TEMA 3: ESPACIOS VECTORIALES

Definición (Espacio Vectorial)

$(V,+,\cdot)$, $+: V\times V \longrightarrow V$, $\cdot: K\times V \longrightarrow V$, K cuerpo conmutativo

$+$: Operación interna

$\cdot$: operación externa (0_K, 1_K)

V es espacio vectorial (sobre K) si se cumplen:

i) $(V,+)$ es grupo conmutativo ($\underset{\text{neutro}}{0_V}$, $\underset{\text{opuesto}}{-v}$)

ii) $\forall a\in K$, $\forall v,v'\in V$, $a(v+v') = av + av'$

iii) $\forall a,a'\in K$, $\forall v\in V$, $(a+a')v = av + a'v$

} Distributivas

iv) $\forall a,a'\in K$, $\forall v\in V$, $a(a'v) = (aa')v$ → Asociatividad mixta

v) $\forall v\in K$, $1_K\cdot v = v$

$\boxed{a,b\in K,\ ab=0_K \Rightarrow a=0_K \text{ ó } b=0_K}$ (No hay divisores de 0_K) → Se cumple en el anillo

$\Downarrow$

Anillo de integridad

↓

¿Conmutativo y unitario?

$\Downarrow$

Dominio de integridad

Dem. Sea $ab=0_K$, $a\neq 0_K$

$\Downarrow$

$\exists a^{-1}\in K \Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1}0_K \Rightarrow \underline{b=0_K}$

$\boxed{a\in K \Rightarrow a\cdot 0_K = 0_K}$

Dem.

$a\cdot 0_K = a\cdot(0_K+0_K) = a\cdot 0_K + a\cdot 0_K \Longrightarrow a\cdot 0_K + (-a0_K) = a0_K + a0_K + (-a0_K) \Longrightarrow 0_K = a0_K + 0_K$

$\Downarrow$

$\underline{a0_K = 0_K}$

$\boxed{0_K\cdot v = 0_V}$, $\boxed{a\cdot 0_V = 0_V}$

Dem.

$0_K\cdot v = (0_K+0_K)\cdot v = 0_K\cdot v + 0_K\cdot v \Longrightarrow 0_K\cdot v + (-0_K\cdot v) = 0_K\cdot v + 0_K\cdot v + (-0_K\cdot v) \Longrightarrow \underline{0_V = 0_K\cdot v}$

$\boxed{a\cdot v = 0_V \Rightarrow a=0_K \text{ ó } v=0_V}$

Dem.

Imprescindible que K sea un CUERPO

$a\cdot v = 0_V$, $a\neq 0_K \Longrightarrow \exists a^{-1}\in K$, $a^{-1}(a\cdot v) = a^{-1}\cdot 0_V = 0_V \Longrightarrow (a^{-1}\cdot a)\cdot v = 1_K\cdot v = \underline{v = 0_V}$

Ejemplos importantes de espacios vectoriales

1. $\boxed{\text{Sea } V = K^n = K \times K \times \dots \times K \text{ (n veces)}}$ n-ésimo K-espacio vectorial usual, estándar o canónico

$+: (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$

$\cdot: \underset{\text{Escalar}}{a} \cdot (\underset{\text{Vector}}{a_1, \dots, a_n}) = (a \cdot a_1, \dots, a \cdot a_n)$

$(0, \dots, 0) = 0_V$

$-(a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, -a_n)$

$(ab)(a_1, \dots, a_n) = ((ab)a_1, \dots, (ab)a_n) = (a(ba_1), \dots, a(ba_n)) =$

$= a(ba_1, \dots, ba_n) = a \cdot (b \cdot (a_1, \dots, a_n))$

2. $\boxed{V = K[x]}$ los polinomios forman una k-álgebra

$+:$ $f+g$ es la suma usual de polinomios

$\cdot: \quad a \cdot f = a \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a a_i) x^i$

3. $\boxed{W = K_n[x] = \{ f \in K[x],\ gr(f) < n \}}$ → subespacio vectorial de V

$(K_n[x], \underset{\text{interna}}{+}, \underset{\text{externo}}{\cdot})$ es un espacio vectorial

4. $\boxed{V = Mat_{m \times n}(K)}$

$+: \quad (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ Suma de matrices ordinaria

$\cdot: \quad a \cdot (a_{ij}) = (a \cdot a_{ij})$ Producto con escalar usual

$(V, +, \cdot)$ es espacio vectorial

- Si $m = n$, $Mat_n(K)$ denota matrices cuadradas

5. $V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ aplicación} \}$

$+: (f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

$(V, +)$ grupo conmutativo $\qquad 0(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (-f)(x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\cdot: a \in \mathbb{R},\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$af: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (af)(x) = a \cdot f(x)$

