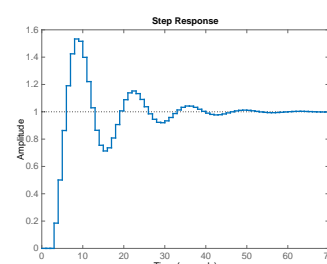
```
n1=[];
d1=[0.5*exp(j*pi/4), 0.5*exp(-j*pi/4)];
gz=zpk(n1,d1,0.5,1)
glc=feedback(gz,1)
[n,d]=tfdata(glc,'v');
roots(d)
step(glc)
```



$$G(z) = \frac{0,185}{(z-1)(z^2 - 0,7071z + 0,25)}$$

Tipo 1: presenta error nulo frente al escalón.

```
n1=[];
d1=[0.5*exp(j*pi/4), 0.5*exp(-j*pi/4), 1];
gz=zpk(n1,d1,0.185,1)
glc=feedback(gz,1)
[n,d]=tfdata(glc,'v');
roots(d)
step(glc)
```



## Ejemplo de error permanente en discreto II



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(z) = \frac{z-0,8}{z-0,7}$  de forma que se tenga un error finito del 10 % ante la entrada rampa y un tiempo estacionario menor de 40 s.



## Ejemplo de error permanente en discreto II



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(z) = \frac{z-0,8}{z-0,7}$  de forma que se tenga un error finito del 10 % ante la entrada rampa y un tiempo estacionario menor de 40 s.

$G_p(z)$  es Tipo 0. Para tener un error finito frente a la entrada rampa, necesitamos que  $GH(z)$  tenga un polo en  $z = 1 \rightarrow G_c(z) = \frac{K}{z-1}$



## Ejemplo de error permanente en discreto II



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(z) = \frac{z-0,8}{z-0,7}$  de forma que se tenga un error finito del 10 % ante la entrada rampa y un tiempo estacionario menor de 40 s.

$G_p(z)$  es Tipo 0. Para tener un error finito frente a la entrada rampa, necesitamos que  $GH(z)$  tenga un polo en  $z = 1 \rightarrow G_c(z) = \frac{K}{z-1}$

$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(z-0,8)}{(z-0,7)(z-1)} = 0,66K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} < 0,1 \rightarrow K > 15$$



## Ejemplo de error permanente en discreto II

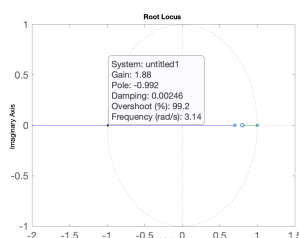


**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(z) = \frac{z-0,8}{z-0,7}$  de forma que se tenga un error finito del 10 % ante la entrada rampa y un tiempo estacionario menor de 40 s.

$G_p(z)$  es Tipo 0. Para tener un error finito frente a la entrada rampa, necesitamos que  $GH(z)$  tenga un polo en  $z = 1 \rightarrow G_c(z) = \frac{K}{z-1}$

$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(z-0,8)}{(z-0,7)(z-1)} = 0,66K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} < 0,1 \rightarrow K > 15$$

Lugar de las raíces, estable para  $K < 1.88$ . Añadiendo solo un polo en  $z=1$ , no podemos encontrar una solución válida.



# Ejemplo de error permanente en discreto II



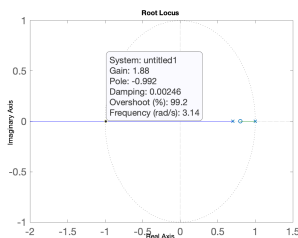
**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(z) = \frac{z-0,8}{z-0,7}$  de forma que se tenga un error finito del 10% ante la entrada rampa y un tiempo estacionario menor de 40 s.

$G_p(z)$  es Tipo 0. Para tener un error finito frente a la entrada rampa, necesitamos que  $GH(z)$  tenga un polo en  $z = 1 \rightarrow G_c(z) = \frac{K}{z-1}$

$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(z-0,8)}{(z-0,7)(z-1)} = 0,66K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} < 0,1 \rightarrow K > 15$$

Lugar de las raíces, estable para  $K < 1,88$ . Añadiendo solo un polo en  $z=1$ , no podemos encontrar una solución válida.

Podemos añadir un cero al controlador, dentro del círculo unidad, para que la asíntota que se va a menos infinito termine ahí  $\rightarrow G_c(z) = \frac{K(z+0,5)}{z-1}$



RL Controlador 1



# Ejemplo de error permanente en discreto II



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(z) = \frac{z-0,8}{z-0,7}$  de forma que se tenga un error finito del 10% ante la entrada rampa y un tiempo estacionario menor de 40 s.

