Estabilidad

Ingeniería Electrónica de Comunicaciones

Eva Besada Portas

Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática.
Universidad Complutense de Madrid

Curso 2020-2021

Esquema

Objetivos del tema

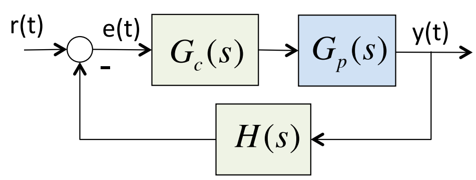
Los objetivos del tema son caracterizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, utilizando diferentes técnicas avanzadas:

- Lugar de las raices: permite representar los polos de la función de transferencia de un sistema realimentado dependiente de un parámetro variable.
- Diagrama de Nyquist: permite determinar la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia.

Esquema

Introducción al lugar de las raíces I

El comportamiento (estabilidad, régimen transitorio y permanente) del sistema en lazo cerrado depende en gran medida de donde se encuentren situados los polos de la función de transferencia.



$G_{LC}(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+H(s)G_c(s)G_p(s)}$

Ecuación característica:

$$1 + H(s)G_c(s)G_p(s) = 0$$

¿Los polos del sistema en lazo cerrado dependen de la situación de los polos de la planta, controlador y la realimentación?

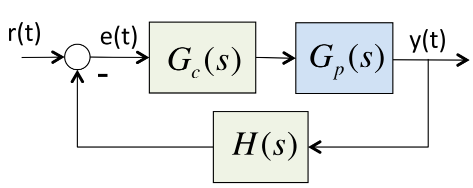
- Si consideramos sus FT, $H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$, $G_c(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$ y $G_p(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$, tenemos que $1 + \frac{N_H(s)}{D_H(s)}\frac{N_c(s)}{D_c(s)}\frac{N_p(s)}{D_p(s)} = 0 \implies D_H(s)D_c(s)D_p(s) + N_H(s)N_c(s)N_c(s) = 0.$

  Por lo tanto, la dependencia existe. Y también dependen de los ceros.

- Si consideramos que la ganancia del controlador o del sensor es ajustable, $G_c(s) = \frac{K \cdot N_c(s)}{D_c(s)}$ ó $G_H(s) = \frac{K \cdot N_H(s)}{D_H(s)}$, $\implies D_H(s)D_c(s)D_p(s) + K \cdot N_H(s)N_c(s)N_c(s) = 0.$

  Los polos del sistema en lazo cerrado también dependen del valor de la ganancia K.

Introducción al lugar de las raíces II

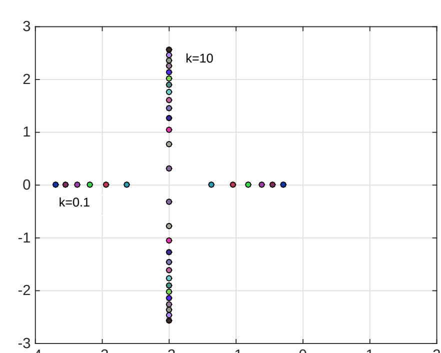


$$D_H(s)D_c(s)D_p(s) + K \cdot N_H(s)N_c(s)N_c(s) = 0$$

El lugar de las raíces es la representación gráfica de la situación de los polos del sistema en lazo cerrado para distintos valores de la ganancia K

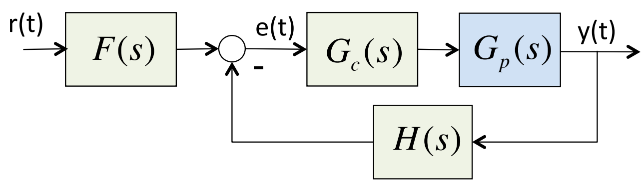
Ejemplo: Representar los polos del sistema en LC cuando $G_p(s) = \frac{1}{s^2+4s+1}$, $H(s) = 1$, $G_c(s) = K$ para distintos valores de K

```
gs=tf(1,[1,4,1]);
for K=0.1:0.5:10
    glc=feedback(K*gs,1);
    [z,p,k]=zpkdata(glc,'v')
    color=rand(1,3);
    h=plot(real(p),imag(p),'o');
    set(h,'MarkerEdgeColor',[0 0 0]);
    set(h,'MarkerFaceColor',color);
    hold on;
    pause(0.1);
end
```

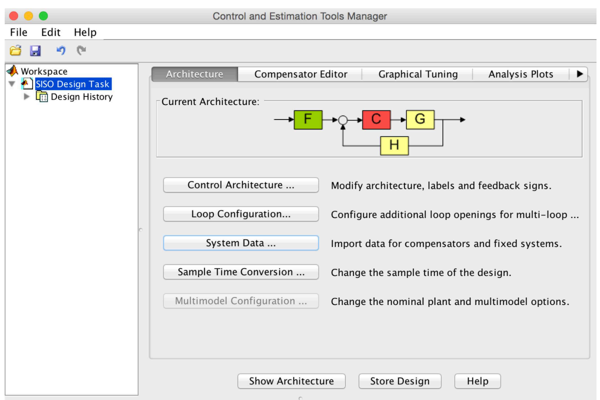


Representación del lugar de las raíces con Matlab I

Para representar automáticamente el lugar de las raíces del sistema en lazo cerrado podemos utilizar la función rltool de Matlab.



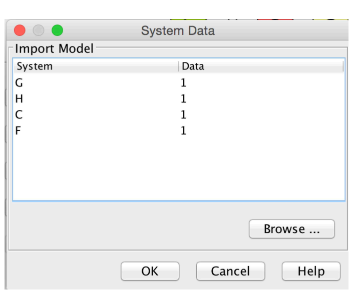

```
gps=tf(1,[1,4,1]);
hs=tf(1,1);
gcs=tf(1,1);
fs=tf(1,1);
rltool
```

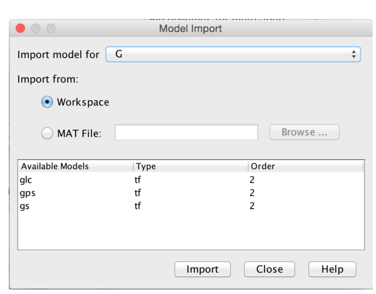


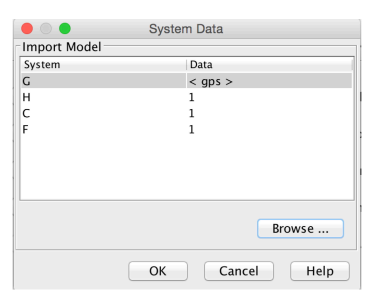
- Control architecture: permite seleccionar la conexión entre elementos
- Loop configuration: configurar lazos de control adicionales
- System data: importar las funciones de transferencia de cada bloque
- Sample time conversion: configurar la discretización del sistema para su análisis

Representación del lugar de las raíces con Matlab II

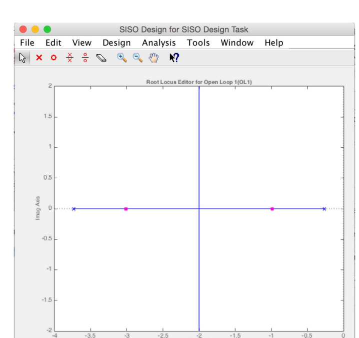
- Cargamos los modelos asignando a cada bloque el correspondiente sistema del workspace:





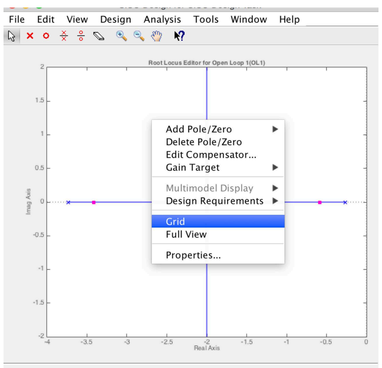


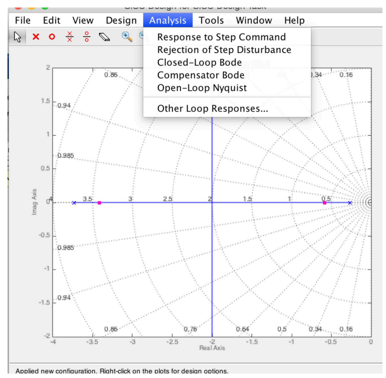
- Observamos la representación del lugar de las raíces:
  - Con el punto fuxia se muestra los raíces de la función de transferencia en lazo cerrado para una K dada.
  - Moviéndolo, observamos como se mueven los polos para distintos valores de K

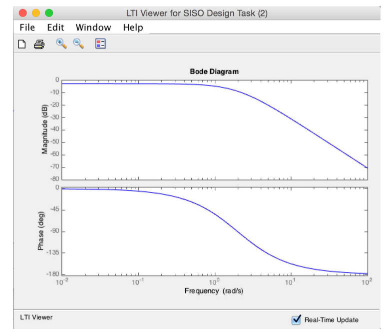


Representación del lugar de las raíces con Matlab III

Podemos representar el enrejado (grid) propio de los sistemas lineales sobre el lugar de las raíces y ver como se modifica la respuesta del sistema ante la entrada escalón y ante la entrada sinusoidal (diagrama de Bode) según modificamos la ganancia K.

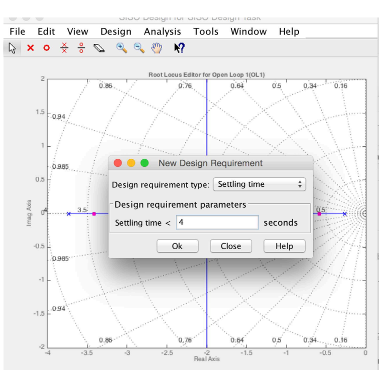


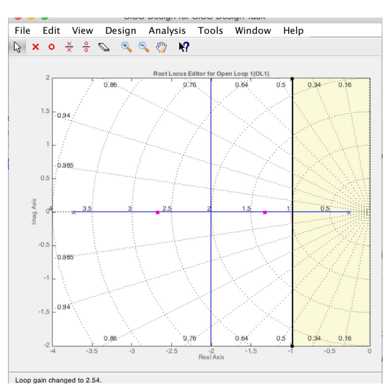


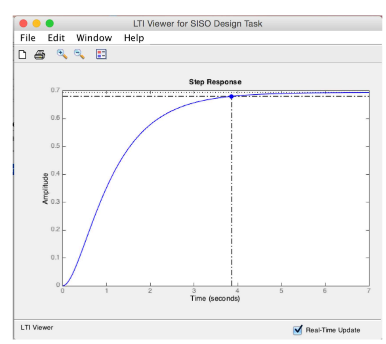


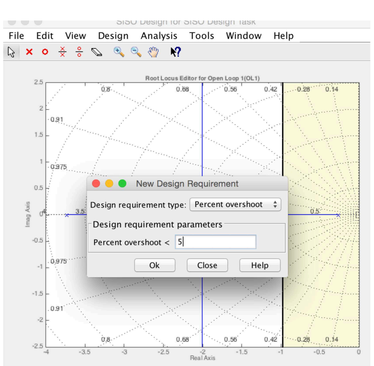
Con la opción de diseño de requisitos (design requirements) podemos delimitar las zonas que cumplen algunas propiedades (ζ, σ, ...)

