TEMA 3: ESPACIOS VECTORIALES

Definición (Espacio Vectorial)

$(V,+,\cdot)$, $+ : V\times V \longrightarrow V$, $\cdot : K\times V \longrightarrow V$, K cuerpo conmutativo

$+$: Operación interna

$\cdot$: operación externa; 0_K, 1_K

V es espacio vectorial (sobre K) si se cumplen:

i) $(V,+)$ es grupo conmutativo $(\underset{\text{neutro}}{0_V}, \underset{\text{opuesto}}{-v})$

ii) $\forall a \in K,\ \forall v, v' \in V$, $a(v+v') = av + av'$

iii) $\forall a, a' \in K,\ \forall v \in V$, $(a+a')v = av + a'v$

Distributivas

iv) $\forall a, a' \in K,\ \forall v \in V$, $a(a'v) = (aa')v$ → Asociatividad mixta

v) $\forall v \in K$, $1_K \cdot v = v$

$\boxed{a, b \in K\ ,\ ab = 0_K \Rightarrow a = 0_K \text{ ó } b = 0_K}$ (No hay divisores de 0_K) → Se cumple en el anillo

Anillo de integridad

$\Downarrow$

¿Conmutativo y unitario?

$\Downarrow$

Dominio de integridad

Dem. Sea $ab = 0_K$, $a \neq 0_K$

$$\Downarrow$$

$$\exists a^{-1} \in K \Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1}0_K \Rightarrow \underline{b = 0_K}$$

$\boxed{a \in K \Rightarrow a\cdot 0_K = 0_K}$

Dem.

$$a\cdot 0_K = a\cdot(0_K + 0_K) = a\cdot 0_K + a\cdot 0_K \Rightarrow a\cdot 0_K + (-a0_K) = a0_K + a0_K + (-a0_K) \Rightarrow 0_K = a0_K + 0_K$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a0_K = 0_K}$$

$\boxed{0_K\cdot v = 0_V}$, $\boxed{a\cdot 0_V = 0_V}$

Dem.

... que K sea un cuerpo

$\uparrow$

$a\cdot v = 0_V,\ a \neq 0_K \Rightarrow \exists a^{-1} \in K,\ a^{-1}(av) = a^{-1}0_V = 0_V \Rightarrow (a^{-1}a)v = 1_K v = \underline{v = 0_V}$

Ejemplos importantes de espacios vectoriales

1. $\boxed{\text{Sea } V = K^n = K \times K \times \dots \times K \ (n \text{ veces})}$ n-ésimo K-espacio vectorial usual, estándar o canónico

$+: (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$

$\cdot: \underset{\text{Escalar}}{a} \cdot \underset{\text{Vector}}{(a_1, \dots, a_n)} = (a \cdot a_1, \dots, a \cdot a_n)$

$(0, \dots, 0) = 0_V$

$-(a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, -a_n)$

$(ab)(a_1, \dots, a_n) = ((ab)a_1, \dots, (ab)a_n) = (a(ba_1), \dots, a(ba_n)) =$

$= a(ba_1, \dots, ba_n) = a \cdot (b \cdot (a_1, \dots, a_n))$

2. $\boxed{V = K[x]}$ los polinomios forman una k-álgebra

$+:$ $f + g$ es la suma usual de polinomios

$\cdot:$ $a \cdot f = a \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a a_i) x^i$

3. $\boxed{W = K_n[x] = \{ f \in K[x],\ gr(f) < n \}}$ → subespacio vectorial de V

$(K_n[x], \underset{\text{interna}}{+}, \underset{\text{externo}}{\cdot})$ es un espacio vectorial

4. $\boxed{V = Mat_{m \times n}(K)}$

$+:$ $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ Suma de matrices ordinaria

$\cdot:$ $a \cdot (a_{ij}) = (a \cdot a_{ij})$ Producto con escalar usual

$(V, +, \cdot)$ es espacio vectorial

• Si $m = n$, $Mat_n(K)$ denota matrices cuadradas

$\cdot:$ $a \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \cdot f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$

