Respuesta temporal

Ingeniería Electrónica de Comunicaciones

Eva Besada Portas

Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática.
Universidad Complutense de Madrid

Curso 2020-2021

Esquema

Respuesta permanente y transitoria

En Sistemas Lineales hemos visto que para ver la respuesta del sistema LTI a una entrada determinada se puede: 1) multiplicar la función de transferencia por la transformada Laplace/Z de la entrada, realizar una descomposición en fracciones simples del cociente de polinomios resultantes y calcular la inversa de la transformada Laplace/Z.

	LTI Continuo	LTI Discreto
	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-(\sigma+jw)}\right) = (e^{(\sigma+jw)t})$	$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z+re^{jw}}\right) = (-re^{jw})^n$
Tiende a 0	$\sigma < 0$	$r < 1$
$1(\cdot)$ ó $sen(\cdot)$	$\sigma = 0$	$r = 1$
Tiende a ∞	$\sigma > 0$	$r > 1$

En el caso en el que los polos tengan multiplicidad mayor que 1, el comportamiento se mantiene salvo en los casos en los que $\sigma = 0$ o $r = 1$, en los que el comportamiento pasa a tender a ∞.

Por lo tanto, hay componentes que desaparecen con el paso del tiempo (los que tienden a 0) y otros que permanecen ($1(t)$, $sin(t)$ o tendencia a ∞).

Respuesta/régimen permanente/estacionaria: lo que permanece.

Respuesta transitoria: el comportamiento inicial (todas las componentes).

Ejemplos de respuesta transitoria y permanente

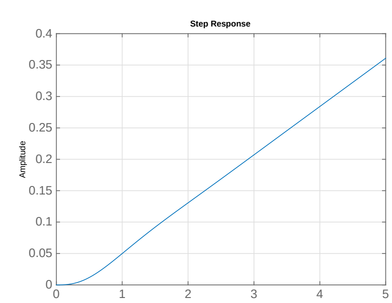
Ejemplo 1: Determinar el régimen transitorio y permanente de la respuesta de $G(s) = \frac{1}{s^3+4s^2+13s}$ a $u(t) = 1(t)$

Respuesta: $Y(s) = \frac{1}{(s^3+4s^2+13s)}\frac{1}{s}$

Polos de $Y(s)$: $\{0; 0^2; -2 \pm 3j\}$

$$y(t) = \frac{t}{13} + \frac{4 \cdot e^{-2t}(cos(3t) - \frac{5}{12}sin(3t))}{169} - \frac{4}{169}$$

Permanente: $y_{ss}(t) = \frac{t}{13} - \frac{4}{169}$



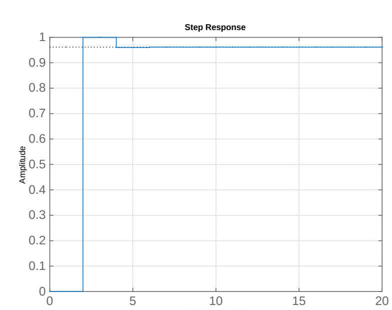
Ejemplo 2: Determinar el régimen transitorio y permanente de la respuesta de $G(z) = \frac{1}{z^2+0{,}04}$ a $u(n) = 1(n)$

Respuesta: $Y(z) = \frac{1}{z^2+0{,}04}\frac{z}{z-1}$

Polos de $Y(z)$: $\{1; 0{,}2e^{\pm j\pi/2}\}$

$$y(n) = 0{,}2^{n-1}\frac{5sen(\pi(n-1)/2) - 25cos(\pi(n-1)/2)}{26} + \frac{25}{26}$$

Permanente: $y_{ss}(n) = \frac{25}{26}$



Esquema

Respuesta permanente sistemas LTI

Para calcular el valor de la respuesta permanente del sistema LTI:

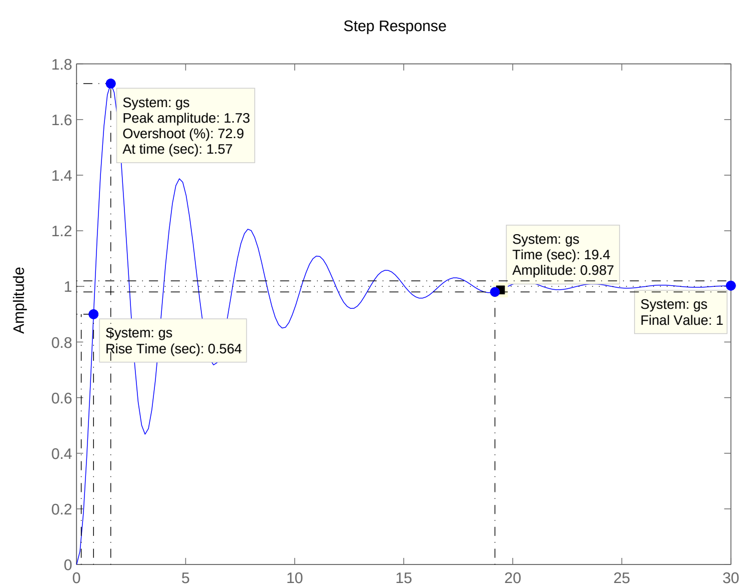
- Continuo estable ante una entrada acotada:
  - Podemos combinar:
    - La propiedad del valor final de la TL : $f(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$
    - La relación entre la entrada y salida de un sistema a través de la G(s): $Y(s) = G(s)U(s)$
  - Para obtener que $y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot G(s)U(s)$
- Discreto estable ante una entrada acotada:
  - Podemos combinar:
    - La propiedad del valor final de la Z : $f(\infty) = \lim_{z \to 1} (z - 1) \cdot F(z)$
    - La relación entre la entrada y salida de un sistema a través de la G(z): $Y(s) = G(z)U(z)$
  - Para obtener que $y(\infty) = \lim_{z \to 1} (z - 1) \cdot G(z)U(z)$

Si el sistema no es estable y la entrada no es acotada (o es sinusoidal) el límite no vale (o hay que interpretarlo).

Esquema

1. Respuesta genérica
2. Respuesta permanente
3. Respuesta transitoria

Características habituales del transitorio



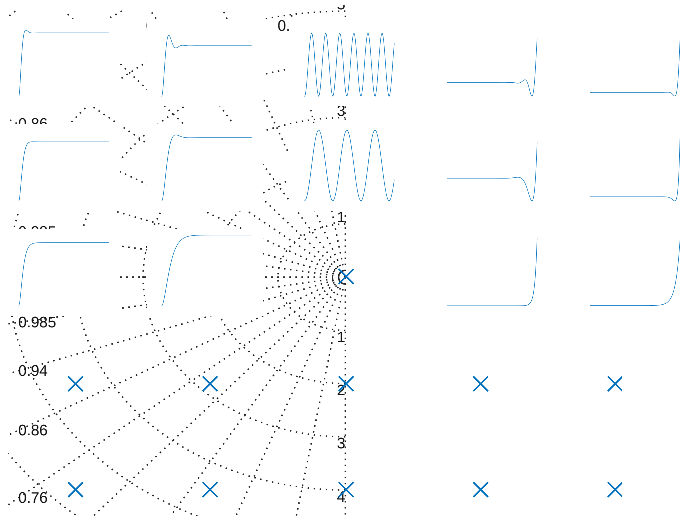
- Tiempo subida (Rise Time, t_r): Tiempo que se tarda para ir del a % al b % del estacionario (habitualmente del 10 % al 90 %).
- Sobreelongacion (Overshooting, M_p): es el porcentaje que el valor final de la salida sobrepasa por primera al valor del estacionario.

  En algunos casos hay bajo-elongación.

- Tiempo asentamiento (Settling Time, $t_{s(x\,\%)}$): Tiempo necesario para que la señal permanezca en torno a un % del estacionario (habitualmente el 2 %).
- Tiempo de pico (Overshooting Time, t_p): Tiempo asociado a la sobreelongacion.

Respuesta LTI continuo al escalón

La respuesta para un sistema LTI continuo de segundo orden en función de la posición de los polos ($\sigma \pm jw$)

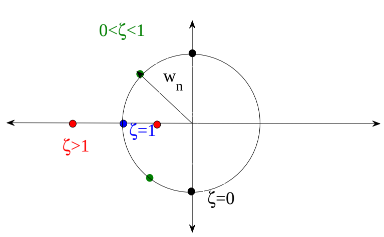


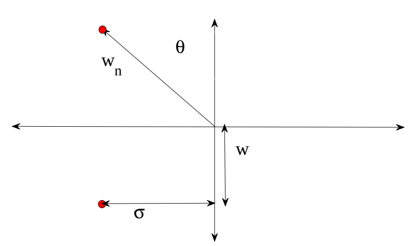
1. Si $w = 0$ y $\sigma < 0$, según $|\sigma|$ disminuye la respuesta llega más despacio al estacionario: los polos negativos cercanos al eje imaginario dominan a los más lejanos.
2. Si $\sigma = 0$, según w aumenta la oscilación es más rápida.
3. Si $\sigma < 0$ y $w \neq 0$ es una combinación casos 1 y 2.
4. Si $w = 0$ y $\sigma > 0$, según $|\sigma|$ aumenta, la respuesta es más rápida.
5. Si $\sigma > 0$ y $w \neq 0$, es una combinación casos 2 y 4

Hay que estudiar el comportamiento de los polos estables dominantes (parte real negativa, cercanos al eje imaginario), ya que su efecto se desvanece más tarde.