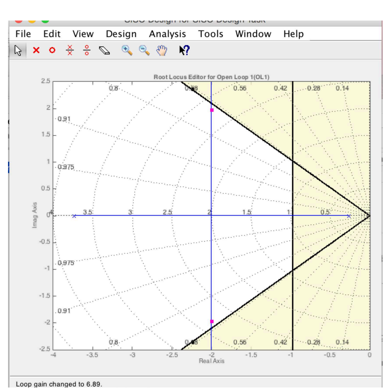
Representación del lugar de las raíces con Matlab IV

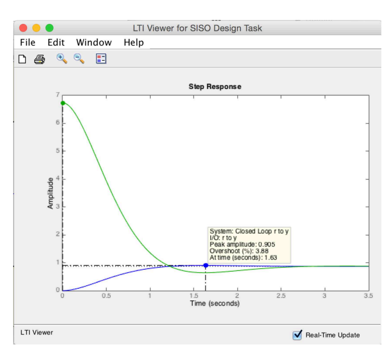








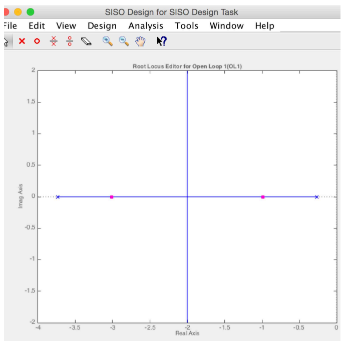


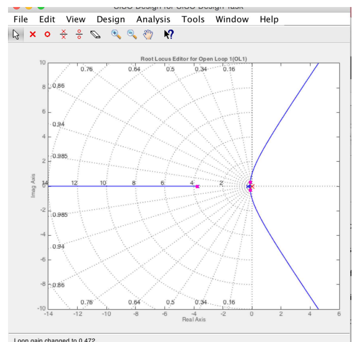


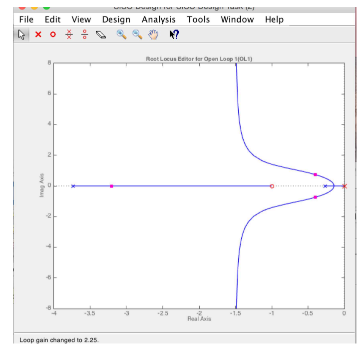
Representación del lugar de las raíces con Matlab V

Ejemplo: Representar el lugar de las raíces de los sistemas con el esquema habitual de lazo cerrado, con $G_p(s) = \frac{1}{s^2+4s+1}$, $H(s) = 1$, $F(s) = 1$ y los controladores:

$G_c(s) = K$ $\qquad$ $G_c(s) = \frac{K}{s}$ $\qquad$ $G_c(s) = \frac{K(s+1)}{s}$





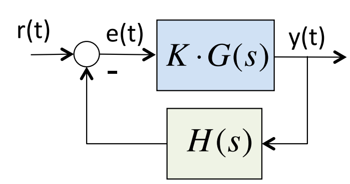


Con el ejemplo se puede observar como, según cambia la posición de los polos y los ceros del sistema original cambia la forma del lugar de las raíces.

¿El lugar de las raíces tienes algunas propiedades genéricas que nos permitan, a partir de la posición de los ceros y los polos de los bloques del sistema en lazo cerrado, determinar su forma? La existencia de unas propiedades genéricas nos permitiría determinar el efecto que tiene, sobre el lugar de las raíces del sistema, añadir polos/ceros en los bloques reconfigurables (F, C, H) del sistema.

Propiedades del lugar de las raíces I

Para estudiar las propiedades del lugar de las raíces, vamos a utilizar el diagrama de la derecha, ya que los polos de $F(s)$ van a ser polos del sistema y $G(s) = G_c(s)G_p(s)$.



Si tenemos que $G(s) = \frac{K \cdot N_G(s)}{D_G(s)}$ y $H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$, entonces la FT en LC:

$$G_{LC}(s) = \frac{G(s)}{1+H(s)G(s)} = \frac{K \cdot \frac{N_G(s)}{D_G(s)}}{1+K \cdot \frac{N_H(s)N_G(s)}{D_H(s)D_G(s)}} = \frac{K \cdot \frac{N_G(s)}{D_G(s)}}{\frac{D_H(s)D_G(s)+K \cdot N_H(s)N_G(s)}{D_H(s)D_G(s)}} = \frac{K \cdot D_H(s)N_G(s)}{D_H(s)D_G(s)+K \cdot N_H(s)N_G(s)}$$

Lugar de las raíces, son los puntos del plano s que cumplen, según varía K:

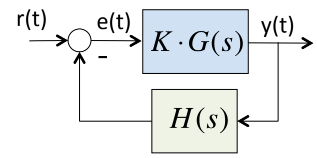
$$D_H(s)D_G(s) + K \cdot N_H(s)N_G(s) = 0 \implies \frac{N_H(s)N_G(s)}{D_H(s)D_G(s)} = -\frac{1}{K} \implies G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$$

A $G(s)H(s)$ se le denomina función de transferencia en Lazo Abierto

Propiedades de los extremos:

- Si $K = 0 \rightarrow D_H(s)D_G(s) = 0 \implies$ El lugar de las raices comienza, para $K = 0$, en los polos de $G(s)H(s)$
- Si $K = \infty \rightarrow N_H(s)N_G(s) = 0 \implies$ El lugar de las raices termina, para $K = \infty$, en los ceros de $G(s)H(s)$

Propiedades del lugar de las raíces II

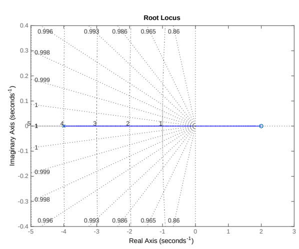


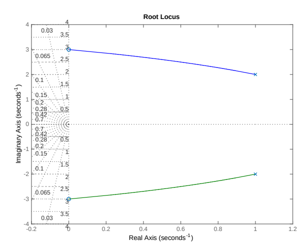
Lugar de las raices: $G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$
Las ramas nacen en los polos y mueren en los ceros.

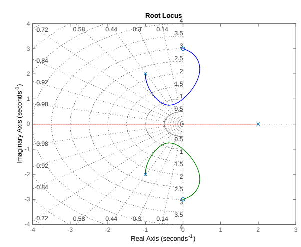
Si el número de polos y de ceros es el mismo, cada una de las ramas del lugar de las raíces podrá nacer en un polo y morir en un cero. Si el número es diferente, habra ramas que nazcan/mueran en el $\pm\infty$. El número de ramas será, en cualquier caso, igual el mayor valor entre el número de ceros y el número.

Ejemplo:¿Cuantas son las ramas que vamos a tener en los lugares de las raíces de los sistemas cuya G(s)H(s) se recoge en el código siguiente?

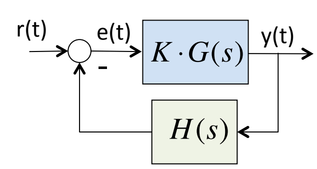
```
figure,rlocus(zpk([2],[-4],1));grid on
figure,rlocus(zpk([3i,-3i],[1+2i,1-2i],1));grid on
figure,rlocus(zpk([3i,-3i],[2,-1+2i,-1-2i],1));grid on
```







Propiedades del lugar de las raíces III



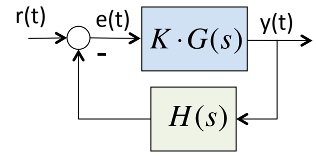
Lugar de las raices: $G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$
Las ramas nacen en los polos y mueren en los ceros.
El número de ramas es el máximo entre el número de ceros y el número de polos.

El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real de s. Esta simetría es causada porque las raíces de un polinomio con coeficientes reales tienen que ser reales o complejas conjugadas.

Condiciones modulo y argumento: $|G(s)H(s)| = \frac{1}{K}$, $\arg\left(G(s)H(s)\right) = (2r+1)\pi$

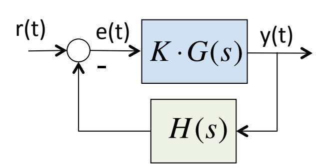
Si $G(s)H(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$, la condición del módulo es $\frac{\prod_{l=1:m}|s-z_l|}{\prod_{k=1:n}|s-p_k|} = \frac{1}{K}$ y la de argumento $\sum_{l=1:m}\arg(s-z_l) - \sum_{k=1:n}\arg(s-p_k) = (2r+1)\pi$

Propiedades del lugar de las raíces IV



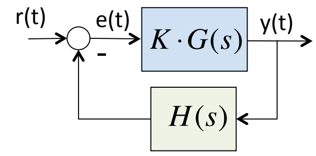
- Lugar de las raices: $G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$
  $|G(s)H(s)| = \frac{1}{K}$, $\arg(G(s)H(s)) = (2r+1)\pi$
- Las ramas nacen en los polos y mueren en los ceros.
- El número de ramas es el máximo entre el número de ceros y el número de polos.
- El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real de s.
- Pertenece al lugar de las raíces los tramos del eje real que dejan a su derecha un número impar de polos y ceros: Las porciones sobre el eje real van desde polos a ceros. Los ceros y polos complejos conjugados no influyen porque contribuyen con 360° sobre el eje real. Los polos/ceros a la izquierda contribuyen con 0°, los polos/ceros a la derecha con ±180°. Si el número de polos/ceros a la derecha es impar la contribución cumple $\arg(G(s)H(s)) = (2r+1)\pi$.

Propiedades del lugar de las raíces V



- Lugar de las raices: $G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$
  $|G(s)H(s)| = \frac{1}{K}$, $\arg(G(s)H(s)) = (2r+1)\pi$
- Las ramas nacen en los polos y mueren en los ceros.
- El número de ramas es el máximo entre el número de ceros y el número de polos.
- El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real de s.
- Pertenece al lugar de las raíces los tramos del eje real que dejan a su derecha un número impar de polos y ceros
- Los puntos de corte del lugar de las raíces con el eje imaginario y los valores de K asociados se calculan haciendo $s = jw$ (o aplicando el criterio de Routh).
- Determinación de asíntotas: El número de asíntotas es la diferencia entre el número de polos (n) y el número de ceros (m). Su ángulo $\theta = \frac{(2r+1)\pi}{n-m}$ y su corte con el eje real $\sigma = \frac{\sum_{k=1:n} p_k - \sum_{l=1:m} z_l}{n-m}$
  - El ángulo se obtiene calculando $\sum_{l=1:m} \arg(s - z_l) - \sum_{k=1:n} \arg(s - p_k)$ para s muy grande: $\sum_{l=1:m} \theta - \sum_{k=1:n} \theta = (m-n)\theta$.
  - El corte con el eje real, manipulando la condición del modulo para s muy grande.

