Tema 1: Álgebra de matrices. Determinantes. Sistemas de ecuaciones

Álgebra de matrices

Definición: A es una matriz de orden mxn y se denota $A \in M_{mxn}$ si es una tabla rectangular formada por m filas y n columnas de números en $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$,etc. llamados coeficientes. El elemento o coeficiente que está en la fila i y la columna j se denota por a_{ij} donde $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición: Sea A una matriz con m filas y n columnas. Diremos que el orden de A es mxn.

Definición: Dos matrices A y B son iguales si son del mismo orden, es decir, tienen el mismo número de filas y columnas y los elementos situados en las mismas posiciones son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$.

Definición: Una matriz A es cuadrada si $m = n$ y se denota por $A \in M_{nxn}$.

Definición: Se dice que una matriz A es una matriz columna de m filas si $A \in M_{mx1}$.
Observación: Cada columna de una matriz es una matriz columna.

Definición: Se dice que una matriz A es una matriz fila de n columnas si $A \in M_{1xn}$.
Observación: Cada fila de una matriz es una matriz fila.

Ejemplos:

Definición: Se denomina matriz nula de orden mxn a la matriz $0 \in M_{mxn}$ si todos los coeficientes de la matriz son cero.

Definición: Se denomina matriz traspuesta de $A \in M_{mxn}$ y se denota por $A^t \in M_{mxn}$ a la matriz que resulta de permutar las filas por las columnas de la matriz A, es decir, $a^t_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$.

Ejemplo:

Definición: Los coeficientes a_{ij} con $i = j$ de una matriz $A \in M_{mxn}$ forman la diagonal principal.

Definición: La matriz cuadrada $I_n \in M_{nxn}$ se denomina matriz identidad. Todos los coeficientes de la diagonal principal son iguales a 1 y el resto son cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \text{ donde } \begin{cases} a_{ij}=1 & si \quad i=j \\ a_{ij}=0 & si \quad i \neq j \end{cases}.$$

Definición: Se dice que la matriz A es simétrica si $A^t = A$.

Ejemplo:

Suma de matrices

Sean $A, B \in M_{mxn}$. La suma $C = A + B$ de las matrices A y B es una matriz $C \in M_{mxn}$ cuyos elementos son:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$$

Notemos que la operación suma sólo está definida para matrices del mismo orden.

Ejemplo:

Multiplicación de matrices por un escalar
Sea $A \in M_{mxn}$. La multiplicación de la matriz A por un escalar $r \in \mathbb{R}$ es una matriz $C = rA \in M_{mxn}$ cuyos elementos son:

$$c_{ij} = ra_{ij} \forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$$

Ejemplo:

Propiedades
Sean $A, B, C \in M_{mxn}$, se verifica que:

1. $A + B = B + A$ (Propiedad conmutativa)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Propiedad asociativa)
3. $A + 0 = A$ (Elemento neutro)
4. $A + (-A) = 0$ ($-$A es la opuesta de A)
5. $r(A + B) = rA + rB \quad \forall r \in \mathbb{R}$
6. $(r + s)A = rA + sA \quad \forall r, s \in \mathbb{R}$

Producto de matrices
Sean $A \in M_{mxn}$ y $B \in M_{nxp}$. La multiplicación de la matriz A por la matriz B es una matriz $C = AB \in M_{mxp}$ cuyos elementos son:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} \quad \forall i, j$$

Nótese que para poder multiplicar las matrices A y B es necesario que el número de columnas de A sean iguales al número de filas de B.

Ejemplo:

Propiedades
Sean A, B, C con tamaños apropiados para que las siguientes operaciones estén definidas. Se cumple que:

1. $AB \neq BA$ (No Propiedad conmutativa)
2. $A(BC) = (AB)C$ (Propiedad asociativa)
3. $A(B + C) = AB + AC$ (Propiedad distributiva por la izquierda)
4. $(B + C)A = BA + CA$ (Propiedad distributiva por la derecha)
5. $r(AB) = (rA)B = A(rB) \quad \forall r \in \mathbb{R}$
6. $(rs)A = r(sA) = s(rA) \quad \forall r, s \in \mathbb{R}$
7. $IA = A = AI$

   Sea $A \in M_{mxn}$

8. $(A^t)^t = A$
9. Sea $B \in M_{mxn}, (A + B)^t = A^t + B^t$
10. Sea $B \in M_{nxp}, (AB)^t = B^t A^t$

11. $(rA)^t = rA^t, \forall r \in \mathbb{R}$

Potencia de matrices
Sea $A \in M_{nxn}$ una matriz cuadrada, se define $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$A^m = (A^{m-1})A = A...A$$

Se hace notar que $A^0 = I$.