Definición (Subespacio vectorial)

V e.v. , $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$

Se dice que W es un subespacio vectorial de V si:

i) $w, w' \in W \Rightarrow w + w' \in W$

ii) $a \in K, w \in W \Rightarrow a \cdot w \in W$

$W \neq \emptyset \Rightarrow \exists w \in W \Rightarrow 0_V = 0_K \cdot w \in W$ (Axioma)

$w \in W \Rightarrow -w = (-1_K) \cdot w \in W$

$w + (-1_K) \cdot w = 1_K w + (-1_K) w = (1_K + (-1_K)) w = 0_K \cdot w = 0_V$

De forma trivial se cumplen las demás propiedades de e.v. $\Rightarrow$ Tienen estructura de e.v.

Ej $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ función} \}$

$W = \{ f \in V : \underbrace{f(-x) = f(x)}_{\text{funciones pares}}, \forall x \in \mathbb{R} \} \neq \emptyset$

$f, g \in W$

$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = \underline{(f+g)(x)}$

$(af)(-x) = a \cdot f(-x) = a \cdot f(x) = \underline{(af)(x)}$

Las funciones pares forman un sub e.v.

Ej $W = \{ f \in V : f(0) = f(1) \}$ También es sub e.v.

$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = f(1) + g(1) = (f+g)(1)$

$(af)(0) = af(0) = a \cdot f(1) = (af)(1)$

Propiedad (Intersección, unión y suma de subespacios vectoriales)

Sean $W_1, W_2 \underset{\text{subespacio de}}{<} V \Rightarrow \begin{cases} W_1 \cap W_2 < V \\ W_1 \cup W_2 \not< V \longrightarrow \text{generalmente no es subespacio} \\ W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 ,\ w_1 \in W_1 ,\ w_2 \in W_2 \} < V \end{cases}$

$w_1' + w_2' ,\ w_1' \in W_1 ,\ w_2' \in W_2$

$\Downarrow$

$(w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = (w_1 + w_1') + (w_2 + w_2') \in W_1 + W_2$

$w_1 + w_2 \in W_1 + W_2 ,\ a \in K \Longrightarrow (w_1 + w_2) \cdot a = a w_1 + a w_2 \in W_1 + W_2$

– – – –

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m \Rightarrow v$ es COMBINACIÓN LINEAL de $v_1, v_2, \ldots, v_m$

Definición (Independencia lineal)

$\{v_1, \ldots, v_m\}$ es l.i. si:

↳ linealmente independiente

i) $\forall a_1, \ldots, a_m \in K ,\ a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0_V \Longrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$

ii) $L \subset V$, L es l.i. si cada subconjunto finito de L es l.i.

Ej $K^2 = K \times K ,\ e_1 = (1,0) ,\ e_2 = (0,1)$

$\{e_1, e_2\}$ es l.i

Dem: $a_1 e_1 + a_2 e_2 = (a_1, 0) + (0, a_2) = (0,0) \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

Ej $K[x]$

$L = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ es l.i.

Dem: $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n x^n = 0$

$\shortparallel$

$\begin{matrix} e_1 \\ v_2 \end{matrix} \Big\{$ l.i. $\quad \begin{matrix} e_2 \\ v_3 \end{matrix} \Big\{$ l.i.

Sean $v_1, \dots, v_m$ l.d. $\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$, algún $a_i \neq 0 \Rightarrow \exists\, a_i^{-1}$

$$\Rightarrow v_i = -a_i^{-1} a_1 v_1 - \dots - a_i^{-1} a_{i-1} v_{i-1} - \dots - a_i^{-1} a_{i+1} v_{i+1} - \dots - a_i^{-1} a_m v_m$$

Luego, cuando ciertos vectores son l.d. alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal del resto.