Propiedades del lugar de las raíces VI



Lugar de las raices: $G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$
$|G(s)H(s)| = \frac{1}{K}$, $\arg(G(s)H(s)) = (2r+1)\pi$
Las ramas nacen en los polos y mueren en los ceros.

El número de ramas es el máximo entre el número de ceros y el número de polos.

El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real de s.

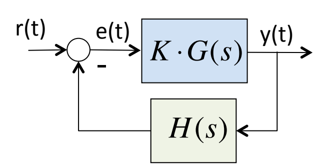
Pertenece al lugar de las raíces los tramos del eje real que dejan a su derecha un número impar de polos y ceros

Los puntos de corte del lugar de las raíces con el eje imaginario y los valores de K asociados se calculan haciendo $s = jw$ (o aplicando el criterio de Routh).

Determinación de asintotas: El número de asintotas es la diferencia entre el número de polos (n) y el número de ceros (m). Su ángulo $\theta = \frac{(2r+1)\pi}{n-m}$ y su corte con el eje real $\sigma = \frac{\sum_{k=1:n} p_k - \sum_{l=1:m} z_l}{n-m}$
Angulo se salida de un polo (o llegada a un cero) se obtiene imponiendo la condición del argumento en un punto cercano a el.

Los puntos de ruptura/encuentro del lugar de las raíces se producen sobre el eje real o en pares complejos conjugados, y se calculan $\frac{dK}{ds} = 0$ (al estar asociados a raices múltiples de la ecuación característica, hay que comprobar las K que pertenecen al lugar de las raíces).

Propiedades del lugar de las raíces - resumen



Lugar de las raices: $G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$
$|G(s)H(s)| = \frac{1}{K}$, $\arg(G(s)H(s)) = (2r+1)\pi$
Las ramas nacen en los polos y mueren en los ceros.

El número de ramas es el máximo entre el número de ceros y el número de polos.

El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real de s.

Pertenece al lugar de las raíces los tramos del eje real que dejan a su derecha un número impar de polos y ceros

Los puntos de corte del lugar de las raíces con el eje imaginario y los valores de K asociados se calculan haciendo $s = jw$ (o aplicando el criterio de Routh).

Determinación de asintotas: El número de asintotas es la diferencia entre el número de polos (n) y el número de ceros (m). Su ángulo $\theta = \frac{(2r+1)\pi}{n-m}$ y su corte con el eje real $\sigma = \frac{\sum_{k=1:n} p_k - \sum_{l=1:m} z_l}{n-m}$
Angulo se salida de un polo (o llegada a un cero) se obtiene imponiendo la condición del argumento en un punto cercano a el.

Los puntos de ruptura/encuentro del lugar de las raíces se producen sobre el eje real o en pares complejos conjugados, y se calculan $\frac{dK}{ds} = 0$ (hay que comprobar las K que pertenecen al lugar de las raíces).

Ejemplo lugar de las raíces I

Ejemplo:Dibujar el lugar de las raices del sistema en lazo cerrado habitual con planta $G_p(s) = \frac{s+3}{s(s+1)}$, controlador $G_c(s) = K(s+2)$ y realimentación unitaria.

$G(s)H(s) = \frac{(s+3)(s+2)}{s(s+1)} = -\frac{1}{K}$.

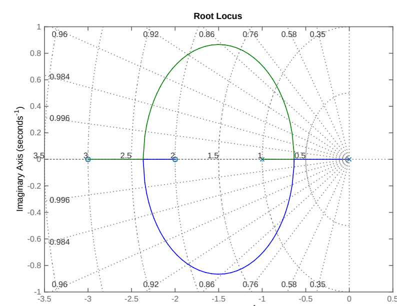
Sobre el eje real, tenemos dos polos (0 y 1) en los que nace el lugar de las raíces y dos ceros (2 y 3) en los que muere.

Los segmentos de 0 a 1 y de 2 a 3 pertenecen al lugar de las raíces.

Para ir de un segmento al otro hay que poner un punto de ruptura en cada tramo.

Para calcular los puntos de ruptura: $\frac{dK}{ds} = 0 \implies s = [-2{,}3660, -0{,}6340]$

```
%Puntos de ruptura
syms s
K=-s*(s+1)/(s+2)/(s+3)
dK=diff(K,'s')
eval(solve(dK,'s'))
clear all
%Lugar de las raices
gh=zpk([-3,-2],[0,-1],1)
rlocus(gh);grid on;
```



Ejemplo lugar de las raíces II

Ejemplo:Dibujar el lugar de las raices del sistema $G(s)H(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$

Polos ($K = 0$): $[0, 1, -2 \pm 3{,}4641j]$

Ceros ($K = \infty$): [-1]

Ramas: 4

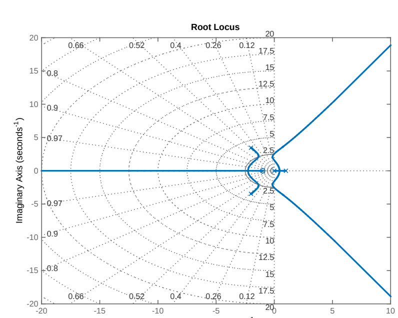
Tramos sobre el eje real: (0,1), (-1,∞)

Asintotas: 3

$$\theta = \frac{(2p+1)180}{3} = 60, -60, 180$$
$$\sigma = \frac{0+1-4+1}{3} = -\frac{2}{3}$$

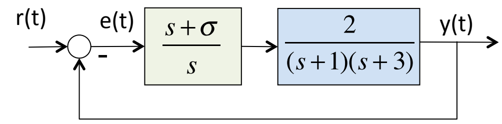
Puntos de ruptura: $\frac{dK}{ds} = 0$
$\implies s = 0{,}45, -2{,}26, -0{,}7 \pm 2{,}16j$

```
syms s
K=-s*(s-1)*(s^2+4*s+16)/(s+1)
dK=simple(diff(K,'s'))
%No lo resuelve simbolicamente
%eval(solve(dK,'s'))
%Solucion numerica (busco coeff)
[n,d]=numden(dK)
roots(sym2poly(n))
%Lugar de las raices
gh=zpk([-1],[0,1],1)*tf(1,[1,4,16]);
rlocus(gh);grid
```



Ejemplo lugar de las raíces III

Ejemplo: Representar el lugar de las raíces, para valores cambiantes de σ del sistema. Obtener el valor de σ que haga que los polos dominantes tengan un coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0{,}5$

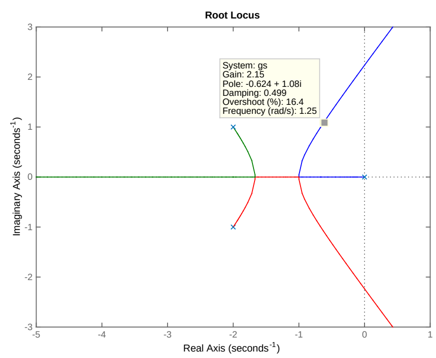


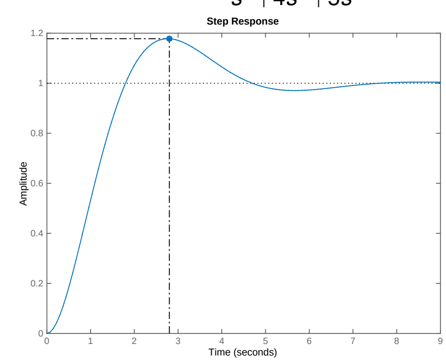
La ecuación característica del sistema es: $0 = 1 + G_c(s)G_p(s) = 1 + \frac{2(s+\sigma)}{s(s+1)(s+3)}$

No tiene la forma habitual $(1 + K\frac{num(s)}{den(s)})$. La manipulamos para que la tenga:

$$s(s+1)(s+3) + 2s + 2\sigma = 0 \rightarrow s^3 + 4s^2 + 3s + 2s + 2\sigma = 0 \rightarrow 1 + \frac{2\sigma}{s^3+4s^2+5s} = 0$$

```
gs=tf(2,[1,4,5,0])
rlocus(gs)
gp=zpk([],[-1,-3],2);
gc=tf([1,2.15],[1 0]);
glc=feedback(gc*gp,1);
step(glc)
```





Otros lugares de las raíces

Hasta ahora, hemos visto el uso habitual del lugar de las raíces, y un ejemplo de uso alternativo, en el que se manipulan las expresiones para utilizarlo en un caso en el que el parámetro variable no es la ganancia del controlador o del sensor.

Existen otros casos genéricos importantes:

- Lugar de las raíces de un sistema con realimentación positiva:
  - Realimentación negativa: $1 + KG(s)H(s) = 0 \rightarrow G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$
  - Realimentación positiva: $1 - KG(s)H(s) = 0 \rightarrow G(s)H(s) = +\frac{1}{K}$ Cambia la condición de argumento y los tramos del lugar de las raíces sobre el eje real.
- Contorno de las raices: similar al lugar de las raices, pero con varios parámetros variables. Se pueden dibujar las curvas que se obtienen según cambia un parámetro y se mantiene fijo el otro.
- Lugar de las raíces de sistemas discretos $(1 + KG(z)H(z) = 0)$: la representación se realiza de la misma forma. Lo que es diferente es su interpretación.

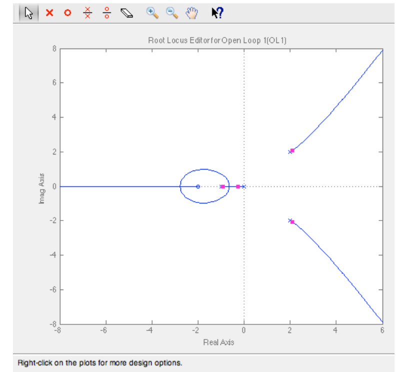
Efectos de inclusión de polos y ceros I

La inclusión de polos o ceros en el controlador o en el sensor permiten modificar el lugar de las raíces en lazo cerrado, y por lo tanto, el comportamiento total del sistema.

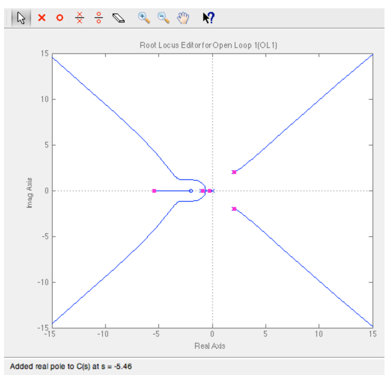
La herramienta rltool de Matlab permite incluirlos (y eliminarlos y desplazarlos) facilmente.