Definición (Subespacio vectorial)

V e.v. , $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$

Se dice que W es un subespacio vectorial de V si:

i) $w, w' \in W \Rightarrow w + w' \in W$

ii) $a \in K, w \in W \Rightarrow a \cdot w \in W$

$W \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, w \in W \Rightarrow 0_V = 0_K \cdot w \in W$ (Axioma)

$w \in W \Rightarrow -w = (-1_K) \cdot w \in W$

$w + (-1_K) \cdot w = 1_K\, w + (-1_K) w = \big(1_K + (-1_K)\big) w = 0_K \cdot w = 0_V$

De forma trivial se cumplen las demás propiedades de e.v. $\Rightarrow$ Tienen estructura de e.v.

Ej $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ función} \}$

$W = \{ f \in V : \underbrace{f(-x) = f(x)}_{\text{funciones pares}}, \forall x \in \mathbb{R} \} \neq \emptyset$

$f, g \in W$

$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = \underline{(f+g)(x)}$

$(af)(-x) = a \cdot f(-x) = a \cdot f(x) = \underline{(af)(x)}$

Las funciones pares forman un sub e.v.

Ej $W = \{ f \in V : f(0) = f(1) \}$ También es sub e.v.

$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = f(1) + g(1) = (f+g)(1)$

$(af)(0) = af(0) = a \cdot f(1) = (af)(1)$

Propiedad (Intersección, unión y suma de subespacios vectoriales)

Sean $W_1, W_2 \leq V$ (subespacio de) $\Rightarrow \begin{cases} W_1 \cap W_2 < V \\ W_1 \cup W_2 \not< V \longrightarrow \text{generalmente no es subespacio} \\ W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2,\ w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\} < V \end{cases}$

$w_1' + w_2',\ w_1' \in W_1,\ w_2' \in W_2$

$\Downarrow$

$(w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = (w_1 + w_1') + (w_2 + w_2') \in W_1 + W_2$

$w_1 + w_2 \in W_1 + W_2,\ a \in K \Longrightarrow (w_1 + w_2) \cdot a = aw_1 + aw_2 \in W_1 + W_2$

– – – –

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m \Rightarrow v$ es COMBINACIÓN LINEAL de $v_1, v_2, \ldots, v_m$

Definición (Independencia lineal)

$\{v_1, \ldots, v_m\}$ es l.i. si:

↳ linealmente independiente

i) $\forall a_1, \ldots, a_m \in K,\ a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0_V \Longrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$

ii) $L \subset V$, L es l.i. si cada subconjunto finito de L es l.i.

Ej $K^2 = K \times K$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

$\{e_1, e_2\}$ es l.i

Dem: $a_1 e_1 + a_2 e_2 = (a_1, 0) + (0, a_2) = (0,0) \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

Ej $K[x]$

$L = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ es l.i.

Dem: $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n x^n = 0$

$\qquad \shortparallel$

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \Longrightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$

Ej

l.i. $\begin{cases} e_1 = (1,0) \\ e_2 = (0,1) \end{cases}$
$v_3 = (1,-2)$

son l.d. $(-1)\cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 1 \cdot v_3 = (0,0)$

↳ linealmente dependientes

$\begin{matrix} e_1 \\ v_3 \end{matrix} \Big\}$ l.i. $\qquad \begin{matrix} e_2 \\ v_3 \end{matrix} \Big\}$ l.i.

Sean $v_1, \dots, v_m$ l.d. $\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$, algún $a_i \neq 0 \Rightarrow \exists a_i^{-1}$

$\Longrightarrow v_i = -a_i^{-1} a_1 v_1 - \dots - a_i^{-1} a_{i-1} v_{i-1} - \dots - a_i^{-1} a_{i+1} v_{i+1} - \dots - a_i^{-1} a_m v_m$

Luego, cuando ciertos vectores son l.d. alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal del resto.

Definición (Sistema de generadores)

Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$

$\underbrace{L(s)}_{\text{Todas las combinaciones lineales}} = \{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m,\ a_1, \dots, a_m \in K\} \Longrightarrow L(s) < V$

Es el subespacio vectorial de V más pequeño que contiene a todos los vectores

$K^2 = L(\underbrace{e_1, e_2}_{\text{sistema de generadores de } K}) = a_1 e_1 + a_2 e_2 = (a_1, a_2)$

S es un sistema de generadores de V $\Longleftrightarrow V = L(S)$ (todos los vectores de v se pueden expresar como combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_m\}$)

Definición (Espacios finitamente generados)

V es finitamente generado si $V = L(s)$, $s = \{v_1, \dots, v_m\}$

$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$
↳ Todos combinación lineal

K^2 es f.g. $\quad K[x]$ no es f.g. (si lo fuera existiría grado máximo) $\quad F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no es f.g.