Definición (Sistema de generadores)

Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$

$\underbrace{L(S)}_{\text{Todas las combinaciones lineales}} = \{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m,\ a_1, \dots, a_m \in K\} \Rightarrow L(S) < V$

Es el subespacio vectorial de V más pequeño que contiene a todos los vectores

$K^2 = L(e_1, e_2) = a_1 e_1 + a_2 e_2 = (a_1, a_2)$

↳ sistema de generadores de K

S es un sistema de generadores de V $\Longleftrightarrow V = L(S)$ (todos los vectores de v se pueden expresar como combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_m\}$)

Definición (Espacios finitamente generados)

V es finitamente generado si $V = L(S)$, $S = \{v_1, \dots, v_m\}$

$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$

↳ Todos combinación lineal

K^2 es f.g. $K[x]$ no es f.g. (si lo fuera existiría grado máximo) $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no es f.g.

Definición (Base)

$B \subset V$

Se dice que B es base si es linealmente independiente y sistema generador

$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$, $v_1, \dots, v_m \in B$

$v = a_1' v_1 + \dots + a_m' v_m$

$Mat_{3\times 2}(K): B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}$

Proposición

B es base $\Longleftrightarrow$ B es sistema de generadores minimal ($S \subset B \Rightarrow S$ no es s.g.)

Sistema de generadores

Dem.

$\Longrightarrow$) Supongamos B no es minimal $\Longrightarrow \exists S \subset B$, S s.g. $\Longrightarrow \exists v \in B$, $v \notin S$, $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$, $v_1, \dots, v_m \in S$

$\Longrightarrow 0_V = 1_k v - a_1 v_1 - \dots - a_m v_m \Longrightarrow$ B no l.i. ¡!

↳ Da 0 y no todos los coeficientes son 0

$\Longleftarrow$) ¿B l.i.?

Supongamos B l.d. $\Longrightarrow \exists v_1, \dots, v_m \in B$, $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$, $a_m \neq 0$

Uno cualquiera

$\Longrightarrow v_m = -a_m^{-1} a_1 v_1 - \dots - a_m^{-1} a_{m-1} v_{m-1} \Longrightarrow S = B \setminus \{v_m\}$ es s.g. ¡! (B no minimal)

Proposición

B es base $\Longleftrightarrow$ B es linealmente independiente maximal ($B \subset L \Rightarrow L$ no l.i.)

Teorema

Todo espacio finitamente generado tiene base.

Dem.

Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ s.g. de V, existe $S' \subseteq S$, S' es s.g. minimal (S' es base)

(solo funciona si V es f.g.)

$V = \{0_V\} \Longrightarrow B = \emptyset$

$V \neq \{0_V\} \Longrightarrow v \neq 0_V$ $\quad L = \{v\}$ es l.i. $\Longrightarrow L \subseteq L'$ maximal (L' es base)

Dem.

Inducción sobre s.

- $s=1$: $L=\{v_1\}$ l.i. $(v_1 \neq 0)$ $S=\{w_1,\dots,w_t\}$ s.g.

$$v_1 = a_1w_1 + \dots + a_tw_t \underset{\text{p.e.}}{\Longrightarrow} a_1 \neq 0 \Rightarrow w_1 = a_1^{-1}v_1 - a_1^{-1}a_2w_2 - \dots - a_1^{-1}a_tw_t$$

$\not\equiv$ 0_V

$$\Longrightarrow \underline{\{v_1, w_2, \dots, w_t\} \text{ es s.g.}} \quad (t \geq 1)$$

- (HI) $s-1$: $L=\{v_1,\dots,v_s\}$ l.i. $S=\{w_1,\dots,w_t\}$

$$\{v_1,\dots,v_{s-1}\} \text{ l.i.} \overset{HI}{\Longrightarrow} \{v_1,\dots,v_{s-1},w_s,\dots,w_t\} \text{ s.g.}$$

$0_V \neq v_s = a_1v_1 + \dots + a_{s-1}v_{s-1} + a_sw_s + \dots + a_tw_t$. Supongamos $a_s = \dots = a_t = 0$

algún $a_i \neq 0$ $\Rightarrow v_s = a_1v_1 + \dots + a_{s-1}v_{s-1}$ ¡!