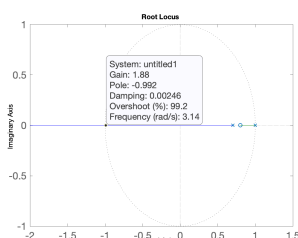
$G_p(z)$  es Tipo 0. Para tener un error finito frente a la entrada rampa, necesitamos que  $GH(z)$  tenga un polo en  $z = 1 \rightarrow G_c(z) = \frac{K}{z-1}$

$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(z-0,8)}{(z-0,7)(z-1)} = 0,66K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} < 0,1 \rightarrow K > 15$$

Lugar de las raíces, estable para  $K < 1,88$ . Añadiendo solo un polo en  $z=1$ , no podemos encontrar una solución válida.

Podemos añadir un cero al controlador, dentro del círculo unidad, para que la asíntota que se va a menos infinito termine ahí  $\rightarrow G_c(z) = \frac{K(z+0,5)}{z-1}$

$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(z-0,8)(z+0,5)}{(z-0,7)(z-1)} = K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} < 0,1 \rightarrow K > 10$$



RL Controlador 1



# Ejemplo de error permanente en discreto II



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(z) = \frac{z-0,8}{z-0,7}$  de forma que se tenga un error finito del 10% ante la entrada rampa y un tiempo estacionario menor de 40 s.

$G_p(z)$  es Tipo 0. Para tener un error finito frente a la entrada rampa, necesitamos que  $GH(z)$  tenga un polo en  $z = 1 \rightarrow G_c(z) = \frac{K}{z-1}$

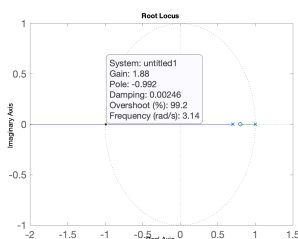
$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(z-0,8)}{(z-0,7)(z-1)} = 0,66K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} < 0,1 \rightarrow K > 15$$

Lugar de las raíces, estable para  $K < 1,88$ . Añadiendo solo un polo en  $z=1$ , no podemos encontrar una solución válida.

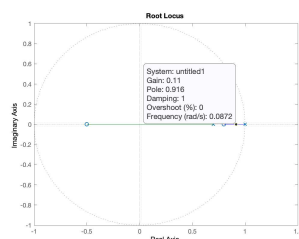
Podemos añadir un cero al controlador, dentro del círculo unidad, para que la asíntota que se va a menos infinito termine ahí  $\rightarrow G_c(z) = \frac{K(z+0,5)}{z-1}$

$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(z-0,8)(z+0,5)}{(z-0,7)(z-1)} = K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} < 0,1 \rightarrow K > 10$$

$$t_s = \frac{4}{\sigma} < 40 \rightarrow \sigma > 0,1 \rightarrow r < e^{-T\sigma} = 0,90. \text{ Polos dentro del círculo } r=0.9.$$



RL Controlador 1



RL Controlador 2

# Ejemplo de error permanente en discreto II



**Ejemplo:** Controlar el sistema  $G_p(z) = \frac{z-0,8}{z-0,7}$  de forma que se tenga un error finito del 10% ante la entrada rampa y un tiempo estacionario menor de 40 s.

$G_p(z)$  es Tipo 0. Para tener un error finito frente a la entrada rampa, necesitamos que  $GH(z)$  tenga un polo en  $z = 1 \rightarrow G_c(z) = \frac{K}{z-1}$

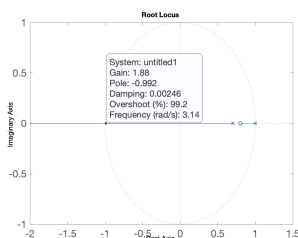
$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(z-0,8)}{(z-0,7)(z-1)} = 0,66K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} < 0,1 \rightarrow K > 15$$

Lugar de las raíces, estable para  $K < 1,88$ . Añadiendo solo un polo en  $z=1$ , no podemos encontrar una solución válida.

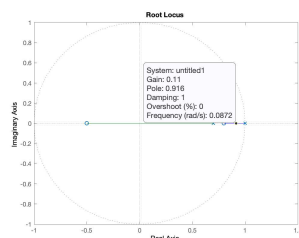
Podemos añadir un cero al controlador, dentro del círculo unidad, para que la asíntota que se va a menos infinito termine ahí  $\rightarrow G_c(z) = \frac{K(z+0,5)}{z-1}$

$$\text{Tipo 1} \rightarrow K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(z-0,8)(z+0,5)}{(z-0,7)(z-1)} = K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} < 0,1 \rightarrow K > 10$$

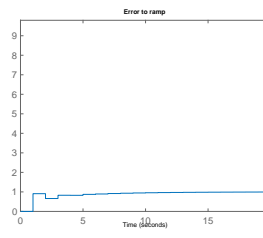
$$t_s = \frac{4}{\sigma} < 40 \rightarrow \sigma > 0,1 \rightarrow r < e^{-T\sigma} = 0,90. \text{ Polos dentro del círculo } r=0.9.$$



RL Controlador 1



RL Controlador 2



Error frente a la rampa