

Control con Modelos de Entrada y Salida

Ingeniería Electrónica de Comunicaciones

Eva Besada Portas

Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática.
Universidad Complutense de Madrid

Curso 2020-2021

Esquema



- 1 **Objetivos**
- 2 Redes de adelanto y de retraso
- 3 PIDs

Objetivos del tema



El objetivo del tema es el estudio de las propiedades y de los métodos de sintonización de los controladores de entrada y salida habituales.

Los controladores que estudiaremos son:

- Proporcional (P), Integral (I), derivativo (D) y variantes (PI, PD, PID)
- Redes de adelanto y retraso de fase.

Los métodos de sintonía de los parámetros del controlador:

- Métodos de Ziegler-Nichols para controles PID
- Ajuste del margen de fase
- Diseño óptimo: optimización de la integral del error y de la señal de control.

Esquema



- 1 Objetivos
- 2 Redes de adelanto y de retraso
- 3 PIDs

Redes de adelanto y retraso



Durante el análisis de la estabilidad de los sistemas mediante el diagrama de Nyquist vimos que:

- Un cambio en el margen de fase ϕ de un sistema en lazo abierto $G(s)H(s)$:
 - ▶ Puede estabilizar/desestabilizar al sistema en lazo cerrado $\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$
 - ★ Si el sistema es de fase mínima, es suficiente con comprobar el signo de los márgenes de fase y ganancia del sistema.
 - ★ En el caso genérico hay que ver el efecto del cambio del margen sobre el diagrama de Nyquist.
 - ▶ Cambiar la sobre-elongación del sistema (asociada a los polos dominantes): $\phi = 100\zeta$.
- El margen de fase ϕ del sistema en lazo abierto $G(s)H(s)$ se puede obtener sobre el diagrama de Nyquist o sobre su diagrama de Bode.

Para modificar el margen de fase ϕ del sistema en lazo abierto $G(s)H(s)$ podemos utilizar un controlador (que denominaremos red) que modifique el comportamiento en frecuencia del sistema en lazo abierto $G(s)H(s)$:

- Red de retardo: introduce un retraso local en la fase del sistema
- Red de adelanto: introduce un adelanto local en la fase del sistema

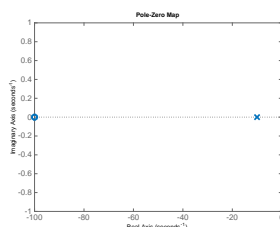
Red de retardo I



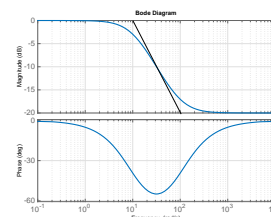
Red de retardo: $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ con $0 < a < 1$ y $T > 0$. (Ejemplo: $T = 0,1$ y $a=0,1$)

- Añade a $G(s) = G_c(s)G_p(s)$:

- ▶ Polo en $-\frac{1}{T}$
- ▶ Cero en $-\frac{1}{aT}$



- Diagrama de Bode $G_c(s)$:



- Como $a < 1$, el polo domina al cero.

- Introduce una caída en magnitud.
- Introduce un retardo máximo de fase ϕ_m a la frecuencia w_m

$$G_c(jw) = \frac{1+aTjw}{1+Tjw} = \frac{(1+aTjw)(1-Tjw)}{1+T^2w^2} = \frac{1+aT^2w^2+Tjw(a-1)}{1+T^2w^2}$$

- $w = 0 \rightarrow Re(G_c(jw)) = 1, Imag(G_c(jw)) = 0$.
- $w = \infty \rightarrow Re(G_c(jw)) = a, Imag(G_c(jw)) = 0 \rightarrow$ La caída total es de $20\log_{10}a$
- $arg(G_c(jw)) = \arctan\left(\frac{Tjw(a-1)}{1+aT^2w^2}\right)$.
- Obtener ϕ_m (derivando en simbólico con respecto a w e igualando a cero):
 - ▶ $w_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$
 - ▶ $\phi_m = \arctan\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)$

Red de retardo II



Red de retardo: $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ con $0 < a < 1$ y $T > 0$. Caída de $20 \log_{10} a$

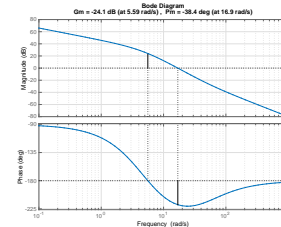
Desfase máximo $\phi_m = \arctan\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)$ en $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

Primero encuentra un polo en $\frac{-1}{T}$, después cero en $\frac{-1}{aT}$

A continuación se muestra, con un ejemplo, el proceso de **sintonización de los parámetros del controlador formado por la ganancia K y la red de retardo $G_c(s)$** .

Ejemplo: Dada la planta $G_p(s) = \frac{s+50}{s(s+5)^2}$, determinar los parámetros del controlador $G_c(s) = K \frac{1+aTs}{1+Ts}$ que permiten que el sistema en lazo cerrado tenga $e_{ss} = 0,005$ y la sobre-elongación asociada a $\zeta = 0,4$.

- 1 Ajustar la ganancia K para cumplir las especificaciones del error: $G_c(s)G_p(s)$ es un sistema tipo 1. Por lo tanto, presenta error nulo frente a la entrada escalón y error finito ante la entrada rampa: $e_{ss} = \frac{1}{K_V}$ con $K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G_p(s) = K \frac{50}{25} \rightarrow K = \frac{25}{50 \cdot 0,005} = 100$
- 2 Calcular el margen de fase y de ganancia $K \cdot G_p(s)$, estudiar la estabilidad del sistema, y comprobar si es necesario corregirlo. Ambos son negativos, por lo que el sistema en lazo cerrado será inestable.