Supongamos $a_s \neq 0$. $w_s = a_s^{-1}v_s - a_s^{-1}a_1v_1 - \dots - a_s^{-1}a_{s-1}v_{s-1} - a_s^{-1}a_{s+1}w_{s+1} - \dots - a_s^{-1}a_tw_t$

$$\Longrightarrow \{v_1,\dots,v_{s-1},v_s,w_{s+1},\dots,w_t\} \text{ es } \underline{\text{s.g.}}$$

Proposición

V f.g., L l.i. $\Longrightarrow$ L es finito

Dem.

Elegimos $S=\{w_1,\dots,w_s\}$ s.g.

Si L es l.i. infinito $\Longrightarrow \exists\, v_1,\dots,v_{s+1} \in L$

$\{v_1,\dots,v_{s+1}\}$ es l.i. ¡!

Proposición

V es f.g., entonces:

Dem.

i) B base de $V \Longrightarrow B$ l.i. $\Longrightarrow B$ finito

ii) B_1, B_2 bases de $V \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} s_1 \overset{1}{\leq} s_2 \\ s_2 \underset{2}{\leq} s_1 \end{array}\right\} s_1 = s_2$

s.g 1

s.g 2

Definición (Dimensión)

V f.g. : $\dim_k V = |B|$, B cualquier base de V

$\dim K^2 = 2$ $(B = B_c = \{e_1, e_2\})$ $\qquad \dim K^n = n$ $(B_c = \{e_1, \dots, e_n\})$

$\dim_k Mat_{m \times n}(K) = m \cdot n$ $(B = \{E_{ij},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\})$

$E_{ij} = a_{rs}$: $a_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (r,s) \\ 0 & \text{si } (i,j) \neq (r,s) \end{cases}$

$\dim_k k[x]$ es infinito (numerable)

Proposición

V f.g., $W < V$. Se cumplen:

i) W f.g.

ii) $\dim W \leq \dim V$

iii) B_W es base de $W \Longrightarrow \exists B_V$ base de V tal que $B_W \subseteq B_V$ (Teorema de extensión de bases)

(Consecuencia del Lema de Intercambio)

iv) $W = V \Longleftrightarrow \dim_k W = \dim_k V$

Dem.

i) L_W l.i. $\Longrightarrow L_W$ l.i. (en V) $\Longrightarrow \begin{cases} |L_W| \leq \dim_k V = n \\ L_W \text{ finito} \end{cases}$

$m \leq n$ $\qquad B_W$ l.i. en V, B_V s.g. de $V \underset{\text{Lema intercambio}}{\Longrightarrow} \{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es s.g. de V minimal $\Longrightarrow$ es base de V

$n = \dim V$

K^2:

$\omega_1 = (2,-3) \neq (0,0)$

$B_c = \{e_1, e_2\} \Longrightarrow \{(2,-3), e_1\}, \{(2,-3), e_2\}$ son ambas bases de K^2

OBS

Se cumple, $\dim_K V = n$:

i) L l.i., $|L| = n \Longrightarrow L$ es base

ii) S s.g., $|S| = n \Longrightarrow S$ es base

Para dimensiones infinitas no se cumple !

$V = K[x]$

$W = \{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i}, a_i \in K \}$

$\dim V = \dim W$, $W < V$

Teorema (Fórmula de Grassmann)

V f.g., $W_1, W_2 < V$. Se cumple:

$\dim_K W_1 + W_2 = \dim_K W_1 + \dim_K W_2 - \dim_K (W_1 \cap W_2)$

Dem.