Propiedades
Sea $A, B \in M_{nxn}$. Se cumple que:

1. $A^{m+r} = A^m A^r$
2. $(A^m)^r = A^{mr}$
3. $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$

Potencia de suma de matrices
Sea $A, B \in M_{nxn}$ una matriz cuadrada, se define $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^m = \binom{m}{0} A^m B^0 + \binom{m}{1} A^{m-1} B^1 + ... + \binom{m}{m} A^0 B^m$$

sabiendo que $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

Definición: Se dice que $A \in M_{nxn}$ es invertible o que tiene una inversa si existe $A^{-1} \in M_{nxn}$ tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

En ese caso, A^{-1} es la inversa de A.

Propiedades

- Si A es invertible, existe una única matriz inversa de A.

  Sean $A, B, A_1, ..., A_p \in M_{nxn}$. Se verifica que:

- Si son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Si $A_1, ..., A_p$ son invertibles, entonces el producto $A_1 \cdots A_p$ es invertible y $(A_1 \cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1} \cdots A_1^{-1}$
- Si $A \in M_{nxn}$ es invertible entonces $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
- A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$
- $\forall m \in \mathbb{N}, A^m$ es invertible y $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$ se verifica que αA es invertible y

$$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$$

Definición: Llamamos operación de fila (columna) a una de las siguientes operaciones que se puede hacer sobre una fila (columna) de una matriz cualquiera:

- Intercambiar una fila (columna) por otra.
- Multiplicar una fila (columna) por un escalar.
- Operar una fila (columna) con otra, sumando o restando entre ellas incluso multiplicadas por un escalar.

Definición: Una matriz elemental es aquella que se obtiene al realizar una única operación de fila sobre una matriz identidad.
Nuestro objetivo es que si se realiza una operación de fila sobre una matriz $A \in M_{nxn}$ la matriz resultante es igual al producto de matrices EA donde $E \in M_{nxn}$ y E se crea al realizar la misma operación elemental sobre la matriz identidad I_n.
Las matrices elementales $E \in M_{nxn}$ son invertibles (para cada una existe E^{-1} que es la matriz elemental que transforma E en la matriz identidad I_n).

Algoritmo para calcular A^{-1}
Se coloca A al lado de I_n para formar la matriz $[A, I_n]$ con el objetivo de realizar en I_n las mismas operaciones fila elementales que en A.
Intentamos transformar A en I_n mediante operaciones fila elementales y aplicamos las mismas operaciones para intentar transformar I_n en otra matriz B. Si tenemos que A se ha transformado en I_n entonces tenemos que $B = A^{-1}$. Si no se puede obtener I_n a partir de A, entonces A no es invertible.

Ejemplo:

Determinantes

El cálculo del determinante de una matriz permitirá conocer cuando una matriz cuadrada es invertible y un método alternativo para su cálculo.

Definición: El determinante es una función que asocia a cada matriz cuadrada $A \in M_{nxn}$ un número real.

Ejemplo:

- Si tenemos una matriz $1x1$ entonces:

$$A = (a_{11}) \Rightarrow det(A) = a_{11}$$

- Si tenemos una matriz $2x2$ entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Si tenemos una matriz $3x3$ entonces (Regla de Sarrus):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Definición: Dada una matriz $A \in M_{nxn}$ llamaremos *adjunto* de A en la posición ij al valor $adj_{ij}(A) = (-1)^{i+j} detA_{ij}$ donde A_{ij} es la submatriz de A obtenida al eliminar la fila i-ésima y la columna j-ésima. El signo $(-1)^{i+j}$ depende de la posición (i, j) en la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Definición: (Regla de Laplace) El determinante de una matriz $A \in M_{nxn}$ puede calcularse mediante el desarrollo por adjuntos a lo largo de una columna o una fila de A.
Por columnas:

$$det(A) = a_{1j}adj_{1j}(A) + a_{2j}adj_{2j}(A) + ... + a_{nj}adj_{nj}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}adj_{kj}(A)$$