Red de retardo III

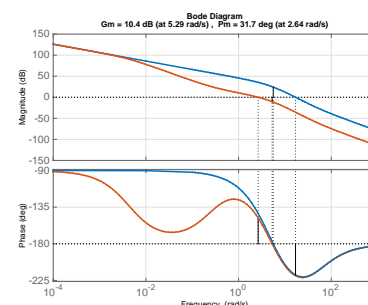
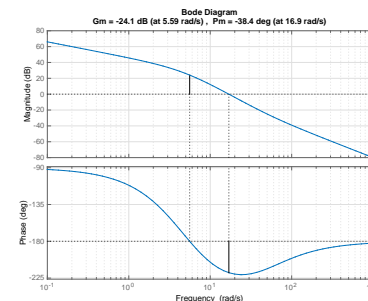


Red de retardo: $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ con $0 < a < 1$ y $T > 0$. Caída de $20 \log_{10} a$

Desfase máximo $\phi_m = \arctan\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)$ en $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

Primero encuentra un polo en $\frac{-1}{T}$, después cero en $\frac{-1}{aT}$

- 3 Determinar la ω_c asociada al ϕ deseado y obtener la ganancia en dB del sistema para dicha ω_c . Utilizar esa ganancia para determinar el valor de a : $20 \log_{10} a = -20 \log_{10}(K \cdot |G_p(j\omega_c)|)$. Para $\zeta = 0,4$, $\phi = 100\zeta = 40$. La ω_c que corta $-180+40=-140 \rightarrow \omega_c = 2,63$. A ω_c la ganancia es 35dB $\rightarrow a = 10^{-35/20} = 0,017$
- 4 Fijar la frecuencia correspondiente al cero $\frac{-1}{aT}$ una década antes de ω_c : $\frac{1}{aT} = \frac{\omega_c}{10} \rightarrow T = \frac{10}{a \cdot \omega_c} = 225$.
- 5 Comprobar si se cumplen las especificaciones. Si no, aumentar ϕ y volver al punto 3. $\phi = 31,7 \rightarrow$ incrementar ϕ , porque nos está afectando el retardo introducido por la red.



Red de retardo IV



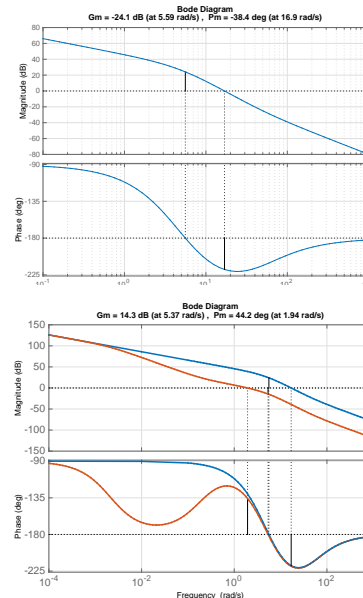
Red de retardo: $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ con $0 < a < 1$ y $T > 0$. Caída de $20 \log_{10} a$

Desfase máximo $\phi_m = \arctan\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)$ en $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

Primero encuentra un polo en $\frac{-1}{T}$, después cero en $\frac{-1}{aT}$

Mediante un programa en Matlab que realice los cálculos automáticamente.

```
%Especificaciones
K=100; zeta=0.4; gp=zpk(-50, [0, -5, -5], K);
figure(1), margin(gp);
%Calculo de los parámetros de la red
[mag, phase, w]=bode(gp);
mag=squeeze(mag); phase=squeeze(phase);
Pmd=100*zeta; Pmtry=Pmd;
while (1)
    [cc, k]=min(abs(phase-(-180+Pmtry)))
    wc=w(k), a=1/mag(k), T=10/a/wc,
    gc=tf([a*T, 1], [T, 1])
    [Gm, Pm, Wgm, Wpm]=margin(gp*gc);
    if Pm>Pmd %Cumple requisito
        break;
    end
    Pmtry=Pmtry+1;
end
figure(2), bode(gc)
figure(3), margin(gp), hold on, margin(gp*gc);
%Respuesta temporal
Mp=exp(-zeta*pi/sqrt(1-zeta^2))
figure(4), step(minreal(gc*gp/(1+gc*gp)))
```



Red de retardo - resumen



Red de retardo: $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ con $0 < a < 1$ y $T > 0$. Caída de $20 \log_{10} a$

Desfase máximo $\phi_m = \arctan\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)$ en $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

Primero encuentra un polo en $\frac{-1}{T}$, después cero en $\frac{-1}{aT}$

Sintonización de los parámetros del controlador formado por una ganancia K y una red de retardo $G_c(s)$:

- 1 Ajustar la ganancia K para cumplir las especificaciones del error.
- 2 Calcular el margen de fase y de ganancia $K \cdot G_p(s)$, estudiar la estabilidad del sistema, y comprobar si es necesario corregirlo.
- 3 Determinar la ω_c asociada al margen de fase deseado y obtener la ganancia en dB del sistema para dicha ω_c . Utilizar esa ganancia para determinar el valor de la a de la red de adelanto.
 $-20 \log_{10} a = 20 \log_{10}(K \cdot |G_p(j\omega_c)|)$.
- 4 Fijar la frecuencia correspondiente al cero $\frac{1}{aT}$ una década antes de ω_c :
 $\frac{1}{aT} = \frac{\omega_c}{10} \rightarrow T = \frac{10}{a \cdot \omega_c}$.
- 5 Comprobar que se cumplen las especificaciones. Si no es así, aumentar el valor del margen de fase deseado y volver al punto 3.



Los efectos del control de un sistema mediante una red de retardo son:

- Rápida reducción de la ganancia antes del cruce, con el objetivo de conseguir el MF deseado.
- La caída en magnitud introducida, aumenta la atenuación a frecuencias elevadas, por lo que también sirve para reducir el ruido de alta frecuencia. También reduce el ancho de banda del sistema.
- Introduce un polo dominante en el sistema a bajas/medias frecuencias. Por lo tanto, ralentiza la respuesta del sistema en lazo cerrado.
- Permite usar K elevadas que sin la red harían que el sistema en lazo cerrado fuese inestable. Por lo tanto, como permite reducir el error en estado estacionario del sistema, este tipo de controlador se puede usar para lograr especificaciones del error que no se logran con un control proporcional puro.
- No se puede usar sobre todo tipo de plantas:
 - ▶ Necesitamos poder localizar, en el intervalo de bajas frecuencias, la frecuencia de fase deseada
 - ▶ La planta no compensada debe poseer un desfase pequeño en una frecuencia alta.