$m_1 = \dim W_1$, $m_2 = \dim W_2$, $p = \dim (W_1 \cap W_2)$

$p \leq m_1$, $p \leq m_2$

Sea $B_{W_1 \cap W_2} = \{v_1, \dots, v_p\}$

$B_{W_1} = \{v_1, \dots, v_p, w_{p+1}, \dots, w_{m_1}\}$

$B_{W_2} = \{v_1, \dots, v_p, w'_{p+1}, \dots, w'_{m_2}\}$

ya que lo de la ... lo de la ... y son =

$\in W_1$ $\in W_2$

Expresa el vector en función de la base de $W_1 \cap W_2$

$\Longrightarrow W_1 \cap W_2 \ni a_{p+1} w'_{p+1} + \dots + a_{m_2} w'_{m_2} = b_1 v_1 + \dots + b_p v_p$

$\Longrightarrow -b_1v_1 - \ldots - b_pv_p + a'_{p+1}w'_{p+1} + \ldots + a'_{m_2}w'_{m_2} = 0 \Longrightarrow b_1 = \ldots = b_p = a'_{p+1} = \ldots = a'_{m_2} = 0$

$\downarrow$

Todos en B_{W_2} (son l.i. $\Rightarrow$ todos nulos)

$\Longrightarrow W_1 \cap W_2 \ni a_1v_1 + \ldots + a_pv_p + a_{p+1}w_{p+1} + \ldots + a_{m_1}w_{m_1} = 0$

$\Longrightarrow a_1 = \ldots = a_p = a_{p+1} = \ldots = a_{m_1} = 0$ (Todos los vectores son l.i.)

$\Longrightarrow$ Son todos l.i. . Veamos ahora que son s.g. de $W_1 + W_2$

$u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$

$u_1 + u_2 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} w_{p+1} + \ldots + \lambda_{m_1} w_{m_1} + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_p v_p + \mu_{p+1} w'_{p+1} + \ldots + \mu_{m_2} w'_{m_2} =$

$= (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_p + \mu_p)v_p + \lambda_{p+1}w_{p+1} + \ldots + \lambda_{m_1}w_{m_1} + \mu_{p+1}w'_{p+1} + \ldots + \mu_{m_2}w'_{m_2}$

(Combinación lineal de los vectores anteriores $\Longrightarrow$ Forman s.g.)

Proposición

V, $W_1, W_2 < V$. Son equivalentes: (i) $\Leftrightarrow$ ii))

i) $\forall v \in V, \exists!\ w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ tal que $v = w_1 + w_2$ $(w_1 + w_2 = w_1' + w_2' \Rightarrow w_1 = w_1', w_2 = w_2')$

ii) $V = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Dem. i) $\Rightarrow$ ii)

$v \in W_1 \cap W_2 \Longrightarrow v = w_1 \in W_1, v = w_2 \in W_2 \Longrightarrow v = \begin{cases} w_1 + 0 \in W_1 + W_2 \\ 0 + w_2 \in W_1 + W_2 \end{cases} \overset{i)}{\Longrightarrow} w_1 = 0, w_2 = 0 \quad (v = 0)$

ii) $\Rightarrow$ i)

$V = W_1 + W_2 \Longrightarrow \forall v \in V, \exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ tq $v = w_1 + w_2$ (existencia)

Supongamos $v = \begin{cases} w_1 + w_2 \\ w_1' + w_2' \end{cases} \Longrightarrow w_1 - w_1' = w_2 - w_2' \in W_1 \cap W_2 = \{0\} \Longrightarrow w_1 - w_1' = 0, w_2 - w_2' = 0$

$\Longrightarrow w_1 = w_1', w_2 = w_2'$ (unicidad)

Cuando se cumple esto se dice que V es suma directa de W_1 y W_2

$\Downarrow$

$a_1 = b_1, a_2 = b_2$

Ej

K^3

$\dim W_1 = \dim W_2 = 2$

$$K^3 = W_1 \oplus W_2 \Longrightarrow \begin{cases} W_1 \cap W_2 = \{0\} \Longrightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0 \\ W_1 + W_2 = K^3 \Longrightarrow \dim(W_1 + W_2) = 3 \end{cases}$$

$$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 \Longrightarrow 3 = 2 + 2 + 0 \text{ ¡!}$$