Definición (Base)

$B \subset V$

Se dice que B es base si es linealmente independiente y sistema generador

$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m,\ v_1, \dots, v_m \in B$

$v = a_1' v_1 + \dots + a_m' v_m$

$0_V = (a_1 - a_1') v_1 + \dots + (a_m - a_m') \xRightarrow{B \text{ l.i.}} a_1 - a_1' = \dots = a_m - a_m' = 0$

$K^2: B = \{e_1, e_2\} = B_c$ ← Base canónica $\quad K^n: B_c = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad K[x]: B = \{1, x, x^2, \dots\}$ (infinita)

$Mat_{3\times 2}(K): B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}$

Proposición

B es base $\iff$ B es sistema de generadores minimal ($S \subset B \Rightarrow S$ no es s.g.)

Sistema de generadores

Dem.

$\Rightarrow$) Supongamos B no es minimal $\Rightarrow \exists S \subset B$, S s.g. $\Rightarrow \exists v \in B$, $v \notin S$, $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$,

$v_1, \dots, v_m \in S$

$\Rightarrow 0_V = 1_k v - a_1 v_1 - \dots - a_m v_m \Rightarrow$ B no l.i. ¡!

Da 0 y no todos los coeficientes son 0

$\Leftarrow$) ¿B l.i.?

Supongamos B l.d. $\Rightarrow \exists v_1, \dots, v_m \in B$, $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$, $a_m \neq 0$

Uno cualquiera

$\Rightarrow v_m = -a_m^{-1} a_1 v_1 - \dots - a_m^{-1} a_{m-1} v_{m-1} \Rightarrow S = B \setminus \{v_m\}$ es s.g. ¡! (B no minimal)

Proposición

B es base $\iff$ B es linealmente independiente maximal ($B \subset L \Rightarrow L$ no l.i.)

Teorema

Todo espacio finitamente generado tiene base.

Dem.

Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ s.g. de V, existe $S' \subseteq S$, S' es s.g. minimal (S' es base)

(solo funciona si V es f.g.)

$V = \{0_V\} \Rightarrow B = \emptyset$

$V \neq \{0_V\} \Rightarrow v \neq 0_V$ $\quad L = \{v\}$ es l.i. $\Rightarrow L \subseteq L'$ maximal (L' es base)

Lema de intercambio

V f.g., $L = \{v_1, \dots, v_s\}$ l.i., $S = \{w_1, \dots, w_t\}$ s.g.

Se cumple:

i) $s \leq t$

ii) $\exists\, 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq t$: $\{v_1, \dots, v_s\} \cup (S \setminus \{w_{i_1}, \dots, w_{i_s}\})$ es s.g.

Dem.

Inducción sobre s.

- $s=1$: $L=\{v_1\}$ l.i. $(v_1 \neq 0)$ $\quad S=\{w_1,\dots,w_t\}$ s.g.

$$\underset{\substack{\neq \\ 0_V}}{v_1} = a_1w_1 + \dots + a_tw_t \underset{\text{p.e.}}{\Longrightarrow} a_1 \neq 0 \Rightarrow w_1 = a_1^{-1}v_1 - a_1^{-1}a_2w_2 - \dots - a_1^{-1}a_tw_t$$

$$\Longrightarrow \underline{\{v_1, w_2, \dots, w_t\} \text{ es s.g.}} \quad (t \geq 1)$$

- (HI) $s-1$: $L=\{v_1,\dots,v_s\}$ l.i. $\quad S=\{w_1,\dots,w_t\}$

$$\{v_1,\dots,v_{s-1}\} \text{ l.i. } \overset{HI}{\Longrightarrow} \{v_1,\dots,v_{s-1},w_s,\dots,w_t\} \text{ s.g.}$$

$0_V \neq v_s = a_1v_1 + \dots + a_{s-1}v_{s-1} + a_sw_s + \dots + a_tw_t$. Supongamos $a_s = \dots = a_t = 0$

algún $a_i \neq 0$ $\quad \Rightarrow v_s = a_1v_1 + \dots + a_{s-1}v_{s-1}$ ¡!

Supongamos $a_s \neq 0$. $w_s = a_s^{-1}v_s - a_s^{-1}a_1v_1 - \dots - a_s^{-1}a_{s-1}v_{s-1} - a_s^{-1}a_{s+1}w_{s+1} - \dots - a_s^{-1}a_tw_t$

$$\Longrightarrow \{v_1,\dots,v_{s-1},v_s,w_{s+1},\dots,w_t\} \text{ es } \underline{\underline{\text{s.g.}}}$$

Proposición

V f.g., L l.i. $\Longrightarrow$ L es finito

Dem.