Respuesta transitoria al escalón con LTI continuo

- Polo dominante real: $s = -\sigma$ $\rightarrow$ Tiempo de asentamiento: $t_{s(2\,\%)} = \frac{4}{\sigma}$
- Polo dominante complejo: $s = -\sigma \pm jw = -\zeta w_n \pm w_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$,





$0 < \zeta < 1$
$w_n = abs(s)$
$\zeta = sin(angle(s - \pi/2))$

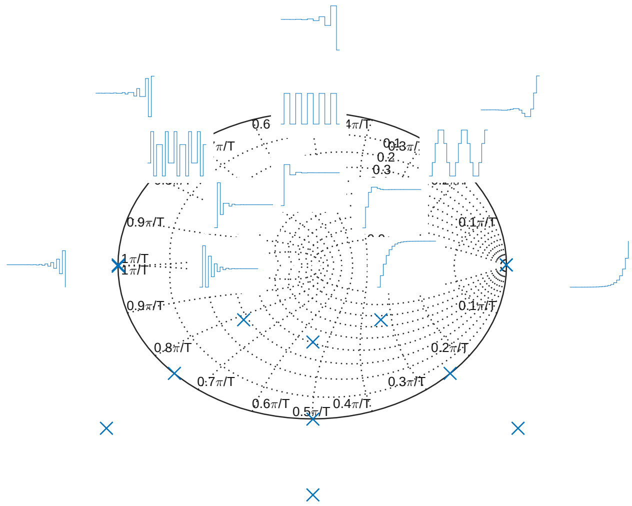
- Tiempo subida:
  $wt_{r(0-100)} + acos\zeta = \pi$
  $t_{r(10-90)} = \frac{1+1{,}1\zeta+1{,}4\zeta^2}{w_n}$
- Sobreelongación: $M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- Tiempo asentamiento: $t_{s(2\,\%)} = \frac{4}{\sigma}$
- Tiempo de pico: $t_p = \frac{\pi}{w}$

Al limitar los valores de t_r, M_p, t_s y t_p, se limitan los valores de w_n, ζ, σ, w:

- $t_r < cte \rightarrow$ relacion w_n y δ cte
- $M_p < cte \rightarrow \zeta > cte'$
- $t_s < cte \rightarrow \sigma > cte'$
- $t_p < cte \rightarrow w > cte'$

Respuesta LTI discreto al escalón

La respuesta para un sistema LTI discreto de segundo orden en función de la posición de los polos (re^{jw})



1. Si $0 < r < 1$ y $w = 0$, según r disminuye la respuesta llega más rapido al estacionario: los polos cercanos a 0 son dominados por los más lejanos.
2. Si $r = 1$, según w aumenta (hasta $\pi/2$) la oscilación es más rápida.
3. Si $0 < r < 0$ y $w \neq 0$ es una combinación casos 1 y 2.
4. Si $r > 1$ y $w = 0$, según r aumenta, la respuesta es más rápida.
5. Si $r > 1$ y $w \neq 0$, es una combinación casos 2 y 4
6. Si es un polo con parte real negativa (r<0), se le añade el comportamiento oscilante entre dos n sucesivas.

Es importante estudiar el comportamiento de los polos estables dominantes (cercanos al circulo unidad), ya que su efecto tarda más en desvanecerse.

Respuesta transitoria al escalón con LTI discreto

Para hacer el análisis se aprovecha la relación entre los polos continuos y discretos: $z = e^{Ts}$

- Polo dominante real: z=r
  - $0 < r < 1 \rightarrow \quad r = e^{-T\sigma} \rightarrow t_{s(2\,\%)} = \frac{4}{\sigma}$
  - $-1 < r < 0 \rightarrow |r| = e^{-T\sigma} \rightarrow t_{s(2\,\%)} = \frac{4}{\sigma}$
    $\rightarrow$ Además oscila cada n
- Polo dominante complejo: $z = re^{jw_d}$
  - $0 < r < 1 \rightarrow re^{jw_d} = e^{-T\sigma \pm Tw} \rightarrow r = e^{-T\sigma}, w_d = Tw \rightarrow$
    $\rightarrow$ Obtener las características del continuo)
  - $-1 < r < 0 \rightarrow |r| = e^{-T\sigma} \rightarrow t_{s(2\,\%)} = \frac{4}{\sigma}$
    $\rightarrow$ Resto es más complicado (oscila cada n)