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = (W_1 \oplus W_2) \oplus W_3$$
$$\Updownarrow$$
$$V = W_1 + W_2 + W_3,\ (W_1 \cap W_2) = \{0\},\ (W_1 + W_2) \cap W_3 = \{0\}$$

Ej $K^3 = \overset{\neq 0}{W_1} \oplus \overset{\neq 0}{W_2} \oplus \overset{\neq 0}{W_3}$

$W_1 = L(e_1) \quad W_2 = L(e_2) \quad W_3 = L(e_3)$

Ej $V = Mat_2(\mathbb{R}) \quad \dim V = 4 \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$S_2(\mathbb{R}) = \{ A \in V : A = A^t \} < V \qquad \dim = 3 \quad (*)$

↳ Matrices simétricas

$A_2(\mathbb{R}) = \{ A \in V : A = -A^t \} < V \qquad \dim = 1 \quad (**)$

↳ Matrices antisimétricas

$$A, B \in A_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow A + B = -A^t - B^t = -(A^t + B^t) = -(A+B)^t \Longrightarrow A + B \in A_2(\mathbb{R})$$

$$a \in \mathbb{R} \Longrightarrow aA = -aA^t = -(aA)^t \Longrightarrow aA \in A_2(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow a_{12} = a_{21} \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \overbrace{a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{(*)}$$

$a_{ij} = a_{ji} \qquad a_{ii} = 0 \qquad \begin{pmatrix} a & a_{12} & \end{pmatrix}$

$a = 0$

$$\underset{4}{S_2 + A_2} < V \Longrightarrow \underline{S_2 + A_2 = V} \Longrightarrow \underline{V = S_2 \oplus A_2}$$

$$(A+A^t)^t = A^t + A^{tt} = A^t + A = A + A^t$$

$$(A-A^t)^t = A^t - A^{tt} = A^t - A = -(A-A^t)$$

$$\underline{A = \frac{1}{2}\cdot(A+A^t) + \frac{1}{2}(A-A^t)}$$ Descomposición de una matriz en simétricas y antisimétricas

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej

$V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ todas las $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$P = \{ f \in V,\ f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \} < V$

$I = \{ f \in V,\ f(x) = -f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R} \} < V$

$V = P \oplus I$

Ej.

$V = \mathbb{R}^4$

$W_1 = L(e_1, -e_2 + e_4) \to \dim 2$

$W_2 = L(e_3 + e_4) \to \dim 1$

$W_3 = L(e_2 + e_3) \to \dim 1$

$$W_1 \cap W_2 = \begin{cases} L(e_3 + e_4) \text{ X Imposible} \\ \{0\} \end{cases} \implies W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$$

$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$

$W_1 + W_3 = W_1 \oplus W_3$

$W_2 + W_3 = W_2 \oplus W_3$ (Si la intersección de dos rectas fuese una recta tendrían que ser la misma)

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ✓

$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \iff \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$

¿$W_1 + \dots + W_k = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \iff \dim(W_1 + \dots + W_k) = \dim W_1 + \dots + \dim W_k$?

Coordenadas

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $x_i \in K$ únicos

$\boxed{v = (x_1, \dots, x_n)_B}$ Coordenadas respecto a la base B

$(a_1, a_2) = (a_1, a_2)_{Bc}$

$B' = \{e_1, e_1 + e_2\} \Longrightarrow (a_1, a_2) = (a_1 - a_2, a_2)_{B'}$

$\left(\text{ya que } (a_1 - a_2)e_1 + a_2(e_1 + e_2) = (a_1, a_2)\right)$

Cambio de base

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V, $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ base de V'

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ $\qquad$ $v = x_1' v_1' + \dots + x_n' v_n'$

$v = (x_1, \dots, x_n)_B$ $\qquad$ $v = (x_1', \dots, x_n')_{B'}$

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_{1,1} v_1' + \dots + a_{n,1} v_n' \\ \vdots \\ v_n = a_{1,n} v_1' + \dots + a_{n,n} v_n' \end{array} \right.$$