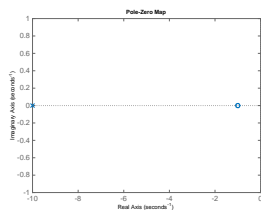
Red de adelanto I



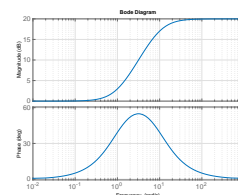
Red de adelanto: $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ con $a > 1$ y $T > 0$. (Ejemplo: $T = 0,1$ y $a=10$)

- Añade a $G(s) = G_c(s)G_p(s)$:

- ▶ Polo en $-\frac{1}{T}$
- ▶ Cero en $-\frac{1}{aT}$



- Diagrama de Bode $G_c(s)$:



- Como $a > 1$, el cero domina al polo.

- Introduce un aumento en magnitud.
- Introduce un adelanto máximo de fase ϕ_m a la frecuencia w_m

$$G_c(jw) = \frac{1+aTjw}{1+Tjw} = \frac{(1+aTjw)(1-Tjw)}{1+T^2w^2} = \frac{1+aT^2w^2+Tjw(a-1)}{1+T^2w^2}$$

- $w = 0 \rightarrow Re(G_c(jw)) = 1, Imag(G_c(jw)) = 0$.
- $w = \infty \rightarrow Re(G_c(jw)) = a, Imag(G_c(jw)) = 0 \rightarrow$ La subida total es de $20 \log_{10} a$
- $arg(G(jw)) = \arctan\left(\frac{Tjw(a-1)}{1+aT^2w^2}\right)$.
- Obtener ϕ_m (derivando en simbólico con respecto a w e igualando a cero):

- ▶ $w_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$
- ▶ $\phi_m = \arctan\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right) \rightarrow \frac{\sin^2 \phi_m}{1-\sin^2 \phi_m} = \frac{(a-1)^2}{4a} \rightarrow \sin \phi_m = \frac{a-1}{a+1} \rightarrow a = \frac{1+\sin \phi_m}{1-\sin \phi_m}$

Red de adelanto II



Red de adelanto: $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ con $a > 1$ y $T > 0$. Subida de $20\log_{10}a$

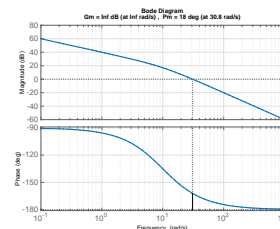
Desfase máximo $a = \frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m}$ en $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

Primero encuentra un cero en $\frac{-1}{Ta}$, después polo en $\frac{-1}{T}$

A continuación se muestra, con un ejemplo, el proceso de **sintonización de los parámetros del controlador formado por la ganancia K y la red de adelanto $G_c(s)$** .

Ejemplo: Dada la planta $G_p(s) = \frac{1}{s(s+10)}$, determinar los parámetros del controlador $G_c(s) = K \frac{1+aTs}{1+Ts}$ que permiten que el sistema en lazo cerrado tenga $e_{ss} = 0,01$ y la sobre-elongación asociada a $\zeta = 0,45$.

- 1 Ajustar la ganancia K para cumplir las especificaciones del error: $G_c(s)G_p(s)$ es un sistema tipo 1. Por lo tanto, presenta error nulo frente a la entrada escalón y error finito ante la entrada rampa: $e_{ss} = \frac{1}{K_V}$ con $K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G_p(s) = K \frac{1}{10} \rightarrow K = \frac{10}{0,01} = 1000$
- 2 Calcular el margen de fase y de ganancia $K \cdot G_p(s)$ y comprobar si es necesario corregirlo.
Ambos positivos, por lo que el sistema en lazo cerrado es estable. El margen de fase es $\phi = 18$, y necesitamos $\phi = 100\zeta = 45$.



Red de adelanto III



Red de adelanto: $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ con $a > 1$ y $T > 0$. Subida de $20\log_{10}a$

Desfase máximo $a = \frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m}$ en $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

Primero encuentra un cero en $\frac{-1}{Ta}$, después polo en $\frac{-1}{T}$

- 3 Determinar el desfase máximo ϕ_m que la red tiene que introducir para modificar el ϕ_o que tiene el sistema $K \cdot G_p(s)$ por el ϕ_d deseado. Calcular la a asociada al desfase máximo.

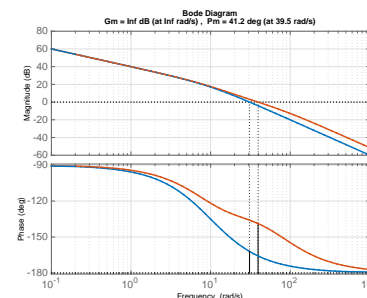
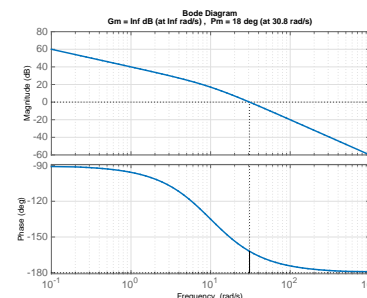
$$\phi_m = \phi_d - \phi_o = 100\zeta - 18 = 27$$

$$a = \frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m} = 2,66$$

- 4 Determinar la ω_m que hace que el máximo adelanto ϕ_m se obtenga para $|K \cdot G_c(j\omega_m)G_p(j\omega_m)| = 1$. Como ϕ_m conlleva una subida de $\frac{20\log_{10}a}{2}$, la ω_m se obtiene con $20\log_{10}(K \cdot G_p(j\omega_m)) = -20\log_{10}\sqrt{a}$.

$$-20\log_{10}\sqrt{a} = -4,25 \rightarrow \omega_m = 40,9 \rightarrow T = \frac{1}{\omega_m\sqrt{a}} = 0,015$$

- 5 Comprobar si se cumplen las especificaciones. Si no, aumentar ϕ_d y volver al punto 3.
 $\phi = 41 \rightarrow$ incrementar ϕ_m , porque nos está afectando el desfase del sistema.