Elegimos $S=\{w_1,\dots,w_s\}$ s.g.

Si L es l.i. infinito $\Longrightarrow \exists\, v_1,\dots,v_{s+1} \in L$

$\{v_1,\dots,v_{s+1}\}$ es l.i. ¡!

Proposición

V es f.g., entonces:

i) Todas las bases de V son finitas

ii) Todas las bases de V tienen el mismo cardinal.

Dem.

i) B base de $V \Longrightarrow B$ l.i. $\Longrightarrow B$ finito

ii) $\underset{\text{s.g } 2}{\underset{\text{s.g } 1}{B_1, B_2}}$ bases de $V \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} s_1 \overset{1}{\leq} s_2 \\ s_2 \underset{2}{\leq} s_1 \end{array}\right\} s_1 = s_2$

Definición (**Dimensión**)

V f.g. : $\dim_k V = |B|$, B cualquier base de V

$\dim K^2 = 2$ $(B = B_c = \{e_1, e_2\})$ $\qquad \dim K^n = n$ $(B_c = \{e_1, \dots, e_n\})$

$\dim_k \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) = m \cdot n$ $(B = \{E_{ij},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\})$

$E_{ij} = a_{rs} : a_{rs} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) = (r,s) \\ 0 \text{ si } (i,j) \neq (r,s) \end{cases}$

$\dim_k k[x]$ es infinito (numerable)

Proposición

V f.g., $W < V$. Se cumplen:

i) W f.g.

ii) $\dim W \leq \dim V$

iii) B_W es base de $W \Longrightarrow \exists\, B_V$ base de V tal que $B_W \subseteq B_V$ (**Teorema de extensión de bases**)
(Consecuencia del Lema de Intercambio)

iv) $W = V \Longleftrightarrow \dim_k W = \dim_k V$

Dem.

i) L_W l.i. $\Longrightarrow L_W$ l.i. (en V) $\Longrightarrow \begin{cases} |L_W| \leq \dim_k V = n \\ L_W \text{ finito} \end{cases}$

si este no es maximal ya de por sí

$L_W \subset L \subset W$

L: l.i. maximal $\Longrightarrow$ <u>Base finita</u>

máximo n elementos $\Rightarrow \dim_k W \leq \dim_k V$ (demuestra ii))

iii) Sea $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$m \leq n$ $\qquad B_W$ l.i. en V, B_V s.g. de $V \overset{\text{Lema de intercambio}}{\Longrightarrow} \{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es s.g. de V minimal $\Longrightarrow$ es base de V

$n = \dim V$

K^2:

$w_1 = (2,-3) \neq (0,0)$

$B_c = \{e_1, e_2\} \Longrightarrow \{(2,-3), e_1\}$, $\{(2,-3), e_2\}$ son ambas bases de K^2

OBS

Se cumple, $\dim_k V = n$:

i) L l.i., $|L| = n \Longrightarrow L$ es base

ii) S s.g., $|S| = n \Longrightarrow S$ es base

Para dimensiones infinitas no se cumple!

$V = K[x]$

$W = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^{2^i},\ a_i \in K\}$

$\dim V = \dim W$, $W < V$

Teorema (Fórmula de Grassmann)

V f.g., $W_1, W_2 < V$. Se cumple:

$$\dim_k W_1 + W_2 = \dim_k W_1 + \dim_k W_2 - \dim_k (W_1 \cap W_2)$$

Dem.

$m_1 = \dim W_1$, $m_2 = \dim W_2$, $p = \dim(W_1 \cap W_2)$

$p \leq m_1$, $p \leq m_2$

Sea $B_{W_1 \cap W_2} = \{v_1, \dots, v_p\}$

$B_{W_1} = \{v_1, \dots, v_p, w_{p+1}, \dots, w_{m_1}\}$

$B_{W_2} = \{v_1, \dots, v_p, w'_{p+1}, \dots, w'_{m_2}\}$

$$\{v_1, \dots, v_p, w_{p+1}, \dots, w_{m_1}, w'_{p+1}, \dots, w'_{m_2}\} \overset{?}{=} B_{W_1 + W_2}$$

$$a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + a_{p+1} w_{p+1} + \dots + a_{m_1} w_{m_1} + a'_{p+1} w'_{p+1} + \dots + a'_{m_2} w'_{m_2} = 0$$

$$W_1 \cap W_2 \ni \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + a_{p+1} w_{p+1} + \dots + a_{m_1} w_{m_1}}_{\in W_1} = -\underbrace{(a'_{p+1} w'_{p+1} + \dots + a'_{m_2} w'_{m_2})}_{\in W_2}$$

ya que lo de la izq $\in W_1$ y lo de la der $\in W_2$ y son $=$

Expresa el vector en función de la base de $W_1 \cap W_2$

$$\Longrightarrow W_1 \cap W_2 \ni a'_{p+1} w'_{p+1} + \dots + a'_{m_2} w'_{m_2} = b_1 v_1 + \dots + b_p v_p$$