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = v = x_1' v_1' + \dots + x_n' v_n' \overset{(*)}{=} x_1(a_{1,1} v_1' + \dots + a_{n,1} v_n') + \dots + x_n(a_{1,n} v_1' + \dots + a_{n,n} v_n')$$

$$= (a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n) v_1' + \dots + (a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,n} x_n) v_n'$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Matriz de paso} \\ \text{de B a B}' \\ M(B,B')}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matriz de paso

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = PQ \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \end{pmatrix} \dots (PQ - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \Longrightarrow PQ - I = 0$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = QP \begin{pmatrix} \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \dots \Longrightarrow QP - I_n = 0$$

Ej.

K_2, $B_c = B$, $B' = \{e_1 + 2e_2, 2e_1 + e_2\}$ → Fácil comprobar que es l.i.

$a_1(e_1 + 2e_2) + a_2(2e_1 + e_2) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(a_1 + 2a_2)}_{0} e_1 + \underbrace{(2a_1 + a_2)}_{0} e_2 = 0$

$\Rightarrow a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow 3a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ (*)

Suponiendo $\chi(K) \neq 3$

Con $\chi(K) = 3$ esos vectores no forman base

$M(B', B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$M(B, B') = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

$M(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

(*) (**)

(*) Característica de un cuerpo

$$\chi(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \cdot 1_K \neq 0_K, \ \forall n > 0 \\ p > 0, \text{ si } & \begin{cases} p \cdot 1_K = 0 \\ n \cdot 1_K \neq 0, \ \forall 0 < n < p \end{cases} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= e_1 + 2e_2 \\ v_2' &= 2e_1 + e_2 \end{aligned}\right\} \quad v_1' - 2v_2' = -3e_1 \quad (*)$$

$$e_2 = v_2' - 2e_1 = v_2' - 2\left(-\tfrac{1}{3} v_1' + \tfrac{2}{3} v_2'\right) = \frac{2}{3} v_1' - \frac{1}{3} v_2' \quad (**)$$

Ej

$v = (7, -6) \in \mathbb{R}^2$, $v = (7, -6)_{B_c}$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/3 \\ 20/3 \end{pmatrix} \Rightarrow v = (-19/3, 20/3)_{B'}$$

ESPACIO VECTORIAL COCIENTE

Definición

$W < V$

$v \equiv_W v'$ si $v - v' \in W$

Proposición

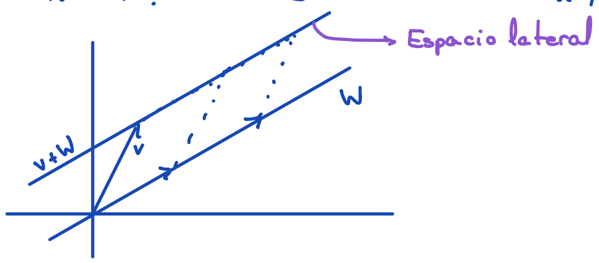
"$\equiv_W$" es relación de equivalencia sobre V

Notación

$$\boxed{[v]_W = \overline{v} = v + W = \{ v + w : w \in W \}}$$

¿ $\overline{v} \subseteq v + W$? Sea $v' \in \overline{v} \Rightarrow v' \equiv_W v \Rightarrow v' - v = w \in W \Rightarrow \underline{v' = v + w \in v + W}$

¿ $v + W \subseteq \overline{v}$? Sea $v' \in v + W \Rightarrow v' = v + w,\ w \in W \Rightarrow v' - v \in W \Rightarrow v' \equiv_W v \Rightarrow \underline{v' \in \overline{v}}$



Notación

$$\boxed{\{ [v]_W : v \in V \} = V/W}$$

Teorema

V/W es un k-espacio vectorial con las operaciones siguientes:

i) $\overline{v} + \overline{v'} = \overline{v + v'}$

$(0_{V/W} = \overline{0_V},\ -\overline{v} = \overline{-v})$

ii) $a \cdot \overline{v} = \overline{a \cdot v}$

Dem.