Red de adelanto IV



Red de adelanto: $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ con $a > 1$ y $T > 0$. Subida de $20\log_{10}a$

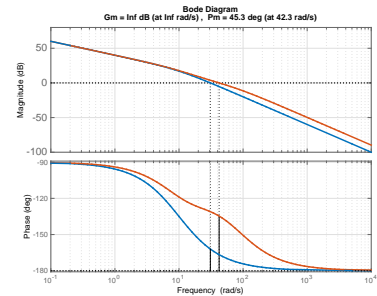
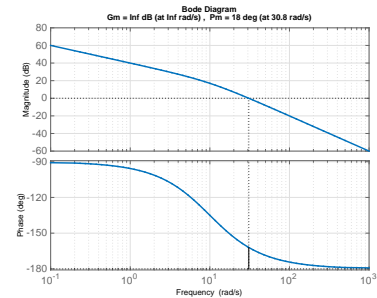
Desfase máximo $a = \frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m}$ en $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

Primero encuentra un cero en $\frac{1}{Ta}$, después polo en $\frac{1}{T}$

Mediante un programa en Matlab que realice los cálculos automáticamente.

```
%Especificaciones
K=1000; zeta=0.45; gp=zpk([], [0, -10], K);
figure(1), margin(gp);
%Calculo de los parámetros de la red
[mag, phase, w]=bode(gp);
mag=squeeze(mag); phase=squeeze(phase);

[Gm, Pm, Wgm, Wpm]=margin(gp);
Pmd=40; phim=(Pmd-Pm);
while (1)
    sphim=sin(phim*pi/180); a=(1+sphim)/(1-sphim);
    Kw=1/sqrt(a);
    [cc, k]=min(abs(mag-Kw)); wc=w(k); T=1/sqrt(a)/wc;
    gc=tf([a*T, 1], [T, 1]);
    [Gm, Pm, Wgm, Wpm]=margin(gp*gc);
    if Pm>Pmd %Cumple requisito
        break;
    end
    phim=phim+1;
end
figure(2), bode(gc);
figure(3), margin(gp), hold on, margin(gp*gc);
%Respuesta temporal
Mp=exp(-zeta*pi/sqrt(1-zeta^2))
```



Red de adelanto - resumen



Red de adelanto: $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ con $a > 1$ y $T > 0$. Subida de $20\log_{10}a$

Desfase máximo $a = \frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m}$ en $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

Primero encuentra un cero en $\frac{1}{Ta}$, después polo en $\frac{1}{T}$

Sintonización de los parámetros del controlador formado por una ganancia K y una red de adelanto $G_c(s)$:

- 1 Ajustar la ganancia K para cumplir las especificaciones del error.
- 2 Calcular el margen de fase y de ganancia $K \cdot G_p(s)$, estudiar la estabilidad del sistema, y comprobar si es necesario corregirlo.
- 3 Determinar el desfase máximo ϕ_m que la red tiene que introducir para modificar el ϕ_o que tiene el sistema $K \cdot G_p(s)$ por el ϕ_d deseado. Calcular la $a = \frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m}$ a partir del desfase máximo $\phi_m = \phi_d - \phi_o$
- 4 Determinar la ω_m que hace que el máximo adelanto ϕ_m se obtenga para $|K \cdot G_c(j\omega_m)G_p(j\omega_m)| = 1$. Como ϕ_m conlleva una subida de $\frac{20\log_{10}a}{2}$, la ω_m se obtiene con $20\log_{10}(K \cdot G_p(j\omega_m)) = -20\log_{10}\sqrt{a}$ y $T = \frac{1}{\omega_m\sqrt{a}}$.
- 5 Comprobar que se cumplen las especificaciones. Si no es así, aumentar el valor del margen de fase deseado y volver al punto 3.



Los efectos del control de un sistema mediante una red de adelanto son:

- Aumenta la ganancia después del cruce, con el objetivo de conseguir el MF deseado.
- El aumento en la magnitud introducida, disminuye la atenuación a frecuencias elevadas, por lo que también filtrará peor el ruido de alta frecuencia. También aumenta el ancho de banda del sistema.
- Introduce un cero dominante en el sistema a bajas/medias frecuencias y un polo a altas frecuencias. Por lo tanto, acelerará la respuesta del sistema en lazo cerrado.
- Permite obtener la conducta deseada en el sistema en lazo cerrado sin sacrificar la ganancia elegida a frecuencias medias.
- No se puede usar sobre plantas en las que la fase disminuye muy rápidamente cerca de la frecuencia de cruce.

Red de adelanto-retardo



Red de retardo: $G_c(s) = \frac{1+a_r T_r s}{1+T_r s}$ con $0 < a_r < 1$ y $T_r > 0$. Caída de $20 \log_{10} a_r$

Desfase máximo $\phi_{rm} = \arctan\left(\frac{a_r-1}{2\sqrt{a_r}}\right)$ en $w_{rm} = \frac{1}{T_r \sqrt{a_r}}$

Primero encuentra un polo en $\frac{-1}{T_r}$, después cero en $\frac{-1}{a_r T_r}$

Red de adelanto: $G_c(s) = \frac{1+a_a T_a s}{1+T_a s}$ con $a_a > 1$ y $T_a > 0$. Subida de $20 \log_{10} a_a$

Desfase máximo $a_a = \frac{1+\sin\phi_{am}}{1-\sin\phi_{am}}$ en $w_{am} = \frac{1}{T_a \sqrt{a_a}}$

Primero encuentra un cero en $\frac{-1}{T_a a_a}$, después polo en $\frac{-1}{T_a}$

Red de adelanto-retardo: $G_c(s) = \frac{1+a_r T_r s}{1+T_r s} \frac{1+a_a T_a s}{1+T_a s}$

Poniendo en serie una red de retardo y otra de adelanto, conseguimos compensar la caída en la ganancia del primero con el aumento en ganancia del segundo.

Por lo tanto, se consigue modificar el comportamiento en frecuencia del lazo abierto entre dos frecuencias dadas (las determinadas por los polos/ceros que se encuentren en los bordes extremos).

Su sintonización en frecuencia es más complicada, ya que necesitamos ajustar el valor de 4 parámetros diferentes. El número de parámetros aumenta según se incrementa el número de redes que se colocan en serie. Para sintonizar sus valores, puede ser más útil observar
 1) el lugar de las raíces y mover la posición de los polos y los ceros asociados a las redes,
 2) asignar los polos o los ceros (ver ejemplos del PID) o 3) utilizar métodos de optimización.



