Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. APLICACIONES LINEALES

1. Estúdiese cuáles de las siguientes aplicaciones, definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, son lineales:
   a) $f(x, y) = (0, y, 0)$
   b) $f(x, y) = (x, x + y, x - y)$
   c) $f(x, y) = (2x + y, 0, 2y + x)$
   d) $f(x, y) = (x + y, 2, x)$

2. Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$f(u_1) = v_1 + 2v_2 - 3v_3, f(u_2) = -v_1 + 4v_2 - v_3$$

   donde $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Hállese la imagen del vector $u = (2, -1)_B$.

3. Calcúlese la matriz asociada a la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x - y + z, 2x - z)$$

   respecto de las bases canónicas.

4. Se considera la aplicación lineal de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que está dada por $f(x, y) = (x+y, -y, y-x)$. Calcúlese, respecto de las bases canónicas:
   - La matriz asociada
   - Las ecuaciones de la aplicación
   - Una base del núcleo
   - La dimensión del núcleo
   - Una base de la imágen
   - El rango de la aplicación
   - Compruébese la fórmula $n = dimker(f) + dimIm(f)$

5. Se dice que un vector u es invariante por una aplicación lineal f si verifica que $f(u) = u$. Hállese todos los vectores invariantes por las aplicaciones lineales definidas de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$ en sí mismo siguientes:
   - $f(x, y, z) = (3x, 4y, 5z)$
   - $f(x, y, z) = (x, 2x + y, 3x + 2y + z)$
   - $f(x, y, z) = (2x - y, 2y - z, 2z - x)$

6. Hállense todos los vectores que verifican la igualdad $f(u) = \lambda$u, para algún escalar λ, para las aplicaciones lineales del ejercicio anterior.

7. Sea f una aplicación lineal entre los espacios $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ y $(W, +, \cdot\mathbb{R})$ definida por:

8. Sea f la aplicación lineal de $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ en sí mismo definida por:

$$f(u_1) = v_1 + v_3, f(u_2) = 2v_1 - v_2, f(u_3) = v_2 - v_3$$

donde $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B_2' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son dos bases de V. Calcúlense:

- La matriz de la aplicación lineal respecto de B_1 y B_2
- Las ecuaciones de la aplicación y la imagen del vector $u = u_1 + u_2 + u_3$.
- La dimensión de $\mathrm{Ker}(f)$ y el rango de la aplicación.
- Comprueba si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

9. Sea f la aplicación lineal de $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ en sí mismo definida por:

$$f(u_1) = 2u_1 - u_2 - u_3, f(u_2) = -7u_2 + u_3, f(u_3) = 3u_1 - 2u_3$$

donde $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de dicho espacio. Hállese la matriz de la aplicación lineal f respecto de la base $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ donde

$$v_1 = u_1 - u_3, v_2 = u_1 + u_2, v_3 = u_3$$

10. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z),$$

la base $B = \{(0, 2, 4), (0, 4, 2), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, y la base $C = \{(6, 2), (6, -2)\}$ de $\mathbb{R}^2$,

a) calcula la matriz de f respecto de las base B y C,
b) calcula la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base B,
c) calcula la matriz de cambio de base de la base C a la base canónica de $\mathbb{R}^2$,
d) calcula la matriz de f respecto de las bases canónicas a partir de las matrices que has hallado en los apartados anteriores.

11. Considera los siguiente conjunto de vectores

$$B = \{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (2, -1, 3, 1)\},$$

$$C = \{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, a, 0)\}$$

y la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z, t) = (2x + y,\ y + 3z - t,\ x + z - t).$$

(a) Comprueba que los vectores del conjunto B son una base de $\mathbb{R}^4$.
(b) ¿Para qué valores de a los vectores de C forman una base de $\mathbb{R}^3$? Justifica tu respuesta.
(c) Comprueba que f es una aplicación lineal.
(d) Calcula la matriz de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$.
(e) Tomando $a = 1$ en el conjunto C, calcula la matriz de f respecto de las bases B y C.
(f) Halla la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ a la base B.