Por filas:

$$det(A) = a_{i1}adj_{i1}(A) + a_{i2}adj_{i2}(A) + ... + a_{in}adj_{in}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}adj_{ik}(A)$$

Proposición: Sea la matriz $A \in M_{nxn}$. Si A es una matriz triangular, entonces $det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Propiedades
Sea la matriz $A \in M_{nxn}$

- Si un múltiplo de una fila de A se suma a otra fila para producir una matriz B, entonces $det(A) = det(B)$.
- Si dos filas de A se intercambian para producir una matriz B, entonces $det(B) = -det(A)$
- Si una fila de A se multiplica por un escalar $k \in \mathbb{R}$ para producir una matriz B, entonces $det(B) = kdet(A)$.
- Si A tiene dos filas linealmente dependientes, entonces $det(A) = 0$.
- Si A tiene al menos una fila igual a cero, entonces $det(A) = 0$
- Si una de las columnas de A se escribe como suma de dos columnas $A_i = C + D$ con $C, D \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$det(A) = det(A_1, ..., C, ..., A_n) + det(A_1, ..., D, ..., A_n)$$

- Si una de las columnas de A está multiplicada por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$det(A_1, ..., \alpha A_i, ..., A_n) = \alpha det(A_1, ..., A_i, ..., A_n)$$

- $det(A) = det(A^t)$
- Si $B \in M_{nxn}$ entonces $det(AB) = det(A)det(B)$
- A es invertible si solo si $det(A) \neq 0$.

Definición: Sea la matriz $A \in M_{nxn}$ entonces llamamos a la matriz adjunta de A a

$$adj(A) = \begin{pmatrix} adj_{11}(A) & ... & adj_{1n}(A) \\ ... & ... & ... \\ adj_{n1}(A) & ... & adj_{nn}(A) \end{pmatrix}$$

Proposición: La matriz inversa de A se puede calcular como:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)^t}{det(A)}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Definición: Una ecuación lineal en las variables (incógnitas) $x_1, ..., x_n$ es una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$$

donde $a_i, b \in \mathbb{R} \forall i$ y n entero positivo.

Ejemplo: ¿Son lineales?

- $a_1x_1 + a_2x_2 = b$
- $4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1$

- $x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3$
- $4x_1 - 5x_2 = x_1 x_2$
- $x_2 = 2\sqrt{x_1} - 6$

Definición: Se dice que $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ es solución de la ecuación:

$$a_1 x_1 + ... + a_n x_n = b$$

si se cumple que $a_1 \alpha_1 + ... + a_n \alpha_n = b$.

Ejemplo:

1. Una ecuación del tipo $0x_1 + ... + 0x_n = b \Rightarrow b = 0\ \forall b$. Si b es no nulo, es decir, $b \neq 0$ se dice que la ecuación es incompatible. Si $b = 0$ entonces la ecuación es trivial y cualquier $(x_1, ..., x_n)$ verifica la ecuación.
2. $(x, y, z) = (3, 2, -1)$. ¿Es solución de $x + y + z = 4$?
3. $(x, y, z) = (4, 0, 0)$. ¿Es solución de $x + y + z = 4$?

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales es una lista finita de ecuaciones lineales en las mismas variables:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

Llamaremos a la matriz A, matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Llamaremos a la matriz b, vector del lado derecho

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Llamaremos a la matriz AM, matriz ampliada

$$AM = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Definición: Se dice que $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema de ecuaciones lineales si se verifica:

$$\begin{gathered} a_{11}\alpha_1 + ... + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + ... + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}\alpha_1 + ... + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{gathered}$$

Ejemplo: Sea (5,13/2,3). ¿Es solución de $\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 - x_2 + 3/2x_3 = 8 \\ x_1 - 4x_3 = -7 \end{array} \right.$?

Definición: Dos sistemas son equivalentes si tienen idéntica solución. O lo que es lo mismo, toda solución de un sistema es solución del otro. Es más, dos sistemas son equivalentes si uno de ellos se puede obtener a partir del otro realizando un número finito de transformaciones elementales por filas.

Ejemplo: $\left\{ \begin{array}{c} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right.$ y $\left\{ \begin{array}{c} x + 2y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right.$ son equivalentes.

Operaciones básicas para simplificar un sistema lineal:

- Sumar a una ecuación un mútiplo de otra (por ejemplo, sumar a una ecuación otra ecuación multiplicada por un escalar)
- Intercambiar dos ecuaciones
- Multiplicar una ecuación por una constante distinta de cero.