$\overline{v_1} = \overline{v_2}\ ,\ \overline{v_1'} = \overline{v_2'}$

$\overline{v_1 + v_1'} \overset{?}{=} \overline{v_2 + v_2'}$

$v_1 + v_1' - (v_2 + v_2') = \underbrace{(v_1 - v_2)}_{\in W} + \underbrace{(v_1' - v_2')}_{\in W} \in W$

Con el producto es análogo.

$W < V \Longrightarrow V/W = \{ \overline{v} : v \in V \}$ $\quad \overline{v} = \overline{v'} \Longleftrightarrow v \equiv_W v' \Longleftrightarrow v - v' \in W$

$(V/W, +, \cdot)$ es e. v. $\quad \overline{v} + \overline{v'} = \overline{v + v'}$, $\; a \cdot \overline{v} = \overline{av}$

Proposición

Si $\dim_k V = n$, $\dim_k W = m \Longrightarrow \dim_k V/W = n - m$

Dem.

$B_W = \{ w_1, \dots, w_m \}$

$B_V = \{ w_1, \dots, w_m, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{n-m} \}$

¿$\{ \overline{v_{m+1}}, \dots, \overline{v_n} \} = B_{V/W}$?

- Veamos es l.i.: $\quad a_{m+1} \overline{v_{m+1}} + \dots + a_n \overline{v_n} = \overline{0}_V$

$$\overline{a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n} = \overline{0}_V \Longleftrightarrow a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n - 0_V \in W$$

$$\| $$

$$a_1 w_1 + \dots + a_m w_m$$ (Expresados en función de la base B_W)

$$\Downarrow$$

$$a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n - a_1 w_1 - \dots - a_m w_m = 0$$

$$\Downarrow B_V \text{ base}$$

$$a_{m+1} = \dots = a_n = -a_1 = \dots = -a_m = 0$$

- Veamos forman base

$$\overline{v} = \overline{a_1 w_1 + \dots + a_m w_m + a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n} = \overline{\underbrace{a_1 w_1 + \dots + a_m w_m}_{\in W \Rightarrow = \overline{0}_{V/W}}} + a_{m+1} \overline{v_{m+1}} + \dots + a_n \overline{v_n}$$

$$= a_{m+1} \overline{v_{m+1}} + \dots + a_n \overline{v_n} \Longrightarrow \{ \overline{v_{m+1}}, \dots, \overline{v_n} \} \text{ es s.g. (Luego, es base)}$$

Las soluciones del sistema

$x_1 + x_2 - x_5 = 0$ → sistema homogénea

$(*) \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$

que dan ... soluciones

Son las variables que parametrizamos (las independientes)

que dan valor a las otras dos (las dependientes)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0 \Longrightarrow w_1 = (0,0,1,0,0) \in W$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow w_2 = (1/2,\ 1/2,\ 0,\ 1,\ 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow w_3 = (0,1,0,0,1)$$

$\longrightarrow$ w_1, w_2 y w_3 son l.i.

$$\{w_1, w_2, w_3\} = B_W$$

aún no sabemos cuáles son (de momento son arbitrarios)

$$B_{V/W} = \{\overline{v_4}, \overline{v_5}\} \qquad \text{donde } \{\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}, \overline{v_4}, \overline{v_5}\} \text{ es base de } \mathbb{R}^5$$

lo más sencillo suele ser ampliar con vectores de la base canónica

$$\boxed{\begin{array}{l} v_4 = e_1 \\ v_5 = e_2 \end{array}}$$

$$\underset{\dim 5}{\mathbb{R}^5} = \underset{\dim 3}{W} \oplus \underset{\dim 2}{U}$$

complemento directo

$$U = L(e_1, e_2)$$

Los vectores añadidos a la base de un subespacio para extenderla a la del espacio vectorial forman base del espacio cociente y dan lugar al complemento directo del subespacio.