$\Longrightarrow -b_1v_1 - \ldots - b_pv_p + a'_{p+1}w'_{p+1} + \ldots + a'_{m_2}w'_{m_2} = 0 \Longrightarrow b_1 = \ldots = b_p = a'_{p+1} = \ldots = a'_{m_2} = 0$

$\downarrow$

Todos en B_{W_2} (son l.i. $\Longrightarrow$ todos nulos)

$\Longrightarrow W_1 \cap W_2 \ni a_1v_1 + \ldots + a_pv_p + a_{p+1}w_{p+1} + \ldots + a_{m_1}w_{m_1} = 0$

$\Longrightarrow a_1 = \ldots = a_p = a_{p+1} = \ldots = a_{m_1} = 0$ (Todos los vectores son l.i.)

$\Longrightarrow$ Son todos l.i. . Veamos ahora que son s.g. de $W_1 + W_2$

$u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$

$u_1 + u_2 = \lambda_1v_1 + \ldots + \lambda_pv_p + \lambda_{p+1}w_{p+1} + \ldots + \lambda_{m_1}w_{m_1} + \mu_1v_1 + \ldots + \mu_pv_p + \mu_{p+1}w'_{p+1} + \ldots + \mu_{m_2}w'_{m_2} =$

$= (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_p + \mu_p)v_p + \lambda_{p+1}w_{p+1} + \ldots + \lambda_{m_1}w_{m_1} + \mu_{p+1}w'_{p+1} + \ldots + \mu_{m_2}w'_{m_2}$

(Combinación lineal de los vectores anteriores $\Longrightarrow$ Forman s.g.)

Proposición

!!

V, $W_1, W_2 < V$. Son equivalentes: (i) $\Longleftrightarrow$ ii))

i) $\forall v \in V, \exists! \; w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ tal que $v = w_1 + w_2$ $(w_1 + w_2 = w_1' + w_2' \Rightarrow w_1 = w_1', w_2 = w_2')$

ii) $V = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Dem. i) $\Rightarrow$ ii)

$v \in W_1 \cap W_2 \Longrightarrow v = w_1 \in W_1 , v = w_2 \in W_2 \Longrightarrow v = \begin{cases} w_1 + 0 \in W_1 + W_2 \\ 0 + w_2 \in W_1 + W_2 \end{cases} \overset{i)}{\Longrightarrow} w_1 = 0 , w_2 = 0 \quad (v = 0)$

ii) $\Rightarrow$ i)

$V = W_1 + W_2 \Longrightarrow \forall v \in V, \exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ tq $v = w_1 + w_2$ (existencia)

Supongamos $v = \begin{cases} w_1 + w_2 \\ w_1' + w_2' \end{cases} \Longrightarrow w_1 - w_1' = w_2 - w_2' \in W_1 \cap W_2 = \{0\} \Longrightarrow w_1 - w_1' = 0 , w_2 - w_2' = 0$

$\Longrightarrow w_1 = w_1' , w_2 = w_2'$ (unicidad)

Cuando se cumple esto se dice que V es suma directa de W_1 y W_2

Suma directa: $\boxed{V = W_1 \oplus W_2}$

Ej

$\left.\begin{array}{l} V = K^2 \\ W_1 = K \times \{0\} \\ W_2 = \{0\} \times K \end{array}\right\} V = W_1 \oplus W_2$

$(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2)$

$(a_1, a_2) = (b_1, 0) + (0, b_2) = (b_1 + 0, 0 + b_2) = (b_1, b_2)$

$\Downarrow$

$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$

Ej

K^3

$\dim W_1 = \dim W_2 = 2$

$$K^3 = W_1 \oplus W_2 \implies \begin{cases} W_1 \cap W_2 = \{0\} \implies \dim(W_1 \cap W_2) = 0 \\ W_1 + W_2 = K^3 \implies \dim(W_1 + W_2) = 3 \end{cases}$$

$$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 \implies 3 = 2 + 2 + 0 \ \text{¡!}$$

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = (W_1 \oplus W_2) \oplus W_3$$
$$\Updownarrow$$
$$V = W_1 + W_2 + W_3,\ (W_1 \cap W_2) = \{0\},\ (W_1 + W_2) \cap W_3 = \{0\}$$