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales tiene una de estas posibles soluciones:

- Ninguna solución (Sistema incompatible)
- Una única solución (Sistema compatible determinado)
- Infinitas soluciones (Sistema compatible indeterminado)

Ejemplo: $\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+3y=3 \end{cases}$, $\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+2y=3 \end{cases}$, $\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si los términos independientes de todas sus ecuaciones son iguales a cero:

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = 0$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0$$

Ejemplo: $\begin{cases} x+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

Proposición: Todo sistema homogéneo es compatible, ya que al menos siempre tiene como solución a (0,...,0). En caso de ser la única solución, es compatible determinado. En caso de existir alguna solución más, es compatible indeterminado.

Ejemplo: $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

Definición: Se dice que un sistema de ecuaciones es escalonado si el coeficiente a_{ij} de la primera variable distinta de cero de cada ecuación es $a_{ij} = 1$. Esta variable se denomina variable principal de dicha ecuación. En las ecuaciones restantes (de abajo), el coeficiente asociado a dicha variable es cero. La variable principal de cada ecuación se sitúa a la derecha de las variables principales de las ecuaciones anteriores.

Observación: Todas las ecuaciones sin variable principal se sitúan al final del sistema de ecuaciones.
Si el sistema es compatible, toda variable que no sea principal de una ecuación, se denomina variable libre. La solución del sistema se obtiene asignando parámetros a las variables libres. Las variables principales de un sistema escalonado están determinadas y son no libres.
Además, cuando un sistema homogéneo no nulo tiene más incógnitas que ecuaciones, tiene infinitas soluciones.

Ejemplo: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ \qquad x_2 + 8x_3 = 3 \\ \qquad\qquad x_3 = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3-5x_4=4 \\ x_3+6x_4=3 \end{cases}$

Método de eliminación gaussiana

La idea es obtener un sistema escalonado equivalente más sencillo de resolver, trasformando la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior:

1. Se selecciona como primera ecuación aquella en la cual el coeficiente $a_{11} \neq 0$. Si no es así, se reemplaza por otra ecuación del sistema.
2. Se divide toda la ecuación por a_{11} para que $a_{11} = 1$.

3. Se usa el término x_1 de la primera ecuación para eliminar los términos x_1 de las restantes ecuaciones.
4. Se selecciona como segunda ecuación aquella en la cual el coeficiente $a_{22} \neq 0$. Si no es así, se reemplaza por otra ecuación del sistema (de las siguientes).
5. Se divide toda la ecuación por a_{22} para que $a_{22} = 1$.
6. Se usa el término x_2 de la primera ecuación para eliminar los términos x_2 de las restantes ecuaciones.
7. Se selecciona como tercera ecuación aquella en la cual el coeficiente $a_{33} \neq 0$. Si no es así, se reemplaza por otra ecuación del sistema (de las siguientes).
8. Así sucesivamente. Una vez se obiene un sistema escalonado, basta con sustituir el valor de x_n en la última ecuación e ir realizando las sucesivas sustituciones.

Ejemplo: $\left\{\begin{array}{r} x_1{+}x_3{=}0 \\ 2x_1{-}x_2{+}x_3{=}0 \end{array}\right.$

Método de Gauss-Jordan

La idea es obtener las soluciones del sistema mediante la reducción del mismo dando lugar a otro equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior. Se continua el proceso de transformación hasta obtener una matriz diagonal (o una contenida dentro del sistema).

Definición: Se dice que un sistema de ecuaciones es escalonado reducido por filas si el coeficiente a_i de la primera variable distinta de cero es $a_i = 1$. Esta variable se denomina variable principal de dicha ecuación. En las ecuaciones restantes, el coeficiente asociado a dicha variable es cero. La variable principal con coeficiente 1 de cada fila es la única variable distinta de cero en su columna.

El método consistiría en que una vez aplicada la eliminación gaussiana, es decir, una vez obtenido el sistema escalonado equivalente, debemos hacer que cada variable principal aparezca sólo en esa ecuación mediante operaciones elementales.

Ejemplo: $\left\{\begin{array}{r} 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{array}\right.$

Observación:

Si durante el proceso se obtiene alguna fila nula del tipo 0 0 0 ... 0 = 0, puede ser eliminada del sistema.