Ejemplo: $G_p(s) = \frac{s+2}{s^4-3s^3+4s^2+8s}$

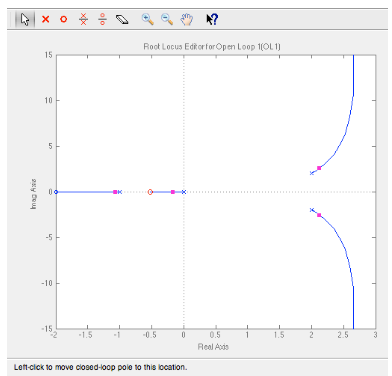
Polos: 0, -1, $2 \pm 2j$



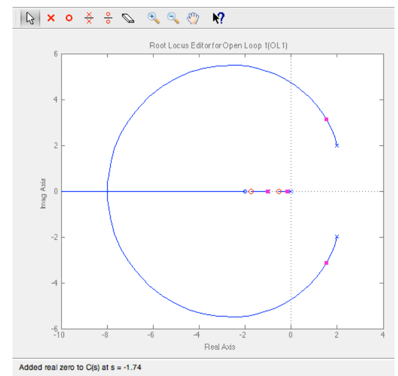
Lugar raíces $G_p(s)$



Añadir 1 polo



Añadir 1cero



Añadir 2 ceros

Efectos de inclusión de polos y ceros II

Los efectos que se observan generalmente son:

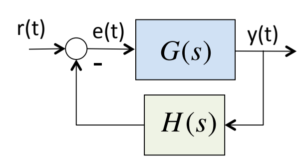
- Inclusión de elementos con parte real positiva: como las ramas nacen/mueren en los polos/ceros, el incluir elementos con parte real positiva fuerza a algunas ramas a pasar por la zona con parte real positiva y por lo tanto, inestabilizará al sistema para algunos valores de K.
- Inclusión de elementos con parte real negativa:
  - Inclusión de un polo: suele tener un efecto negativo, ya que aumenta el número de asíntotas con parte real positiva, y por lo tanto, a no ser que sea compensado mediante la inclusión simultánea de un cero, inestabilizara al sistema para algunos valores de K.
  - Inclusión de un cero: puede tener un efecto positivo, ya que puede disminuir el número de asintotas que tienen parte real positiva. Sin embargo, la inclusión de ceros sin polos no suele ser factible, ya que un sistema con ceros puros es no causal.
- Inclusión de ceros/polos que compensen los polos/ceros existentes: aunque matemáticamente es posible incluir un polo/cero sobre un cero/polo para simplificar la función de transferencia en lazo abierto, en la realidad no tienen porque estar situados en el mismo punto. Por lo tanto, no resulta una técnica adecuada para compensar los polos/ceros con parte real positiva.

Existen técnicas de diseño de contoladores clásicos basados en la inclusión de elementos de este tipo.

Esquema

Diagrama de Nyquist: conceptos preliminares I

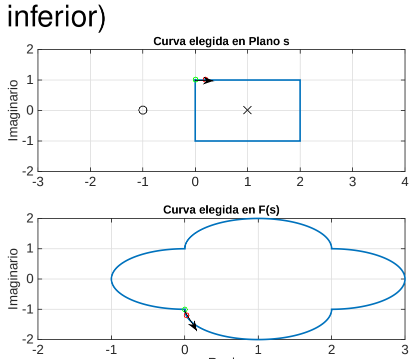
El objetivo del diagrama de Nyquist es determinar la estabilidad del sistema en lazo cerrado de la figura a partir de la respuesta en frecuencia del sistema.



Para eso, utiliza las relaciones que establece el teorema de transformación de una curva en el plano s en una curva en el plano de la función característica $F(s) = 1 + G(s)H(s)$.

Ejemplo: $G(s)H(s) = \frac{2}{s-1}$

Dibujamos una curva en s (cuadrado superior), vemos su transformación en F(s) (curva inferior)

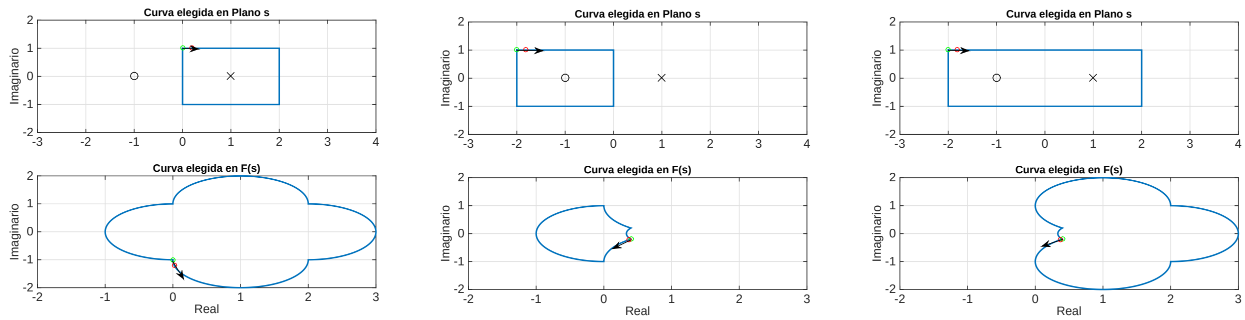



```
syms s;gs=2/(s-1);fs=collect(1+gs);
%Curva s
s1=j+[0:0.01:2];s2=s1(end)-[0:0.01:2]*j;
s3=s2(end)-[0:0.01:2];s4=s3(end)+[0:0.01:2]*j;
s=[s1,s2,s3,s4];
subplot(2,1,1);hold on;grid;plot(s,'LineWidth',2)
plot(-1,0,'ok','MarkerSize',10);
plot(1,0,'xk','MarkerSize',10);
ylabel('Imaginario','FontSize',16);
title('Curva elegida en Plano s','FontSize',14)
plot(s(1),'og');plot(s(20),'or')
axis([-3,4,-2,2]);set(gca,'FontSize',16);
%Curva Fs;
Fs=subs(fs,'s',s);
subplot(2,1,2);hold on;grid;plot(Fs,'LineWidth',2)
ylabel('Imaginario','FontSize',16);
xlabel('Real','FontSize',16);
title('Curva elegida en F(s)','FontSize',14)
plot(Fs(1),'og');plot(Fs(20),'or')
axis([-2,3,-2,2]);set(gca,'FontSize',16);
```

Diagrama de Nyquist: conceptos preliminares II

Si representamos y transformamos diferentes curvas para diferentes F(s):

Ejemplo: $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{2}{s-1} = \frac{s+1}{s-1}$



Ejemplo: $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$

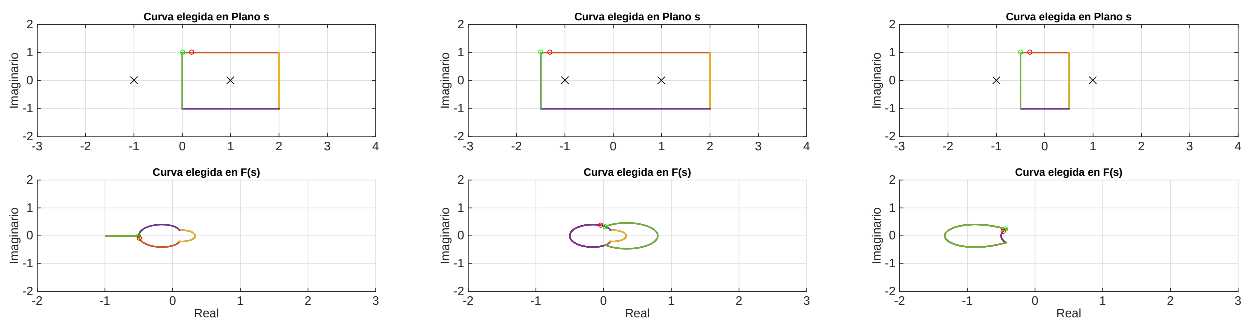


Diagrama de Nyquist: conceptos preliminares III

Si representamos y transformamos diferentes curvas, se observa:

- Según modificamos la posición de la curva en s, modificamos la forma de la transformada.
- Según el número de polos/ceros encerrados por la curva en s se modifica el número de vueltas que la curva transformada F(s) da al 0 y su sentido. El comportamiento es independiente de si los polos/ceros de F(s) están en el semiplano izquierdo/derecho.
- Finalmente, es importante destacar que para que la curva exista, es necesario que F(s) no pase por ningún punto singular (polo o cero de F(s)).

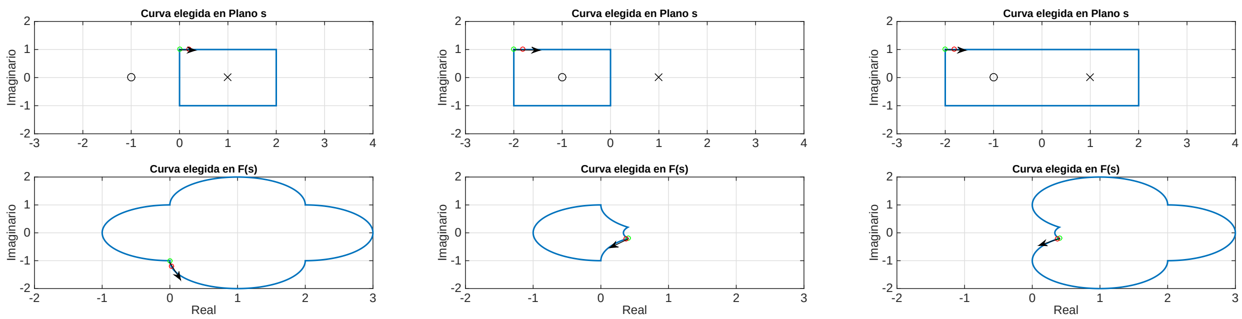
El comportamiento es sistemático y sigue el Teorema de transformación:

- Suposiciones: F(s) es un cociente de dos polinomios en s. P el número de polos y Z el número de ceros de $F(s)$ que son rodeados por una curva cerrada en s. Además, la curva cerrada en s no pasa por ninguno de los polos o ceros de F(s) .
- Teorema: la curva cerrada en s es transformada por $F(s)$ en otra curva cerrada que rodea un total de N veces a $s = 0$. El valor de N viene determinado por Z-P (es decir, por la diferencia entre los números de ceros y polos encerrados). Además, si N es positivo se mantiene el sentido de giro de la curva original, si es negativo se invierte el signo.

Diagrama de Nyquist: conceptos preliminares IV

Teorema de transformación: $N = Z - P$

Ejemplo: $F(s) = \frac{s+1}{s-2}$



Ejemplo: $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$

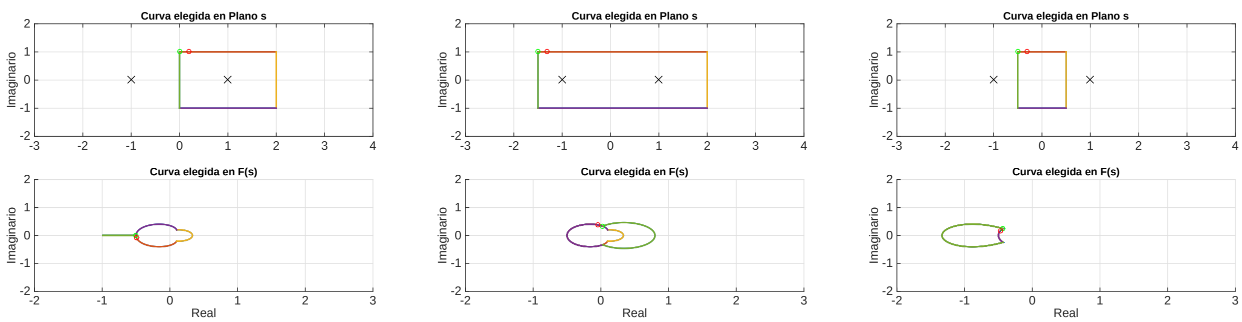


Diagrama de Nyquist: conceptos preliminares V

¿Podemos usar el teorema de transformación para estudiar la estabilidad?