Ej $\quad K^3 = W_1^{\neq 0} \oplus W_2^{\neq 0} \oplus W_3^{\neq 0}$

$$W_1 = L(e_1) \quad W_2 = L(e_2) \quad W_3 = L(e_3)$$

Ej $\quad V = Mat_2(\mathbb{R}) \qquad \dim V = 4 \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$S_2(\mathbb{R}) = \{ A \in V : A = A^t \} < V \qquad \dim = 3 \quad (*)$

↳ Matrices simétricas

$A_2(\mathbb{R}) = \{ A \in V : A = -A^t \} < V \qquad \dim = 1 \quad (**)$

↳ Matrices antisimétricas

$$A, B \in A_2(\mathbb{R}) \implies A + B = -A^t - B^t = -(A^t + B^t) = -(A+B)^t \implies A + B \in A_2(\mathbb{R})$$

$$a \in \mathbb{R} \implies aA = -aA^t = -(aA)^t \implies aA \in A_2(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \iff a_{12} = a_{21} \iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \overbrace{a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{(*)}$$

$$A \in A_2(\mathbb{R}) \iff a_{ij} = -a_{ji} \iff \begin{cases} a_{ii} = -a_{ii} \\ a_{ij} = -a_{ij} \end{cases} \iff \begin{cases} a_{ii} = 0 \\ a_{ij} = -a_{ji} \end{cases} \iff A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{(**)}$$

$$A \in S_2(\mathbb{R}) \cap A_2(\mathbb{R}) \implies A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ \pm a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies S_2(\mathbb{R}) \cap A_2(\mathbb{R}) = \{0\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} A^t = A \\ A^t = -A \end{cases} A = -A \implies A = 0$$

$$a = -a \implies a = 0$$

$$\dim(S_2 + A_2) = 3 + 1 - 0 = 4$$

$$\underset{4}{S_2 + A_2} < \underset{4}{V} \implies \underline{S_2 + A_2 = V} \implies \underline{V = S_2 \oplus A_2}$$

$$(A+A^t)^t = A^t + A^{tt} = A^t + A = A + A^t$$

$$(A-A^t)^t = A^t - A^{tt} = A^t - A = -(A-A^t)$$

$$\underline{A = \frac{1}{2}\cdot(A+A^t) + \frac{1}{2}(A-A^t)}$$ Descomposición de una matriz en simétricas y antisimétricas

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej

$V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ todas las $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$P = \{ f \in V, f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \} < V$

$I = \{ f \in V, f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \} < V$

$V = P \oplus I$

Ej.

$V = \mathbb{R}^4$

$$W_1 \cap W_2 = \begin{cases} L(e_3+e_4) \text{ X Imposible} \\ \{0\} \implies W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \end{cases}$$

$W_1 = L(e_1, -e_2+e_4) \to \dim 2$

$W_2 = L(e_3+e_4) \to \dim 1$

$W_3 = L(e_2+e_3) \to \dim 1$

$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$

$W_1 + W_3 = W_1 \oplus W_3$

$W_2 + W_3 = W_2 \oplus W_3$ (si la intersección de dos rectas fuese una recta tendrían que ser la misma)

$$W_1 + W_2 + W_3 = (W_1 \oplus W_2) \oplus W_3 \iff \begin{cases} W_1 \cap W_2 = \{0\} \checkmark \\ (W_1+W_2) \cap W_3 = W_3 \neq \{0\} \text{ X} \end{cases} \implies \underline{W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \neq W_1 + W_2 + W_3}$$

$W_1 + W_2 = L(e_1, -e_2+e_4, e_3+e_4)$, $e_2 + e_3 = -(-e_2+e_4) + e_3 + e_4$

$(-e_2 + e_4 \in W_3 \cap L(e_3+e_4, e_2+e_3))$

— — — —

$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \iff \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$

¿ $W_1 + \dots + W_k = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \iff \dim(W_1 + \dots + W_k) = \dim W_1 + \dots + \dim W_k$?

Coordenadas

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $x_i \in K$ únicos

$\boxed{v = (x_1, \dots, x_n)_B}$ Coordenadas respecto a la base B

$(a_1, a_2) = (a_1, a_2)_{Bc}$

$B' = \{e_1, e_1 + e_2\} \Longrightarrow (a_1, a_2) = (a_1 - a_2, a_2)_{B'}$

$\left(\text{ya que } (a_1 - a_2)e_1 + a_2(e_1 + e_2) = (a_1, a_2)\right)$

Cambio de base

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V, $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ base de V'

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ $\qquad$ $v = x_1' v_1' + \dots + x_n' v_n'$

$v = (x_1, \dots, x_n)_B$ $\qquad$ $v = (x_1', \dots, x_n')_{B'}$

$$(*)\left\{\begin{array}{l} v_1 = a_{1,1} v_1' + \dots + a_{n,1} v_n' \\ \vdots \\ v_n = a_{1,n} v_1' + \dots + a_{n,n} v_n' \end{array}\right.$$