Si durante el proceso se obtiene alguna fila nula del tipo 0 0 0 ... 0 = b con $b \neq 0$ entonces el sistema es incompatible.

Si el sistema es compatible entonces tendrá:

Una única solución cuando no existan variables libres e infinitas soluciones cuando exista al menos una variable libre.

En general, una vez terminado el proceso de reducción obtenemos un sistema de la forma:

$$\begin{array}{r} x_1 + \qquad + a_{1s}x_s + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + \qquad + a_{2s}x_s + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ x_{s-1} + a_{ms}x_s + ... + a_{mn}x_n = b_{s-1} \end{array}$$

donde el primer bloque serían las incógnitas principales y el segundo las incógnitas libres o secundarias.

La solución de un sistema de este tipo se obtiene despejando las incógnitas principales de cada ecuación en función del término independiente y de las incógnitas libres. Cada variable libre es un parámetro:

$$x_j = \lambda_j \quad con \quad j > s-1 \quad y \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

Si $s-1=n$ entonces el sistema no tiene incógnitas libres y por tanto se trata de un sistema compatible determinado.
Si $s-1<n$ entonces el sistema tiene incógnitas libres y por tanto se trata de un sistema compatible indeterminado.

Corolario: Un sistema escalonado reducido es compatible determinado si todas sus variables son principales. Un sistema escalonado reducido es compatible indeterminado si no todas sus variables son principales.

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo $Ax=0$ donde $A \in M_{mxn}$ tiene una solución no trivial si y solo si existe al menos una variable libre. Si no hay variables libres, la única solución es (0,..,0).

Ejemplo: $\left\{ \begin{array}{r} x_1 - 6x_4 = -5 \\ x_2 + 7x_4 = 8 \\ x_3 - 7x_4 = 6 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{r} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \\ -2x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 19x_4 = 4 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \\ 8x_1 - x_2 - 7x_3 - x_4 = 10 \end{array} \right.$

Observación: La matriz escalonada reducida equivalente a una matriz dada es única.
Si dos matrices son equivalentes por filas entonces sus matrices escalonadas reducidas por filas son iguales.
Las filas (columnas) de una matriz son linealmente independientes si cada una de ellas no puede escribirse como suma ponderada de las restantes.

Teorema: Si $A \in M_{nxn}$ es una matriz invertible, entonces la ecuación matricial $Ax=b$ tiene solución única y se calcula $x = A^{-1}b, \forall b \in \mathbb{R}$. (Si no es invertible, se puede analizar la solución mediante Gauss-Jordan).

Teorema: Si $A \in M_{nxn}$ es una matriz invertible, entonces la ecuación matricial $Ax = 0$ tiene solución única y es (0,...,0).

Definición: Sea la matriz $A \in M_{nxn}$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Se define $A_i(b)$ como la matriz obtenida al sustituir en A la columna i-ésima por el vector b.

$$A_i(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema: (Regla de Cramer) Sea $A \in M_{nxn}$ una matriz invertible. Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ la única solución $x \in \mathbb{R}^n$ del sistema $Ax=b$ viene determinada por:

$$x_i = \frac{det(A_i(b))}{det(A)}, \forall i = 1, ..., n$$

Definición: Sea $A \in M_{mxn}$. Las siguientes definiciones de rango de la matriz A son equivalentes:

1. El número máximo de columnas (o filas) linealmente independientes, es decir, que no son combinacion lineal de ninguna de las otras columnas (o filas)
2. El mayor de los órdenes de las submatrices cuadradas con determinante distinto de 0 contenidas en A.
3. El número de filas (o columnas) distintas de 0 de la matriz equivalente obtenida mediante Gauss-Jordan.

Ejemplo: Calcular el rango $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Teorema: (de Rouché-Frobenius) Un sistema lineal con n incógnitas es compatible si y solo si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.

Corolario:

- Si el rango de ambas matrices es igual al número de incógnitas, entonces se trata de un sistema compatible determinado ($rg(M) = rg(AM) = n$)
- Si el rango de ambas matrices es menor al número de incógnitas, entonces se trata de un sistema compatible indeterminado ($rg(M) = rg(AM) < n$)
- Si el rango de ambas matrices es distinto, entonces se trata de un sistema incompatible ($rg(M) \neq rg(AM)$)

Ejemplo: Resolver por Rouché-Frobenius $\left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{array} \right.$