

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{7} \\ 3x \equiv 5 \pmod{8} \\ x \equiv 9 \pmod{13} \end{cases}$$

Primero: las congruencias deben estar despejadas y tener solución de manera individual.

Para despejar debemos multiplicar cada congruencia por el inverso del coeficiente de x .

$$\begin{aligned} \cdot 5x &\equiv 4 \pmod{7} \xrightarrow{\cdot 3} 15x \equiv 12 \pmod{7} \rightarrow 5 \cdot a \equiv 1 \pmod{7} \rightarrow a = 3 \\ &\Leftrightarrow x \equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot 3x &\equiv 5 \pmod{8} \xrightarrow{\cdot 3} 9x \equiv 15 \pmod{8} \rightarrow 3 \cdot a \equiv 1 \pmod{8} \rightarrow a = 3 \\ &\Leftrightarrow x \equiv 7 \pmod{8} \end{aligned}$$

Consideramos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 7 \pmod{8} \\ x \equiv 9 \pmod{13} \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\text{mcd}(7, 13) = 1$ y $\text{mcd}(8, 13) = 1$. Si es el caso
 entonces podremos siempre afirmar
 que el sistema tiene solución.
 En nuestro caso todos los módulos son primos
 entre sí y por tanto tiene solución:

Tercero: Resolvemos por sustitución. La solución
 siempre estará en módulo el M.C.M. de todos
 los módulos.

$$\cdot x \equiv 5 \pmod{7} \iff \boxed{x = 5 + 7 \cdot \alpha}$$

sustituimos en:

$$\cdot x \equiv 7 \pmod{8} \rightarrow 5 + 7\alpha \equiv 7 \pmod{8}$$

$$\Leftrightarrow 7\alpha \equiv 2 \pmod{8}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha \equiv 2 \pmod{8}$$

$$\Rightarrow \alpha = -2 + 8\beta$$

Entonces: $x = 5 + 7(-2 + 8\beta) = 5 - 14 + 56\beta = -9 + 56\beta$

$$[x]_{56} = [-9]_{56} = [47]_{56} \Leftrightarrow x \equiv 47 \pmod{56}$$

Hemos obtenido que $x \equiv 47 \pmod{56}$ es solución
 de $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$x \equiv 47 \pmod{56} \Leftrightarrow \boxed{x = 47 + 56\alpha}$$

Sustituimos

$$x \equiv 9 \pmod{13} \Leftrightarrow 47 + 56\alpha \equiv 9 \pmod{13}$$

$$\Leftrightarrow 8 + 4\alpha \equiv 9 \pmod{13}$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \equiv 10 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow \alpha = 10 + 13\beta$$

$$\text{Entonces } x = 47 + 56 \cdot (10 + 13\beta) = 47 + 560 + 728\beta \\ = 607 + 728\beta$$

Es decir, la solución es: $[x]_{728} = [607]_{728}$

Ejemplo

Resolver:

$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 12 \pmod{14} \end{cases}$$

Observamos que $\text{mcd}(7, 14) = 7 \neq 1$. Por tanto aún no sabemos si tiene solución. Vamos a intentar resolverlo:

$$x \equiv 6 \pmod{7} \Leftrightarrow \boxed{x = 6 + 7\alpha}$$

Sustituimos:

$$x \equiv 12 \pmod{14} \Leftrightarrow 6 + 7\alpha \equiv 12 \pmod{14}$$

$$\Leftrightarrow 7\alpha \equiv 12 - 6 = 6 \pmod{14}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo

Resolver
$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 12 \pmod{14} \end{cases}$$

Al igual que antes $\text{mcd}(7, 14) = 7 \neq 1$. No sabemos si tiene solución:

$$x \equiv 5 \pmod{7} \Leftrightarrow \boxed{x = 5 + 7\alpha}$$

Sustituyendo

$$x \equiv 12 \pmod{14} \Leftrightarrow 5 + 7\alpha \equiv 12 \pmod{14}$$

$$\Leftrightarrow 7\alpha \equiv 7 \pmod{14}$$

Para resolver una congruencia donde $\text{mcd}(7, 14) = 7 \neq 1$ debemos pasar por la congruencia auxiliar

$$\alpha \equiv 1 \pmod{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Resultante de dividir} \\ \text{la anterior por } \text{mcd}(7, 14) = 7 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1 + 2\beta$$

Entonces $x = 5 + 7(1 + 2\beta) = 5 + 7 + 14\beta = 12 + 14\beta$.