- 1 Objetivos
- 2 Redes de adelanto y de retraso
- 3 **PIDs**

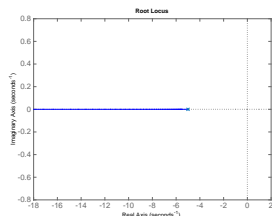
PIDs: acción proporcional



Las variantes de los controladores PID combinan las siguientes acciones:

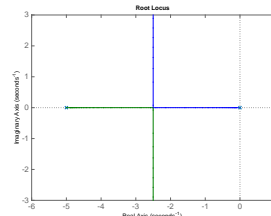
- **Acción proporcional:** $G_c(s) = K_p \rightarrow u(t) = K_p e(t)$
 - ▶ La respuesta ante cambios en el error (debido a cambio en la entrada o en la salida) es inmediata (no hay retardo).
 - ▶ Aumenta la ganancia del sistema en lazo cerrado, aumenta la constante de error correspondiente al tipo del sistema, disminuye su error (no puede eliminarlo).
 - ▶ Una elección correcta de K_p puede evitar que el sistema sea inestable y hacer que los polos dominantes sean más rápidos y por lo tanto, aumentar la velocidad de respuesta del sistema.

Ejemplo: $G(s) = \frac{1}{s+a}$



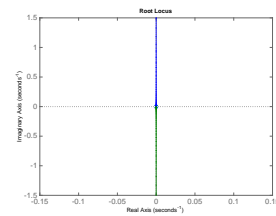
Sistema primer orden, error finito para escalón

Ejemplo: $G(s) = \frac{1}{s(s+a)}$



Sistema segundo orden, error nulo para escalón, finito rampa

Ejemplo: $G(s) = \frac{1}{s^2}$



Sistema marginalmente estable (inestable para la ω adecuada)



- **Acción integral:** $G_c(s) = \frac{K_i}{s} \rightarrow u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$
 - ▶ La respuesta ante los cambios de error es acumulativa: si $e(t)$ es positivo la $u(t)$ aumenta, si es negativo la $u(t)$ disminuye, y si es nulo la $u(t)$ se mantiene. Como la $u(t) = cte$ cuando $e(t) = r(t) - y(t) = 0$, el integrador de este tipo de acción nos permite suministrarle al sistema la cte necesaria que hace que la salida sea igual a la entrada.
 - ▶ Aumenta la ganancia del sistema en lazo cerrado y el tipo del sistema en una unidad (“tipo n” \rightarrow “tipo n+1”), por lo tanto hace nulo el error del sistema en lazo cerrado ante la entrada con la que el sistema tiene error finito y hace finito el error del sistema en lazo cerrado ante la primera entrada que tenía error infinito.
 - ▶ Añade un polo al sistema sobre el origen: añade una asíntota adicional al sistema (pudiendo proporcionar nuevas ocasiones para la inestabilidad) y modifica el comportamiento del lugar de las raíces sobre el eje real.
 - ▶ Habitualmente se combina con una acción proporcional.



- **Acción derivativa:** $G_c(s) = K_d s \rightarrow u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}$
 - ▶ La respuesta ante los cambios de error es anticipativa: si $e(t)$ crece la señal de control $u(t)$ es positiva, si decrece la $u(t)$ es negativa. Si hay un cambio fuerte en el valor de $e(t)$ la señal de control toma un valor elevado. Por lo tanto, intenta compensar el error que aparecerá en un futuro si se mantiene la misma tendencia de crecimiento de la señal.
 - ▶ Cuando la $e(t)$ se encuentra perturbada por algún tipo de ruido de alta frecuencia, la acción derivativa intentará corregir los cambios asociados al ruido, haciendo que el controlador sobre-actúe sin una necesidad real. Por lo tanto, este tipo de acción no debe ser utilizada con señales ruidosas que no han sido filtradas previamente.
 - ▶ La acción derivativa pura no puede ser implementada con un sistema físico real (tiene una FT no causal). Por lo tanto, se implementará mediante:
 $G_c(s) = \frac{K_d s}{1+s/N}$ con $N \in [3, 20]$ o $N \propto 1/K_d$.
 - ▶ Aumenta la ganancia del sistema en lazo cerrado y disminuye el tipo del sistema en una unidad (“tipo n” \rightarrow “tipo n-1”). Esto hace que aparezca un error infinito ante la entrada con la que se tenía un error finito sin la acción derivativa.
 - ▶ Añade un polo negativo y un cero sobre el origen: mantiene el número de asíntotas (modificando su punto de partida) y modifica el comportamiento del lugar de las raíces sobre el eje real.
 - ▶ Habitualmente se combina con una acción proporcional.

PIDs: Controles habituales - P



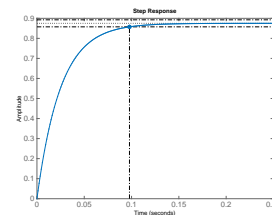
- Los tipos de controles más habituales son: **P, PI, PD o PID.**
- Las características del **control proporcional (controlador P)** ya han sido discutidas en la transparencia de la acción proporcional. Las características del sistema en lazo cerrado determinan la elección del valor de la constante proporcional K_p . La elección de su valor se puede realizar:
 - ▶ Sobre el lugar de las raíces (utilizando la herramienta rtool de Matlab) o el diagrama de Bode (lazo abierto).
 - ▶ De forma analítica, por medio de la **asignación de los valores de los polos y los ceros** del sistema en lazo cerrado.
 - ▶ Métodos sistemáticos (Ziegler-Nichols).

Ejemplo: Dada $G_p(s) = \frac{3}{s+5}$ realimentada con $H(s) = 1$ ¿ K_p del controlador P que hace que el sistema en lazo cerrado tenga un $t_s = 0,1$ segundos?

$$G_{LC}(s) = \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)} = \frac{3K_p}{s + 3K_p + 5}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 3K_p + 5 \\ t_s &= \frac{4}{\sigma} = 0,1 \end{aligned} \right\} \rightarrow K_p = 11,7$$

```
syms s Kp; Gp=3/(s+5);
ts=0.1;
GLC=collect(Kp*Gp/(1+Gp*Kp))
[n,d]=numden(GLC);
[c,p]=coeffs(d,'s');
pn=subs(p,'s',2);
l=0;k=find(pn==2^1) %Ultimo coef
f=c(k)-4/ts; Kp=eval(solve(f))
step(feedback(Kp*tf(3,[1,5]),1))
```