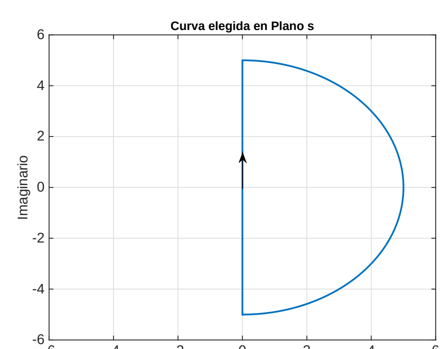
¿Que región del espacio tenemos que rodear para comprobar la estabilidad?

Para determinar que un sistema es inestable llega con saber que ecuación característica $1 + G(H)H(s)$ tiene un cero con parte real positiva.

Por lo tanto, tenemos que utilizar una curva que rodee todo el semiplano derecho.

Para trazarla, podemos utilizar una semicircunferencia de radio infinito, cuya cuerda pase sobre el eje imaginario *jw*

Como Nyquist nos dice $N = Z - P$, podemos determinar el número de ceros Z con parte real positiva sabiendo el número N de vueltas que la curva da al cero y el número de polos P de $1 + G(s)H(s)$

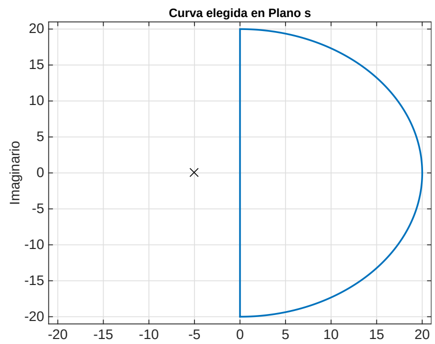


La curva elegida es válida siempre y cuando no haya polos/ceros de $1 + G(s)H(s)$ sobre el eje imaginario. Como podemos determinar los polos de 1+G(s)H(s), podemos rodearlos en el caso que sea necesario.

Diagrama de Nyquist: conceptos preliminares VI

Ejemplo: Estudiar el diagrama de Nyquist de $G(s)H(s) = \frac{1}{s+5}$

Dibujo la curva para R grande y la transformo con $F(s) = 1 + G(s)H(s)$

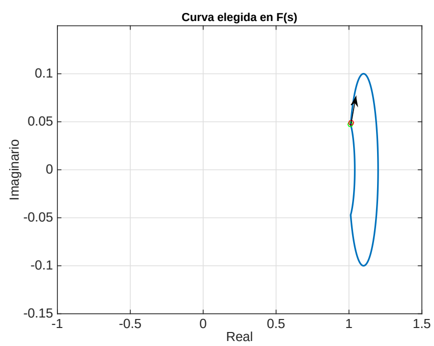



```
R=20;
s1=[-R:0.01:R]*j;
ang=pi/2:-0.01:-pi/2;
s2=R*(cos(ang)+j*sin(ang));
s=[s1,s2]
```

$N = Z - P \rightarrow Z = P + N = 0 + 0$

Compruebo estabilidad:$1 + G(s)H(s) = \frac{s+6}{s+5}$

Dibujo $G(s)H(s) = F(s) - 1 \rightarrow$ desplaza curva una unidad a la derecha $\rightarrow$ estudio vueltas a $s = -1$



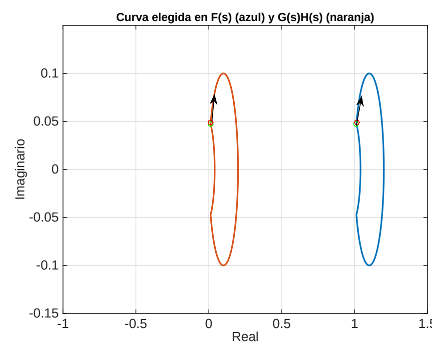


Diagrama de Nyquist

- Dibujo la curva transformada por $G(s)H(s)$ y estudio la estabilidad (número de Z ceros de $1 + G(s)H(s)$) por medio de las vueltas que la curva transformada da a $s = -1$ y del número de polos P que $1 + G(s)H(s)$ tiene en el semiplano derecho: $Z = N + P$.
- Los polos de $1 + G(s)H(s)$ y de $G(s)H(s)$ son los mismos. Por lo tanto puedo determinar P a partir de los polos de la función de transferencia en lazo abierto.
- La curva elegida tiene 3 tramos:
  - $s = jw$ con $w \in [0, \infty)$: Esto es equivalente a obtener la respuesta en frecuencia de $G(s)H(s)$. Es decir, hay que representar $G(jw)H(jw)$. Se puede obtener experimentalmente o viendo el diagrama polar del sistema, en el que se dibuja directamente los puntos $|G(jw)H(jw)|e^{j\, arg(G(jw)H(jw))}$.
  - s semi-circulo parte positiva de radio infinito: $lim_{s\rightarrow\infty} G(s)H(s)$. Si el sistema es causal, este limite es 0 (sistema tipo 0 o superior) o una constante (sistema tipo 0).
  - $s = -jw$ con $w \in (-\infty, 0]$: Equivalente a obtener $G(-jw)H(-jw)$. Por lo tanto, es el complejo conjugado de la rama del diagrama polar.
- Si hay polos sobre el eje imaginario, se bordean con semicirculos que los excluyan.

Diagrama de Nyquist: Matlab I

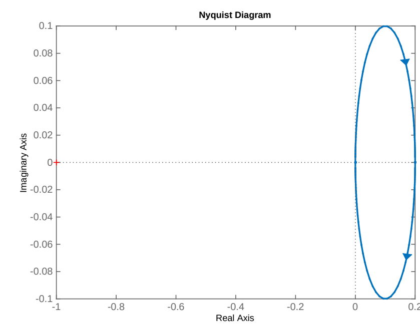
Para obtener la representación que Matlab realiza[1] del diagrama de Nyquist hay que usar la orden: nyquist(ghs), donde ghs es la función de transferencia del sistema en lazo abierto G(s)H(s).

Ejemplo: Estudiar la estabilidad del sistema cuya $G(s)H(s) = \frac{1}{s+5}$

```
ghs=tf(1,[1 5]);
nyquist(ghs)
```

$N = Z - P \to Z = N + P \; = 0 + 0 = 0 \to$ estable.

Comprobación: $1 + G(s)H(s) = \frac{s+6}{s+5}$



[1] Esta representación no es siempre completa. Por ejemplo, en los casos en los que hay polos en el eje complejo hay que completarla con el comportamiento asociado a los semicírculos usados para esquivarlos. Además, a veces su interpretación no es trivial.

Diagrama de Nyquist: Matlab II

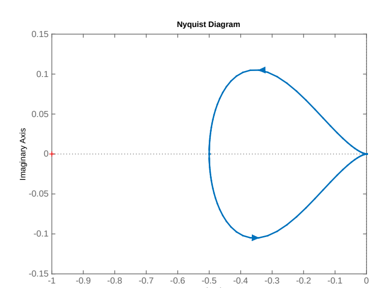
Ejemplo: Estudiar la estabilidad del sistema cuya $G(s)H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$

```
ghs=zpk([],[1,-2],1)
nyquist(ghs)
```

$N = Z - P \to Z = N + P \; = 0 + 1 = 1 \to$ inestable.

Comprobación: $1 + G(s)H(s) = \frac{(s-0{,}618)(s+1{,}618)}{(s-1)(s+2)}$

Para que fuese estable tendría que dar una vuelta a -1 en sentido contrario.

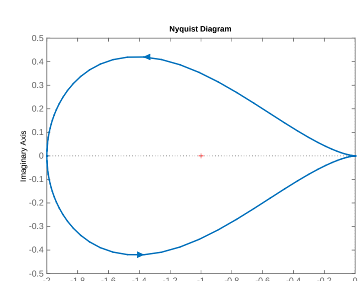


Ejemplo: $G(s)H(s) = \frac{4}{(s-1)(s+2)}$

$N = Z - P \to Z = N + P \; = -1 + 1 = 0 \to$ estable.

Comprobación: $1 + G(s)H(s) = \frac{s^2+s+2}{(s-1)(s+2)}$

Raices numerador: $-0{,}5 \pm 1{,}3j$



En estos ejemplos solo hemos modificado la ganancia del sistema en lazo abierto. Lo que observamos es que el diagrama de Nyquist se ha “re-escalado”. Veremos como estudiar la estabilidad con Nyquist cuando cambiamos la ganancia de G(s)H(s).

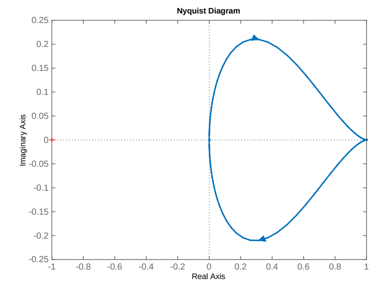
Diagrama de Nyquist: Matlab III

Ejemplo: $G(s)H(s) = \frac{s-2}{(s-1)(s+2)}$

$N = Z - P \rightarrow Z = N + P \ = 0 + 1 = 1 \rightarrow$ inestable.

Comprobación: $1 + G(s)H(s) = \frac{(s+3{,}236)(s-1{,}236)}{(s-1)(s+2)}$

La posición de los ceros de $G(s)H(s)$ no influye en la expresión $Z = N + P$, aunque si podrá hacerlo en la forma del diagrama de Nyquist



Ejemplo: $G(s)H(s) = \frac{2(s-0{,}2)(s-0{,}6)}{(s+0{,}4)(s+0{,}8)}$

$N = Z - P \rightarrow Z = N + P \ = 2 + 0 = 2 \rightarrow$ inestable.

Comprobación: $1 + G(s)H(s) = \frac{3(s^2-0{,}1333s+0{,}1867)}{(s+0{,}4)(s+0{,}8)}$

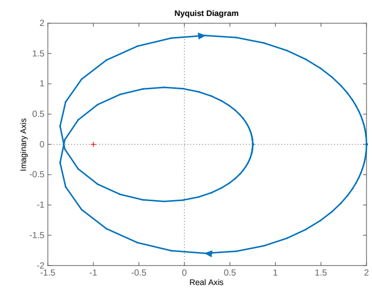
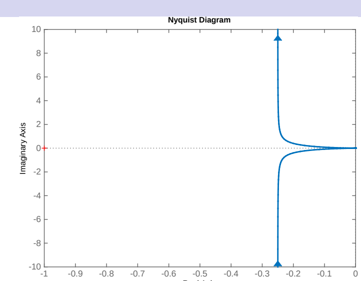


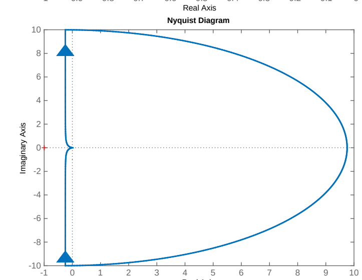
Diagrama de Nyquist: Matlab IV

Ejemplo: $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

Está incompleta (no es una curva cerrada).
Se debe a que tenemos un polo en el origen, que hay que esquivar, y ese tramo Matlab no es capaz de representarlo

```
ghs=zpk([],[0,-2],1);nyquist(ghs)
 %Completar Nyquist
syms s;ghS=1/s/(s+2);
theta=-pi/2:0.01:pi/2;s=0.05*exp(j*theta);
ghS=subs(ghS,'s',s);
hold on;plot(real(ghS),imag(ghS));
axis([-1,10,-10,10]);
```





$N = Z - P \rightarrow Z = N + P = 0 + 0 = 0 \rightarrow$ estable.