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = v = x_1' v_1' + \dots + x_n' v_n' \overset{(*)}{=} x_1 (a_{1,1} v_1' + \dots + a_{n,1} v_n') + \dots + x_n (a_{1,n} v_1' + \dots + a_{n,n} v_n')$$

$$= (a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n) v_1' + \dots + (a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,n} x_n) v_n'$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matriz de paso de B a B'
$M(B, B')$

Matriz de paso

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = PQ \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \Longrightarrow 0 = (PQ - I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow PQ - I_n = 0$$

!!

$P = M(B, B')$, $P \in Mat_n(K)^{\times} \overset{(*)}{=} GL_n(K)$ $\qquad$ $Q = M(B', B)$

↳ Grupo lineal

P y Q son inversibles (*)

$\boxed{M(B, B') = M(B', B)^{-1}}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = QP \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \dots \Longrightarrow QP - I_n = 0$$

Ej.

K_2, $B_c = B$, $B' = \{e_1 + 2e_2, 2e_1 + e_2\}$ → Fácil comprobar que es l.i.

$$a_1(e_1+2e_2) + a_2(2e_1+e_2) = 0$$
$$\Rightarrow \underbrace{(a_1+2a_2)}_{=0} e_1 + \underbrace{(2a_1+a_2)}_{=0} e_2 = 0$$

Con $\chi(K)=3$ esos vectores no forman base

Suponiendo $\chi(K) \neq 3$

$$\Rightarrow a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow 3a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \; (*)$$

$$M(B', B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(B, B') = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

(*) (**)

(*) **Característica de un cuerpo**

$$\chi(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \cdot 1_K \neq 0_K,\ \forall n > 0 \\ p > 0, \text{ si } & \begin{cases} p \cdot 1_K = 0 \\ n \cdot 1_K \neq 0,\ \forall 0 < n < p \end{cases} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1' = e_1 + 2e_2 \\ v_2' = 2e_1 + e_2 \end{array}\right\} v_1' - 2v_2' = -3e_1 \; (*)$$

$$e_2 = v_2' - 2e_1 = v_2' - 2\left(-\tfrac{1}{3} v_1' + \tfrac{2}{3} v_2'\right) = \frac{2}{3} v_1' - \frac{1}{3} v_2' \; (**)$$

Ej

$v = (7, -6) \in \mathbb{R}^2$, $v = (7, -6)_{B_C}$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/3 \\ 20/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow v = (-19/3, 20/3)_{B'}$$

ESPACIO VECTORIAL COCIENTE

Definición

$W < V$

$v \equiv_W v'$ si $v - v' \in W$

Proposición

"$\equiv_W$" es relación de equivalencia sobre V

Dem. (Comprobación de las tres propiedades)

$v - v = 0_V = 0_W \in W \Longrightarrow \underline{v \equiv_W v \text{ (prop. reflexiva)}}$

$v \equiv_W v' \Longrightarrow v - v' \in W \Longrightarrow v' - v = -(v - v') \in W \Longrightarrow \underline{v' \equiv_W v \text{ (prop. simétrica)}}$

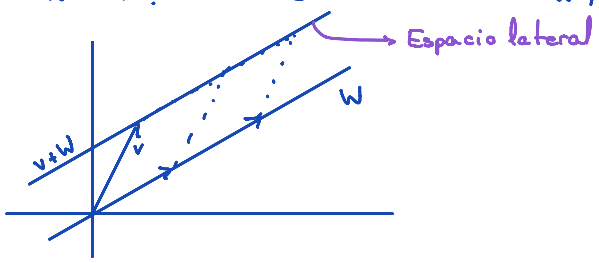
$v \equiv_W v',\ v' \equiv_W v'' \Longrightarrow v - v' \in W,\ v' - v'' \in W \Longrightarrow v - v'' = v - v' + v' - v'' \in W \Longrightarrow \underline{v \equiv_W v'' \text{ (prop. transitiva)}}$

Notación

$$\boxed{[v]_W = \overline{v} = v + W = \{ v + w : w \in W \}}$$

¿$\overline{v} \subseteq v + W$? Sea $v' \in \overline{v} \Longrightarrow v' \equiv_W v \Longrightarrow v' - v = w \in W \Longrightarrow \underline{v' = v + w \in v + W}$

¿$v + W \subseteq \overline{v}$? Sea $v' \in v + W \Longrightarrow v' = v + w,\ w \in W \Longrightarrow v' - v \in W \Longrightarrow v' \equiv_W v \Longrightarrow \underline{v' \in \overline{v}}$



Notación

$$\boxed{\{ [v]_W : v \in V \} = V/W}$$

Teorema

V/W es un k-espacio vectorial con las operaciones siguientes:

i) $\overline{v} + \overline{v'} = \overline{v + v'}$

ii) $a \cdot \overline{v} = \overline{a \cdot v}$

$(0_{V/W} = \overline{0}_V,\ -\overline{v} = \overline{-v})$

Dem.