PIDs: Controles habituales - PI - I

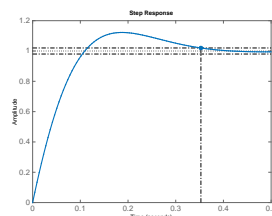


- El **control PI** combina la acción P y la I: $G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s}$
- En esta configuración añadimos un polo en $s = 0$ (aumentamos el tipo del sistema) y un cero en $s = -\frac{K_i}{K_p}$ (por lo tanto no cambiamos el número de asíntotas y si el comportamiento del lugar de las raíces sobre el eje real)
- En vez de usar el parámetro K_i se puede usar la constante de tiempo T_i :
 - ▶ $G_c(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$.
 - ▶ La relación entre los parámetros es: $K_i = \frac{K_p}{T_i}$
- En cualquier caso, tenemos que ajustar dos parámetros:
 - ▶ Contorno de las raíces o lugar de las raíces moviendo el cero y la K_p .
 - ▶ **Asignación de polos y ceros.**

Ejemplo: Dada $G_p(s) = \frac{3}{s+5}$ realimentada con $H(s) = 1$ ¿Constantes del PI que hacen que el sistema en lazo cerrado tenga un $t_s = 0,4$ segundos y una $\zeta = 0,7$?

$$G_{LC}(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} = \frac{3K_p s + 3K_i}{s^2 + (3K_p + 5)s + 3K_i}$$

$$\left. \begin{aligned} 2\zeta\omega_n &= 2\sigma = 3K_p + 5 \\ t_s &= \frac{4}{\sigma} = 0,4 \\ \omega_n^2 &= 3K_i \end{aligned} \right\} \rightarrow K_p = 5 \text{ y } K_i = 68,02$$



PIDs: Controles habituales - PI - II



Control PI: $G_c(s) = \frac{K_p s + K_i}{s}$

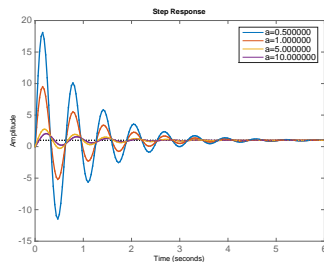
Ejemplo (cont.): Dada $G_p(s) = \frac{3}{s+5}$ con $H(s) = 1$ ¿Constantes del PI que hacen que el sistema en lazo cerrado tenga un $t_s = 0,4$ segundos y una $\zeta = 0,7$?

$$G_{LC}(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} = \frac{3K_p s + 3K_i}{s^2 + (3K_p + 5)s + 3K_i}, \text{ con } K_p = 5 \text{ y } K_i = 68,02$$

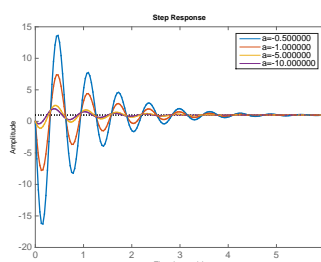
La $G_{LC}(s)$, aunque es de segundo grado, presenta un cero que influirá en la respuesta del sistema.

Veamos la influencia sobre un sistema genérico $H(s) = \frac{w_n}{a\zeta} \frac{s+a\zeta w_n}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2}$, para diferentes valores del cero (variando el valor de a)

$a > 0$ (ceros negativos)



$a < 0$ (ceros positivos, subelongación)



Los ceros que se encuentran cerca de los polos aumentan la sobre-elongación del sistema.

Para evitar el cero, asociado al PI, se puede usar una estructura alternativa.

PIDs: Controles habituales - PI - III



Control PI - estructura básica: $G_c(s) = \frac{K_p s + K_i}{s} \rightarrow U(s) = \frac{K_p s + K_i}{s} E(s)$

$$G_{LC}(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} = \frac{\frac{num_c(s)}{den_c(s)} \frac{num_p(s)}{den_p(s)}}{1 + \frac{num_c(s)}{den_c(s)} \frac{num_p(s)}{den_p(s)}} = \frac{num_c(s)num_p(s)}{den_c(s)den_p(s) + num_c(s)num_p(s)} \rightarrow$$

$$G_{LC}(s) = \frac{(K_p s + K_i) num_p(s)}{s \cdot den_p(s) + (K_p s + K_i) num_p(s)}$$

Control PI - estructura alternativa: $U(s) = -K_p Y(s) + \frac{K_i}{s} E(s)$

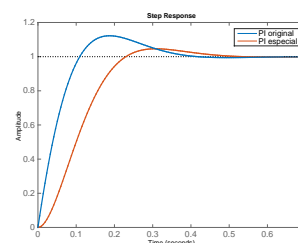
Con esta nueva configuración tenemos que calcular una nueva función de transferencia en lazo cerrado

$$Y(s) = G_p(s)U(s) = -K_p G_p(s)Y(s) + \frac{K_i}{s} G_p(s)E(s) = -K_p G_p(s)Y(s) + \frac{K_i}{s} G_p(s)[R(s) - Y(s)]$$

$$Y(s)[1 + K_p G_p(s) + \frac{K_i}{s} G_p(s)] = \frac{K_i}{s} G_p(s)R(s) \rightarrow G_{LC}(s) = \frac{\frac{K_i}{s} \frac{num_p(s)}{den_p(s)}}{\frac{s \cdot den_p(s) + (K_p s + K_i) num_p(s)}{s \cdot den_p(s)}}$$

Ambas $G_{LC}(s)$ tienen los mismos polos. En la estructura básica, el PI aporta un cero y en la alternativa, no. Por lo tanto, esta última se puede usar cuando el cero aportado por el PI se encuentre cerca de los polos dominantes.

Ejemplo (cont.): $G_p(s) = \frac{3}{s+5}$, ambos PI sintonizados con $K_p = 5$ y $K_i = 68,02$ (segundo caso, usar $G_{LC}(s)$ especial o Simulink). Cero es más rápido que los polos.