Comprobación: $1 + G(s)H(s) = \frac{(s+1)^2}{s(s+2)}$

Alternativamente, también podemos analizar como se completa la curva de forma teórica sustituyendo en $G(s)H(s)$ la variable s por $re^{j\theta}$, y viendo lo que sucede cuando $r \rightarrow 0$ y cuando θ varía entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$: $\lim_{r\rightarrow 0} G(re^{j\theta})H(re^{j\theta}) = \lim_{r\rightarrow 0} \frac{1}{re^{j\theta}(re^{j\theta}+2)} = \lim_{r\rightarrow 0} \frac{e^{-j\theta}}{2r}$.

Tiende a tener un radio infinito y va desde $\pi/2$ a $-\pi/2$, pasando por el ángulo 0.

Como al tomar el limite nos sale $\frac{Ke^{-j\theta}}{r}$ con K positiva, se cierra por el angulo de 0.

Diagrama de Nyquist: Matlab V

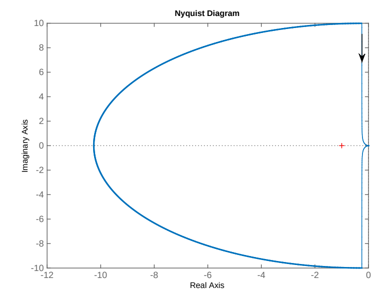
Ejemplo: $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s-2)}$

Tenemos que esquivar $s = 0$ (como en el caso anterior)

Lo hacemos con Matlab, dibujando la misma curva auxiliar que en el caso anterior sobre el Nyquist generado por Matlab para este ejemplo.

$N = Z - P \rightarrow Z = N + P = 1 + 1 = 2 \rightarrow$ inestable.

Comprobación: $1 + G(s)H(s) = \frac{(s-1)^2}{s(s-2)}$



Alternativamente, también podemos realizar el análisis teórico: sustituyendo en $G(s)H(s)$ la variable s por $re^{j\theta}$, y viendo lo que sucede cuando $r \rightarrow 0$ y cuando θ varía entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$:

$\lim_{r\rightarrow 0} G(re^{j\theta})H(re^{j\theta}) = \lim_{r\rightarrow 0} \frac{1}{re^{j\theta}(re^{j\theta}-2)} = \lim_{r\rightarrow 0} -\frac{e^{-j\theta}}{2r} = \lim_{r\rightarrow 0} \frac{e^{\pi-j\theta}}{2r}$. Tiende a tener un radio infinito y va desde $3\pi/2$ a $\pi/2$, pasando por el angulo π.

Como al tomar el limite nos sale $\frac{Ke^{-j\theta}}{r}$ con K negativa, se cierra por el angulo de π.

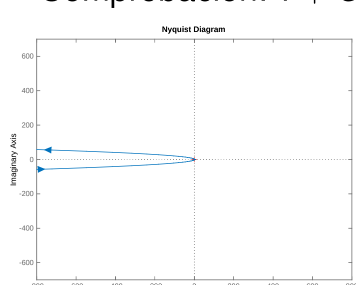
Diagrama de Nyquist: Matlab VI

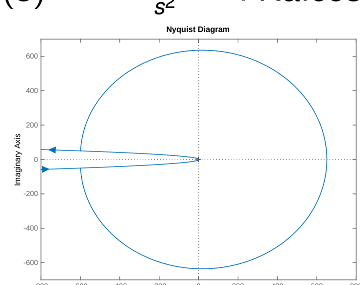
Ejemplo: $G(s)H(s) = \frac{0{,}5(s+2)(s+3)}{s^2}$

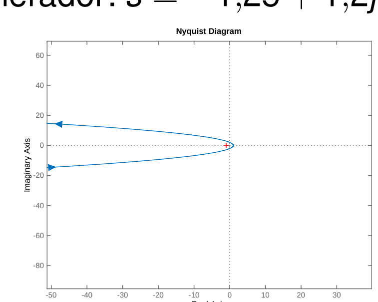
Tenemos que esquivar $s = 0$. Lo hacemos con Matlab, dibujando la misma curva auxiliar que en los casos anteriores sobre el Nyquist generado por Matlab para este ejemplo.

$N = Z - P \rightarrow Z = N + P = 0 + 0 = 0 \rightarrow$ estable.

Comprobación: $1 + G(s)H(s) = \frac{2*s^2+5*s+6}{s^2}$. Raíces numerador: $s = -1{,}25 + 1{,}2j$







Alternativamente, también realizamos el análisis teórico: $\lim_{r\rightarrow 0} G(re^{j\theta})H(re^{j\theta}) =$

$\lim_{r\rightarrow 0} \frac{0{,}5(re^{j\theta}+2)(re^{j\theta}+5)}{re^{2j\theta}} = \lim_{r\rightarrow 0} \frac{5e^{-2j\theta}}{r^2}$. El radio tiende a ∞, con $\theta = -\pi/2$ el desfase es π, con $\theta = 0$ el desfase es 0, y con $\theta = \pi/2$ el desfase es $-\pi$.

Al tomar el limite nos sale $\frac{Ke^{-n\theta j}}{r^n}$. Con $K > 0$, se cierra por el angulo de 0. Con $K < 0$ se cierra por el de π. n determina el recorrido.

Diagrama de Nyquist: Matlab VII

Ejemplo: $G(s)H(s) = \frac{0,5(s+5)}{s^2+4}$

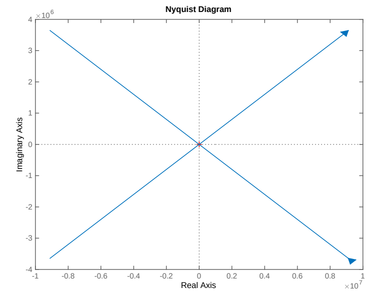
Tenemos que esquivar $s = \pm 2j$

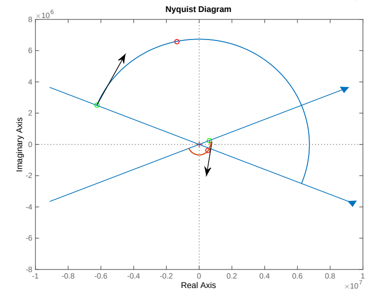
```
ghs=zpk(-5,[2j,-2j],0.5);nyquist(ghs)
syms s;ghS=0.5*(s+5)/(s^2+4);
R=1e-7;theta=-pi/2:0.01:pi/2;s=-2j+R*exp(j*theta);
ghSv=subs(ghS,'s',s);hold on;plot(real(ghSv),imag(ghSv));
plot(real(ghSv(1)),imag(ghSv(1)),'og');
plot(real(ghSv(100)),imag(ghSv(100)),'or');
R=1e-6;theta=-pi/2:0.01:pi/2;s=2j+R*exp(j*theta);
ghSv=subs(ghS,'s',s);hold on;plot(real(ghSv),imag(ghSv));
plot(real(ghSv(1)),imag(ghSv(1)),'og');
plot(real(ghSv(100)),imag(ghSv(100)),'or');
axis([-1e7,1e7,-8e6,8e6])
```

$N = Z - P \rightarrow Z = N + P = 0 + 0 = 0 \rightarrow$ estable.

Comprobación: $1 + G(s)H(s) = \frac{2*s^2+s+13}{2*s^2+8}$.

Ceros: $s = -0,25 \pm 2,54j$





Alternativamente, también realizamos el análisis teórico:

$\lim_{r\to 0} G(2j + re^{j\theta})H(2j + re^{j\theta}) = \lim_{r\to 0} \frac{0,5(re^{j\theta} + 5 + 2j)}{(re^{j\theta})(4j + re^{j\theta})} = \lim_{r\to 0} \frac{0,5(5+2j)}{4j} \frac{e^{-j\theta}}{r}$. El radio tiende a ∞, comprobar que empieza y acaba en el semicírculo correspondiente.

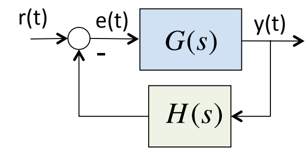
Repetir para $\lim_{r\to 0} G(-2j + re^{j\theta})H(-2j + re^{j\theta})$

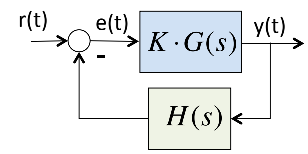
Procedimiento análogo a $s = 0$, añadiendo la posición del polo complejo conjugado.

Diagrama de Nyquist: Matlab Resumen

- Utilizar nyquist(ghs) sobre el sistema en lazo abierto $ghs = G(s)H(s)$
- Los tramos que queden abiertos se deben a todas las raíces s_i que hay que esquivar sobre el eje imaginario. Intentar completarlos esquivando los polos imaginarios puros que tiene G(s)H(s):
  - Superponiendo sobre el diagrama de Nyquist la transformada de los tramos asociados $s = s_i + re^{j\theta}$ obteniendo con la ayuda del cálculo simbólico los tramos $s = s_i + re^{j\theta}$, con un r pequeño (que permita que el tramo de cierre de represente convenientemente) y θ variando entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.
  - Sustituyendo en la expresión $G(s)H(s)$ s por $s_i + re^{j\theta}$, y viendo lo que sucede cuando r tiende a cero, tanto para el caso inicial de $\theta = -\pi/2$, el intermedio $\theta = 0$, y el final de $\theta = \pi/2$.
- Contar el número de polos positivos de $G(s)H(s) \rightarrow P$.
- Contar el número de vueltas en torno a $-1 \rightarrow N$ (positivo sentido horario, negativo sentido antihorario).
- Calcular el número de ceros como Z=N+P. Si $Z \neq 0$ es inestable:
  - Si P=0, el número de vueltas debe ser nulo, o el número de vueltas en un sentido y en el opuesto iguales.
  - Si P>0, P tiene que ser igual a la diferencia entre el número de vueltas antihorarias y las vueltas horarias.

Diagrama de Nyquist: estabilidad dependiente de K





- En los ejemplos anteriores hemos estudiado la estabilidad del sistema de la figura superior para una $G(s)H(s)$ fija, en la que no aparece ningún parámetro variable.
- En el estudio de estabilidad de lugar de las raíces hemos estudiado simultáneamente para diferentes valores de K la estabilidad del sistema de la figura inferior.