$\overline{v_1} = \overline{v_2}$, $\overline{v_1'} = \overline{v_2'}$

$\overline{v_1 + v_1'} \stackrel{?}{=} \overline{v_2 + v_2'}$

$v_1 + v_1' - (v_2 + v_2') = \underbrace{(v_1 - v_2)}_{\in W} + \underbrace{(v_1' - v_2')}_{\in W} \in W$

Con el producto es análogo.

$W < V \Longrightarrow V/W = \{ \overline{v} : v \in V \}$ $\quad \overline{v} = \overline{v'} \iff v \equiv_W v' \iff v - v' \in W$

$(V/W, +, \cdot)$ es e. v. $\quad \overline{v} + \overline{v'} = \overline{v+v'}$, $a \cdot \overline{v} = \overline{av}$

Proposición

Si $\dim_k V = n$, $\dim_k W = m \Longrightarrow \dim_k V/W = n - m$

Dem.

$B_W = \{ w_1, \dots, w_m \}$

$B_V = \{ w_1, \dots, w_m, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{n-m} \}$

¿$\{ \overline{v_{m+1}}, \dots, \overline{v_n} \} = B_{V/W}$?

- Veamos es l.i.: $\quad a_{m+1} \overline{v_{m+1}} + \dots + a_n \overline{v_n} = \overline{0}_V$

$$\overline{a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n} = \overline{0}_V \iff \underbrace{a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n - 0_V}_{\displaystyle = a_1 w_1 + \dots + a_m w_m} \in W$$

(Expresados en función de la base B_W)

$$\Downarrow$$

$$a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n - a_1 w_1 - \dots - a_m w_m = 0$$

$\Downarrow$ B_V base

$$a_{m+1} = \dots = a_n = -a_1 = \dots = -a_m = 0$$

- Veamos forman base

$$\overline{v} = \overline{a_1 w_1 + \dots + a_m w_m + a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n} = \underbrace{\overline{a_1 w_1 + \dots + a_m w_m}}_{\in W \Rightarrow = \overline{0}_{V/W}} + a_{m+1} \overline{v_{m+1}} + \dots + a_n \overline{v_n}$$

$= a_{m+1} \overline{v_{m+1}} + \dots + a_n \overline{v_n} \Longrightarrow \{ \overline{v_{m+1}}, \dots, \overline{v_n} \}$ es s.g. (Luego, es base)

Ej. $V = \mathbb{R}^5$, $W: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$

las soluciones del sistema

sistema homogénea

↳ rango $= 2$ (*)

(*) $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$ ↳ rg $= 2$

Veamos $\dim_k W = 3$, $B_{V/W}$

$\dim_k W = n^\circ$ incógnitas $-$ rango $= 5 - 2 = 3$

↳ Se cumple en los sistemas homogéneos

$x_1 + x_2 = x_5$

$2x_1 = x_4$

$\underbrace{\{ x_3, x_4, x_5 \}}_{\text{Son los parámetros que dan las soluciones}} = \underbrace{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}$

↳ ¿Por qué se hace esto?

Son las variables que parametrizamos (las independientes) que dan valor a las otras dos (las dependientes)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0 \Longrightarrow w_1 = (0,0,1,0,0) \in W$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow w_2 = (1/2,\ 1/2,\ 0,\ 1,\ 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow w_3 = (0,1,0,0,1)$$

w_1, w_2 y w_3 son l.i.

$\{w_1, w_2, w_3\} = B_W$

aún no sabemos cuáles son (de momento son arbitrarios)

$B_{V/W} = \{\overline{v_4}, \overline{v_5}\}$ donde $\{\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}, \overline{v_4}, \overline{v_5}\}$ es base de $\mathbb{R}^5$

lo más sencillo suele ser ampliar con vectores de la base canónica

$$\boxed{\begin{array}{l} v_4 = e_1 \\ v_5 = e_2 \end{array}}$$

complemento directo

$$\underset{\dim 5}{\mathbb{R}^5} = \underset{\dim 3}{W} \oplus \underset{\dim 2}{U}$$

$\underline{U = L(e_1, e_2)}$

Los vectores añadidos a la base de un subespacio para extenderla a la del espacio vectorial forman base del espacio cociente y dan lugar al complemento directo del subespacio.