PIDs: Controles habituales - PD - I

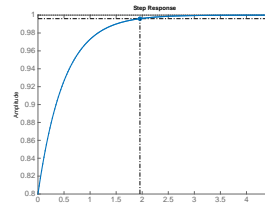


- El **control PD** combina la acción P y la D: $G_c(s) = K_p + K_d s = K_p + \frac{K_d s}{s+1}$
- En la primera configuración añadimos un polo en $s = -\infty$ y un cero en $s = -\frac{K_p}{K_d}$ (por lo tanto no cambiamos el tipo ni el número de asíntotas pero si el comportamiento del lugar de las raíces sobre el eje real)
- En vez de usar el parámetro K_d se puede usar la constante de tiempo T_d :
 - ▶ $G_c(s) = K_p(1 + T_d s)$.
 - ▶ La relación entre los parámetros es: $K_d = K_p T_d$
- En cualquier caso, tenemos que ajustar al menos dos parámetros (N lo podemos prefijar):
 - ▶ Contorno de las raíces o lugar de las raíces moviendo el cero y la K_p .
 - ▶ **Asignación de polos y ceros.**

Ejemplo: Dada $G_p(s) = \frac{2}{s}$ realimentada con $H(s) = 1$ ¿Constantes del PD que hacen que el sistema en lazo cerrado tenga un $t_s = 2$ segundos y un $e_{ss} = 0,1$?

$$G_{LC}(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} = \frac{2K_d s + 2K_p}{(2K_d + 1)s + 2K_p}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{2K_p}{2K_d + 1} \\ t_s &= \frac{4}{\sigma} = 2 \\ 2K_p &= 1/0,1 \end{aligned} \right\} \rightarrow K_p = 5 \text{ y } K_d = 2$$



Tenemos el cero que aporta el PD (usar estructura alternativa)

PIDs: Controles habituales - PD - II



Control PD - estructura básica: $G_c(s) = K_p + K_d s \rightarrow U(s) = (K_p + K_d s)E(s)$

$$G_{LC}(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} = \frac{\frac{num_c(s)}{den_c(s)} \frac{num_p(s)}{den_p(s)}}{1 + \frac{num_c(s)}{den_c(s)} \frac{num_p(s)}{den_p(s)}} = \frac{num_c(s)num_p(s)}{den_c(s)den_p(s) + num_c(s)num_p(s)} \rightarrow$$

$$G_{LC}(s) = \frac{(K_p + K_d s)num_p(s)}{den_p(s) + (K_p + K_d s)num_p(s)}$$

Control PD - estructura alternativa: $U(s) = K_p E(s) - K_d s Y(s)$

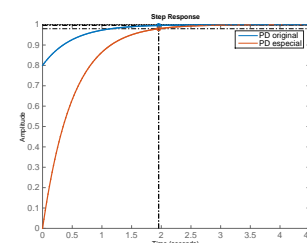
Con esta nueva configuración tenemos que calcular una nueva función de transferencia en lazo cerrado

$$Y(s) = G_p(s)U(s) = K_p G_p(s)E(s) - K_d G_p(s)sY(s) = K_p G_p(s)[R(s) - Y(s)] - K_d G_p(s)sY(s)$$

$$Y(s)[1 + K_p G_p(s) + K_d G_p(s)s] = K_p G_p(s)R(s) \rightarrow G_{LC}(s) = \frac{K_p \frac{num_p(s)}{den_p(s)}}{\frac{den_p(s) + (K_p + K_d s)num_p(s)}{den_p(s)}}$$

Ambas $G_{LC}(s)$ tienen los mismos polos. En la estructura básica, el PD aporta un cero y en la alternativa, no. Por lo tanto, esta última se puede usar cuando el cero aportado por el PD se encuentre cerca de los polos dominantes.

Ejemplo (cont): $G_p(s) = \frac{2}{s}$, ambos PD sintonizados con $K_p = 5$ y $K_d = 2$ (segundo caso, usar $G_{LC}(s)$ especial o Simulink). Cero es más rápido que el polo.





Control PD - estructura básica formal: $U(s) = (K_p + K_d s)E(s)$

Control PD - estructura alternativa formal: $U(s) = K_p E(s) - K_d s Y(s)$

Las alternativas anteriores no se pueden implementar físicamente (tienen el polo en $s = -\infty$). Para usarlas, hay que añadir el polo en $s = -N$ en el término del PD.

Control PD - estructura básica práctica: $U(s) = (K_p + \frac{K_d s}{N+1})E(s)$

Control PD - estructura alternativa práctica: $U(s) = K_p E(s) - \frac{K_d s}{N+1} Y(s)$

El valor de la N se suele prefijar entre 3 y 20, en la medida de lo posible más allá de los polos/ceros existentes en la $G(s)H(s)$.

Alternativamente, para no tener que sintonizar 3 parámetros se puede hacer $N = 1/T_d$, siendo $T_d = K_d/K_p$

PIDs: Controles habituales - PID



Control PID - estructura básica formal: $U(s) = (K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s)E(s)$

- Es no causal: tenemos que añadir el polo del derivador
- Va a añadir ceros en la función de transferencia en lazo cerrado: aplicar la acción proporcional y la acción derivativa a $-Y(s)$.

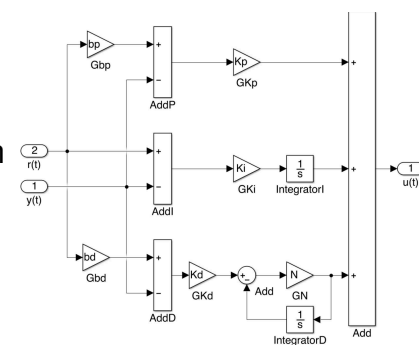
Control PID - estructura alternativa práctica: $U(s) = \frac{K_i}{s} E(s) - (K_p + \frac{K_d s}{N+1}) Y(s)$

Entre los dos tipos de controladores PIDs, existen varias posibilidades, ya que también se puede aplicar la acción proporcional y/o derivativa al error.

La implementación en Simulink de la derecha resulta ventajosa para elegir, por medio de las variables booleanas (0 o 1) b_p y b_d , sobre qué tipo de señales se deben aplicar las diferentes acciones de control.

Además, el montaje de Simulink facilita la simulación del sistema, sin tener que encontrar la FT ad-hoc el sistema en lazo cerrado de cada montaje.

Los valores de los 3 parámetros se pueden calcular por los métodos anteriores (sintonizar sobre estructura básica formal) ... o con técnicas de sintonía más generales.