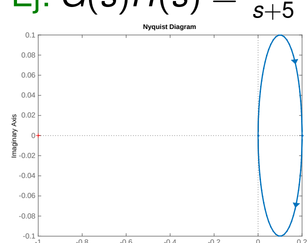
¿Podemos utilizar Nyquist para estudiar la estabilidad del segundo sistema?

- Para dibujar el diagrama de Nyquist, en vez de contar las vueltas que $F(s)=1+G(s)H(s)$ da en torno a s=0, decidimos representar G(s)H(s) y contar las vueltas que se dan en torno a -1.
- La ecuación característica del segundo caso es: $F(s) = 1 + KG(s)H(s)$. Sus ceros/polos son los mismos que los de $\frac{F(s)}{K} = \frac{1}{K} + G(s)H(s)$.
- Tendríamos que contar las vueltas que $\frac{1}{K} + G(s)H(s)$ da en torno a 0. Pero si dibujamos el diagrama de Nyqvist de $G(s)H(s)$ y contamos el número de vueltas que éste da al punto $-\frac{1}{K}$ podemos determinar la estabilidad del sistema para diferentes valores de K.

Nyquist: ejemplos de estabilidad dependiente de K (

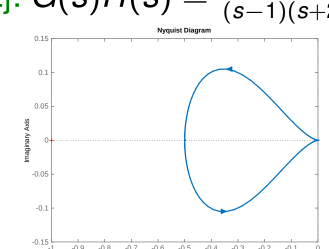
Analizaremos los ejemplos anteriores:

Ej: $G(s)H(s) = \frac{1}{s+5}$



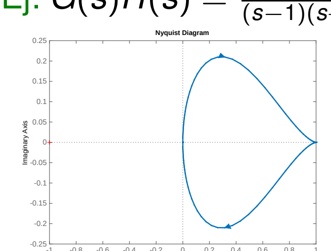
P=0, Estable $\forall K$, ya que P=0 y N=0 porque el diagrama nunca engloba a un punto $-\frac{1}{K}$.

Ej: $G(s)H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$



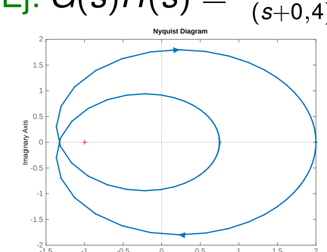
Como $P = 1$, la estabilidad necesita una vuelta antihoraria, que ocurre $K > \frac{1}{0{,}5} = 2$.

Ej: $G(s)H(s) = \frac{s-2}{(s-1)(s+2)}$



Como $P = 1$, la estabilidad necesita una vuelta antihoraria que no hay (inestable).

Ej: $G(s)H(s) = \frac{2(s-0{,}2)(s-0{,}6)}{(s+0{,}4)(s+0{,}8)}$

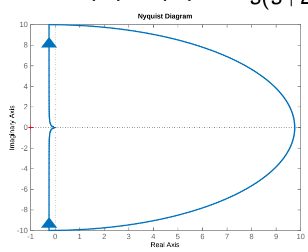


$P = 0$, es estable si no hay vueltas, cosa que ocurre para $K < \frac{1}{1{,}33}$

Nyquist: ejemplos de estabilidad dependiente de K (

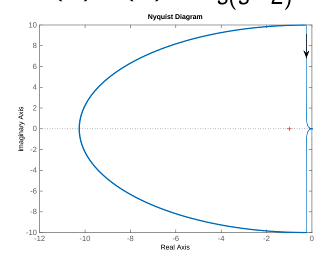
Analizaremos los ejemplos anteriores:

Ej: $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+2)}$



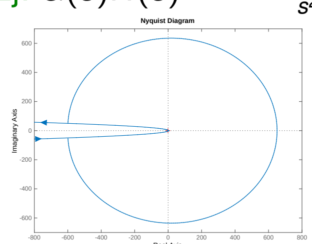
Como $P = 0$ y no hay vueltas nunca, siempre es estable.

Ej: $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s-2)}$



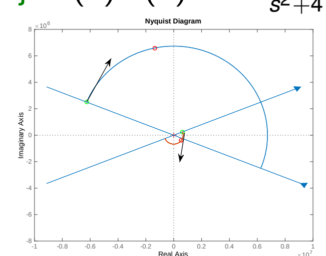
Como $P = 1$ y siempre hay una vuelta antihoraria ($N = -1$), es siempre inestable.

Ej: $G(s)H(s) = \frac{0{,}5(s+2)(s+3)}{s^2}$



Como $P = 0$, y nunca engloba al 0, siempre es estable.

Ej: $G(s)H(s) = \frac{0{,}5(s+0{,}5)}{s^2+4}$



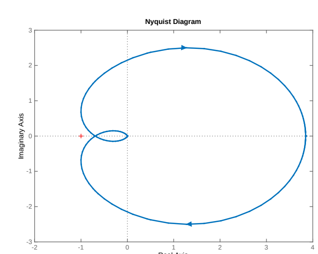
Como $P = 0$, y nunca engloba al 0, siempre es estable.

Nyquist: estabilidad relativa I

El diagrama de Nyquist también nos da una idea de la estabilidad relativa de los sistemas o lo que les falta para que dejen de ser estables para convertirse en inestables.

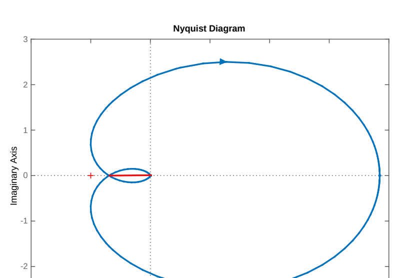
Ejemplo: $G(s)H(s) = \frac{50}{(s+1)(s^2+4s+13)}$

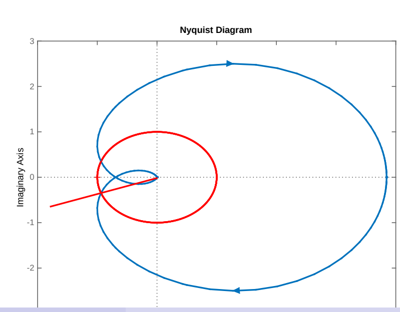
$Z = P + N = 0 + 0 = 0$



¿Como podemos hacer al sistema anterior inestable ?

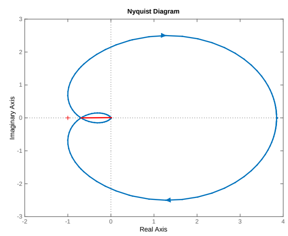
- Multiplicándolo por K_g: $\frac{1}{K_g} = |GH(jw_g)|$ $\rightarrow K_g = \frac{1}{|GH(jw_g)|}$, siendo w_g la que se obtiene cuando $arg(GH(jw_g)) = -180$. K_g es el margen de ganancia
- Multiplicándolo por $e^{-j\phi}$: $-180 = arg(GH(jw_f)) - \phi$, siendo w_f la que se obtiene cuando $|GH(jw_f)| = 1$. ϕ es el margen de fase.

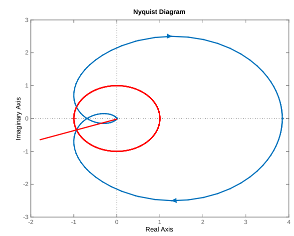




Nyquist: estabilidad relativa II

- Margen de ganancia $K_g = \frac{1}{|GH(jw_g)|}$, siendo w_g la que se obtiene cuando $arg(GH(jw_g)) = -180$.
- Margen de fase $\phi = 180 + arg(GH(jw_f))$, siendo w_f la que se obtiene cuando $|GH(jw_f)| = 1$.





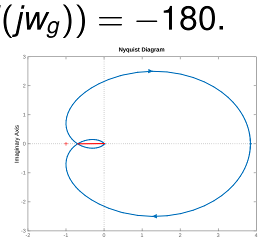
Si queremos calcular nosotros los valores de ambos márgenes (K_g y ϕ) podemos utilizar la orden freqresp(sys) y buscar los valores en los que se cumplen las restricciones impuestas.

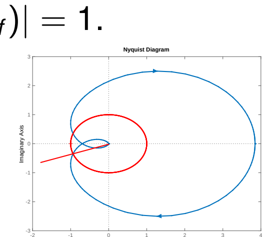
Es más eficiente usar la orden de Matlab [Mg,Mf,wg,wf]=margin(sys)

```
ghs=tf(zpk([],[-2+3j,-2-3j,-1],50));
nyquist(ghs);
%Circulo unitario
theta=0:0.01:2*pi;plot(cos(theta),sin(theta),'k')
%Elijo rango de frecuencias sobre Nyquist
w=[3:0.001:5]
[GHw,w]=freqresp(ghs,w);GHw=squeeze(GHw);
%Margen de ganancia (parte compleja nula)
[cc,k]=min(abs(imag(GHw)))
wg1=w(k),Kg1=1/abs(GHw(k))
%Margen de fase (modulo 1)
[cc,k]=min(abs(abs(GHw)-1))
wf1=w(k),mf1=180+angle(GHw(k))*180/pi
%Con Margin
[Kg1,mf1,wg1,wf1]=margin(ghs)
```


Nyquist: estabilidad relativa III

- Margen de ganancia $K_g = \frac{1}{|GH(jw_g)|}$, siendo w_g la que se obtiene cuando $arg(GH(jw_g)) = -180$.
- Margen de fase $\phi = 180 + arg(GH(jw_f))$, siendo w_f la que se obtiene cuando $|GH(jw_f)| = 1$.





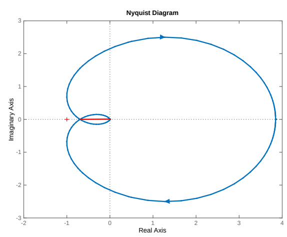
El diagrama de Nyquist, salvo por los tramos de radio infinito (asociadas a los semicírculos infinitesimales que esquivan los polos sobre el eje imaginario) representa, en el plano complejo, como varía $GH(jw)$ y $GH(-jw)$ para distintos valores de w.

¿Existe alguna otra curva en la que representamos varía $GH(jw)$ según varía w?

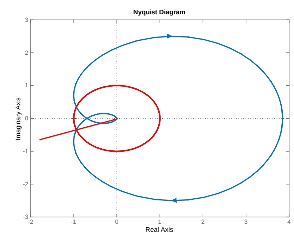
- El diagrama de Bode de un sistema $B(s)$ utiliza una curva para representar $20\log_{10}(|B(s)|)$ y otra otro para el argumento en grados $\mathrm{arg}(B(s))$.
- El diagrama de Bode habitualmente asociado al sistema con el que trabajamos es el del lazo cerrado $G_{LC}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$
- Sin embargo, para estudiar la estabilidad relativa como en Nyquist necesitamos el Bode de la función en lazo abierto G(s)H(s). Por lo tanto, representaremos en el Bode del lazo abierto el margen de fase y ganancia.