Luego $[x]_{14} = [12]_{14}$ es la solución al sistema.

Ejercicio

¿Cuándo podemos afirmar que
$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

tiene solución? (Pensar que $\text{mcd}(m_1, m_2) \neq 1$)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo

Calcular el primer número de cuatro cifras múltiplo de 9 cuyos dos últimos dígitos sean 21.

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{9} \\ x \equiv 21 \pmod{100} \end{cases}$$

Este sistema tiene solución ya que $\text{mcd}(9, 100) = 1$

$$x \equiv 21 \pmod{100} \Leftrightarrow x = 21 + 100\alpha$$

Sustituyendo:

$$x \equiv 0 \pmod{9} \Leftrightarrow 21 + 100\alpha \equiv 0 \pmod{9}$$

$$\Leftrightarrow 3 + \alpha \equiv 0 \pmod{9}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \equiv -3 \equiv 6 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow \alpha = 6 + 9 \cdot \beta$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } x &= 21 + 100 \cdot (6 + 9\beta) = 21 + 600 + 900\beta \\ &= 621 + 900\beta \end{aligned}$$

$$\text{Luego } [x]_{900} = [621]_{900} = [1521]_{900}$$

Por tanto el primer número múltiplo de 9 cuyas dos últimas cifras es 21 es 1521.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo

Demostrar el criterio de divisibilidad del 3.

Vamos a expresar

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

$$4521 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$$

Entonces

$$x \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv 0 \pmod{3}$$

Pero

$$[10]_3 = [1]_3, \quad [10^2]_3 = [10]_3 \cdot [10]_3 = [1]_3 \cdot [1]_3 = [1]_3$$

$$[10^3]_3 = [10^2]_3 \cdot [10]_3 = [1]_3 \cdot [1]_3 = [1]_3$$

En general $[10^k]_3 = [1]_3$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{3}$$

Es decir, que la suma de sus cifras sean múltiplo de 3

Ejercicio Tratar de dar un criterio de divisibilidad para el 7.

Ejercicio: Hallar el valor de "a" para que 6543a2 sea múltiplo de 7.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, bold font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a background of light blue and orange geometric shapes.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\varphi(n) = \text{Card}\{a \in \mathbb{N} / a \leq n \text{ y } \text{mcd}(a, n) = 1\}$
 \equiv Contar cuantos primos entre sí
con n hay menores que él.

Ejemplo:

- $\varphi(6) = \text{Card}\{a \in \mathbb{N} / a \leq 6, \text{mcd}(a, 6) = 1\}$
 $= \text{Card}\{1, 5\} = 2$
- $\varphi(p) = p - 1$ con p primo.
- $\varphi(7) = \text{Card}\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$

Propiedades:

- Si $\text{mcd}(n, m) = 1$ entonces $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$
- Th. de Euler: $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ si $\text{mcd}(a, m) = 1$.
- Th. de Fermat: $a^p \equiv a \pmod{m}$ con p primo
- Th. de Wilson: $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ con p primo.

Ejemplo.

calcular el resto de dividir 4^{30} por 9.

Queremos calcular

$$x \equiv 4^{30} \pmod{9}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\varphi(9) = \text{Card}(\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}) = 6$$

$$4^6 \equiv 1 \pmod{9}$$

Pero: $4^{12} = 4^6 \cdot 4^6 \equiv 1 \cdot 1 = 1 \pmod{9}$

En particular $4^{30} = (4^6)^5 \equiv 1^5 = 1 \pmod{9}$

Por tanto $x \equiv 4^{30} \equiv 1 \pmod{9}$

Ejercicio Calcular el resto de dividir 7^{208} entre 17.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a background of light blue and orange geometric shapes.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70