PIDs: Métodos de sintonía - I



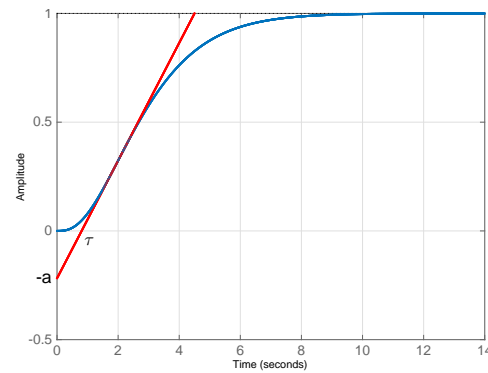
La sintonía (selección) de los valores de los parámetros de los PID's no es trivial para sistemas complejos.

Por lo tanto, se han desarrollado un conjunto de técnicas que permiten sintonizar el comportamiento de un PID para diferentes tipos de sistemas.

En este curso veremos las dos variantes del método de Ziegler-Nichols, que se basan en la observación directa de la respuesta del sistema ante una entrada escalón (y que por lo tanto, no es necesario saber la $G_p(s)$ de la planta).

Método de Ziegler-Nichols I

- Es aplicable únicamente a $G_p(s)$ que tienen una respuesta monotonamente creciente ante una entrada escalón.
- Sobre la respuesta del sistema, se determina la recta de máxima pendiente y los cortes de dicha recta con el eje horizontal y vertical.
- Sintonizar inicialmente los parámetros con los valores de la tabla y ajustar finamente después.



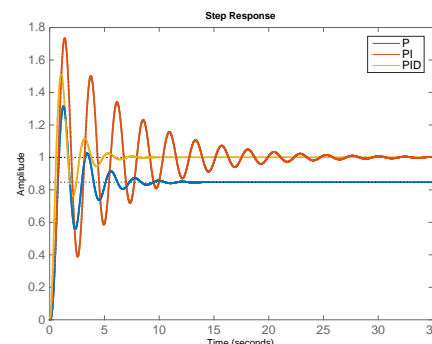
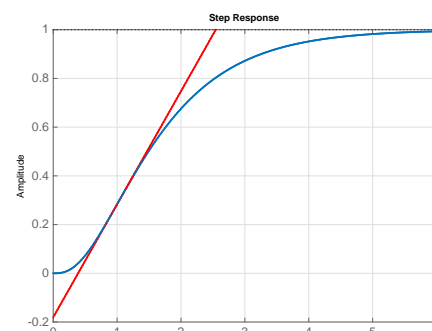
	K_p	T_i	T_d
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	3τ	
PID	$1.2/a$	2τ	0.5τ

PIDs: Métodos de sintonía - II



Ejemplo: Dada la planta $G_p(s) = \frac{8}{(s+1)(s+2)(s+4)}$, sintonizar, utilizando el método de Ziegler-Nichols, los parámetros de un controlador P, PI y PID.

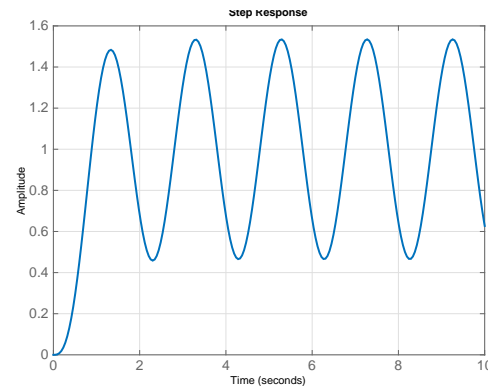
```
gs=zpk([], [-1 -2 -4], 8) %Planta
step(gs); hold on; %Ver si monotona
[y,t]=step(gs);
pte=diff(y)./diff(t); %Pendiente
[ptemax,k]=max(pte); %PendienteMax
recta=y(k)+ptemax*(t-t(k)); %Recta
plot(t,recta,'r')
axis([0,6,-0.2,1]); grid on;
a=-recta(1) %a en punto inicial
[m,km]=min(abs(recta)); %Corte eje x
tau=t(km) %tau en corte eje x
%Controlador P
Kp=1/a;
figure, step(feedback(Kp*gs,1));
hold on;
%Controlador PD
Kp=0.9/a; Ti=3*tau; Ki=Kp/Ti;
gc=tf([Kp, Ki], [1, 0]);
step(feedback(gc*gs,1));
%Controlador PID
Kp=1.2/a; Ti=2*tau; Ki=Kp/Ti;
Td=0.5*tau; Kd=Kp*Td;
gc=tf([Kd, Kp, Ki], [1, 0]);
step(feedback(gc*gs,1));
legend('P', 'PI', 'PID')
```





Método de Ziegler-Nichols II (máxima sensibilidad)

- Se realimenta unitariamente la planta $G_p(s)$ controlada únicamente con una acción proporcional K_c y se determina el valor de la K_c que hace que el sistema pase de ser estable a inestable.
- Para el valor de K_c límite, se determina el periodo de oscilación T_c (los polos complejos conjugados están en $\pm j\omega_c$ y $\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}$).
- Sintonizar inicialmente los parámetros con los valores de la tabla y ajustar finamente después.



	K_p	T_i	T_d
P	$0,5K_c$		
PI	$0,4K_c$	$0,8T_c$	
PID	$0,6K_c$	$0,5T_c$	$0,125T_c$

PIDs: Métodos de sintonía - IV



Ejemplo: Dada la planta $G_p(s) = \frac{10}{s^3 + 2s^2 + 10s}$, sintonizar, utilizando el método de Ziegler-Nichols, los parámetros de un control

```

gs=tf(10,[1 2 10 0]) %Planta
rltool(gs);
%Determinamos Kc=2
Kc=2;
glc=feedback(Kc*gs,1);
step(glc);axis([0,10,0,1.6])
[z,p,k]=zpkdata(glc,'v')
Tc=2*pi/abs(imag(p(1)));
%Controlador P
Kp=0.5*Kc;
figure,step(feedback(Kp*gs,1));
hold on;
%Controlador PD
Kp=0.4*Kc;Ti=0.8*Tc;Ki=Kp/Ti;
gc=tf([Kp,Ki],[1,0]);
step(feedback(gc*gs,1));
%Controlador PID
Kp=0.6*Kc;Ti=0.5*Tc;Ki=Kp/Ti;
Td=0.125*Tc;Kd=Kp*Td;
gc=tf([Kd,Kp,Ki],[1,0]);
step(feedback(gc*gs,1));
legend('P','PI','PID')
    
```