Nyquist: estabilidad relativa IV

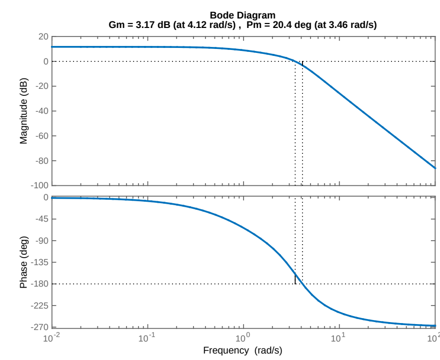
- Margen de ganancia $K_g = \frac{1}{|GH(jw_g)|}$, siendo w_g la que se obtiene cuando $arg(GH(jw_g)) = -180$.



- Margen de fase $\phi = 180 + arg(GH(jw_f))$, siendo w_f la que se obtiene cuando $|GH(jw_f)| = 1$.



- Diagrama de Bode de $GH(s)$
  - Margen de ganancia ($arg(GH(jw)) = -180$):
    $$20log_{10}(K_g) = \; -20log_{10}|GH(jw_g)|$$
  - Margen de fase ($|GH(jw)| = 1$):
    $$-180 = arg(GH(jw_g)) - \phi$$
  - Se dibujan directamente sobre el Bode:
    margin(ghs)



Nyquist: estabilidad relativa V

¿Mirando los valores del margen de ganancia y del margen de fase podemos saber si el sistema es estable o inestable?

Depende del tipo de sistema:

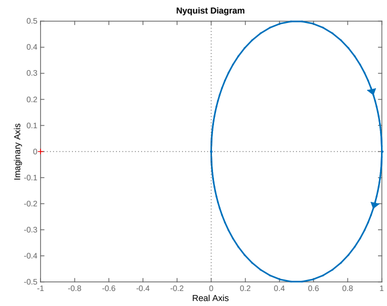
- En general, tenemos que mirar el número de polos de $GH(s)$ con parte real positiva y el diagrama de Nyquist (para saber si hay vueltas o no a -1, y en el sentido en el que éstas se están dando).
- Si no tenemos ningún polo en $GH(s)$ con parte real positiva (P=0), será inestable cuando haya algún rodeo a -1 (tenemos que mirarlo)
  - Si ningún cero de $GH(s)$ tiene parte real positiva, podemos aprovechar propiedades particulares de los sistemas de fase mínima[1], que nos aseguran que si el sistema tiene margen de ganancia y fase positivos, el sistema es estable y si los dos negativos, inestable
  - Si algún cero de $GH(s)$ tiene parte real positiva, tenemos que mirar el diagrama de Nyquist.

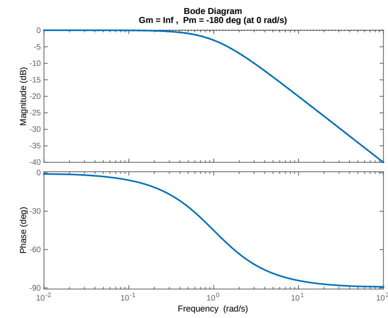
[1] Un sistema de fase mínima tiene todos los polos y ceros con parte real estrictamente negativa.

Nyquist: ejemplos de estabilidad relativa I

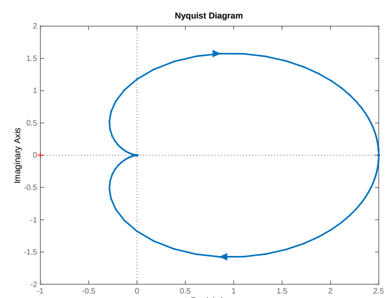
Vamos a ver que sucede con algunos ejemplos:

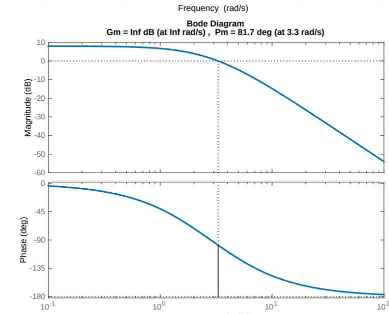
Ej: $GH(s) = \frac{1}{s+2}$
Nyquist: Z=P+N=0
Mg (dB): Inf
Mf (°): 180





Ej: $GH(s) = \frac{20}{s^2+6s+8}$
Nyquist: Z=P+N=0
Mg (dB): Inf
Mf (°): 81.7

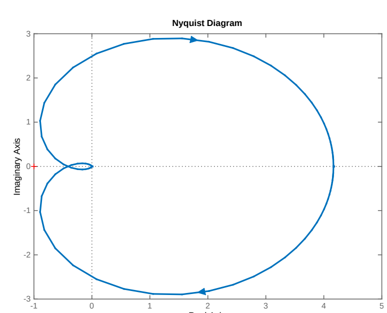


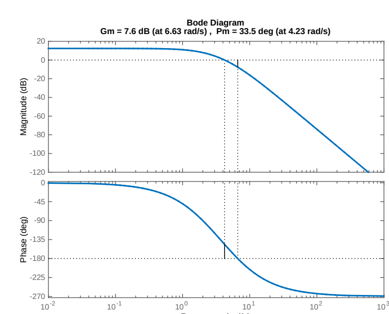


Nyquist: ejemplos de estabilidad relativa II

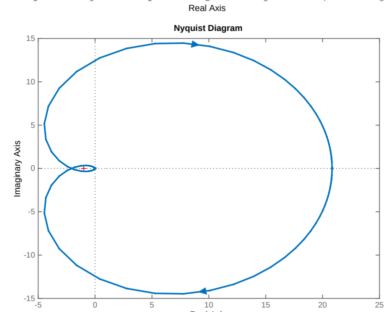
Vamos a ver que sucede con algunos ejemplos:

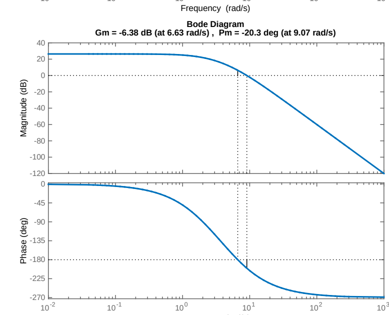
Ej: $GH(s) = \frac{200}{s^3+12s^2+44s+48}$
Nyquist: Z=P+N=0
Mg (dB): 7.6
Mf (°): 33.5
$7{,}6 = 20log_{10}K_g \rightarrow K_g = 2{,}4$





Ej: $GH(s) = \frac{1000}{s^3+12s^2+44s+48}$
Nyquist: Z=P+N=2
Mg (dB): -6.38
Mf (°): -20.3





Estabilidad: Lugar de las raices vs. Nyquist

Tanto el lugar de las raíces como el diagrama de Nyqvist nos permiten determinar la estabilidad del sistema en lazo cerrado a partir de GH(s).

- El lugar de las raíces nos permite:
  - Representar la posición de todos los polos del sistema en lazo cerrado para diferentes valores de K.
  - Además, suponiendo estabilidad, a partir de la posición de los polos más dominantes (cercanos al eje imaginario) del lazo cerrado podemos caracterizar el comportamiento del sistema en lazo cerrado (transitorio, permanente, frecuencia)
- El diagrama de Nyquist permite:
  - Estudiar la estabilidad del sistema a partir de la respuesta en frecuencia del lazo abierto. Por lo tanto no es imprescindible que conozcamos la función de transferencia.
  - Además, si observamos a través de las tendencias del Bode experimental de G(s)H(s) que éste es un sistema de fase mínima, nos llega con calcular el margen de fase y el margen de ganancia para saber como estabilizar/desestabilizar al sistema.
  - ¿Podemos caracterizar la respuesta del sistema a partir del diagrama de Nyquist o los margénes?

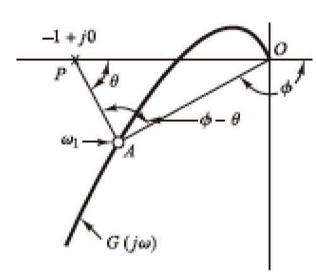
Nyquist: caracterización en frecuencia del LC

La relación entre el diagrama de Bode del lazo abierto $GH(s)$ y del diagrama de Nyquist de la misma función es directa (en ambos casos se representa $GH(jw)$ para diferentes frecuencias).

Para caracterizar la respuesta en frecuencia del lazo cerrado, lo que realmente nos interesa es el diagrama de Bode del sistema en lazo cerrado.

¿Podemos obtener el Bode del lazo cerrado a partir del diagrama de Nyquist?

- Hay un tramo del Nyquist que proporciona la información de $GH(jw)$ con $w \in [0, \infty]$
- La función de transferencia en lazo cerrado $G_{LC}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = = \frac{1}{H(s)} \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)} M(s)$.
- Conocemos H(s) (lo elegimos) y G(jw)H(jw). Podemos obtener el Bode sin problemas.
- En la gráfica de la derecha, G(jw) se representa a G(jw)H(jw) y como el valor de M(jw) se puede obtener de forma gráfica.
- Si el sistema está realimentado unitariamente H(jw)=1 los cálculos se simplifican notablemente.



$\overline{OA}$ nos da $G(jw)H(jw)$
$\overline{PA}$ nos da $1 + G(jw)H(jw)$ (trasladando el origen)
Solo hay que calcular el cociente de módulos y diferencia de argumentos.

Nyquist: caracterización de la respuesta temporal

¿Podemos usar información del diagrama de Nyquist para saber como es la respuesta del sistema a la entrada escalón?

En el caso del lugar de las raíces, observamos que le sucede a los polos más dominantes y distinguimos si es un polo simple o un complejo conjugado. A continuación establecemos una relación entre los polos existentes ($s = -\sigma$ o $s = -\sigma \pm wj$) y la forma y características (t_s, M_p, t_p, t_r) de la respuesta.

En este caso veremos la relación que hay entre los márgenes y la respuesta.

- Función de transferencia en lazo cerrado: $G_{LC}(s) = \frac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n + w_n^2}$
  - Polos en $s=-\sigma \pm jw$, con $\sigma = \zeta w_n$ y $w = w_n\sqrt{1-\zeta^2}$ (frecuencia de oscilación)
  - Tiene una sobreelongación $M_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$ (depende de ζ)
- Función de transferencia en lazo abierto (con H(s)=1): $G_{LA}(s) = \frac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n s}$.
  - El margen de fase se obtiene obtiene cuando $|G_{LA}(jw_f)| = 1 \rightarrow$ $w_f = w_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}$ y vale $\phi = 180 + arg(G_{LA}(jw_f)) =$ $atan\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}$. Para valores de $0 < \zeta < 0{,}6$ se pude obtener como $\phi = 100\zeta$. Al depender únicamente de ζ afecta a la sobreelongación y por lo tanto corregir el magen de fase sirve para corregir la sobreelongación.
  - El margen de ganancia está relacionado con la ganancia del sistema y como está influye en el error y la estabilidad, se ajustará teniendo en cuenta ambos criterios.

Diagrama de Nyquist Discreto

¿Se puede utilizar el diagrama de Nyquist para sistemas discretos ?