Tema 10: Espacio afín euclídeo

$\dim_{\mathbb{R}} V = n$

(A, V, φ) espacio afín, $\varphi(p,q) = \overrightarrow{pq}$

Añadimos $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ producto escalar.

Tenemos (A, V, φ, f) espacio afín euclídeo.

Definición (Distancia entre dos puntos)

$p, q \in A$: Llamamos distancia entre dos puntos a $d(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\| \in \mathbb{R}$

Proposición

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } d(p,q) \geq 0 \text{ y } d(p,q) = 0 \iff p = q \\ \text{ii) } d(p,q) = d(q,p) \\ \text{iii) } d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,p) \end{array}\right\} \text{Espacio métrico}$$

Dem iii):

$d(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\| = \|\overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq}\| \leq \|\overrightarrow{pr}\| + \|\overrightarrow{rq}\| = d(p,r) + d(r,q)$

$A \neq \emptyset$: $d: A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$

Teorema de Pitágoras

$\overrightarrow{p_0p_1} \perp \overrightarrow{p_0p_2} \implies \|\overrightarrow{p_1p_2}\|^2 = \|\overrightarrow{p_0p_1}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0p_2}\|^2$

$= f(\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_1}) + f(\overrightarrow{p_0p_2}, \overrightarrow{p_0p_2}) = \|\overrightarrow{p_0p_1}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0p_2}\|^2$

OBS

$\{p\} \cap \{q\} \neq \emptyset \iff p = q \iff d(p,q) = 0$

Definición (Distancia de un punto a una variedad)

Sea $p \in A$, $X \subseteq A$, X variedad

Definimos $d(p,X) = \inf\{d(p,q),\ q \in X\} \geq 0$

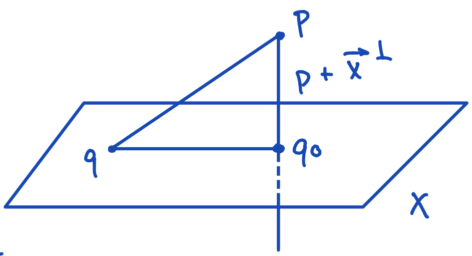
Teorema

$d(p,X) = d(p,q_0)$, para algún $q_0 \in X$.

Es decir, $d(p,X) = \underline{\min}\{d(p,q),\ q \in X\} \geq 0$

Dem.

$V = \vec{X} \oplus \vec{X}^{\perp}$



Consideramos proyección ortogonal...

OBS

$p \in X \iff d(p,X) = 0 \iff p = q_0$

Definición

$d(X,Y) = \inf\{d(p,q),\ p \in X, q \in Y\} \geq 0$

Teorema

$X \cap Y \neq \emptyset \iff d(X,Y) = 0 \iff d(p_0,q_0) = 0 \iff p_0 = q_0$

Referencias ortonormales

Sea $R = \{p_0, B\}$

Diremos que R es ortonormal si B es ortonormal.

Ej: $\mathbb{R}^n$ espacio afín, f producto escalar usual.

$R_c = \{(0, \ldots, 0), B_c\}$ es ortonormal

Matriz de cambio de referencias ortonormales

R y R' sistemas de referencia ortonormales.

$$M(R, R') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline a_1 & \\ \vdots & \boxed{M(B, B')} \\ a_n & \end{array}\right) \longrightarrow \text{ortogonal}$$

Recíprocamente, si la matriz de cambio es de este tipo, entonces es de cambio entre R y R' ortonormales.

(A, V, φ, f) e.a.e.

$\Updownarrow$

(V, f) e.v.e.

Definición (**Movimiento**)

Un movimiento de A es una aplicación afín $\phi: A \to A$ tal que $\vec{\phi}: V \to V$ es ortogonal.

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline a_1 & \\ \vdots & M_B(\vec{\phi}) \\ a_n & \end{array}\right)$$

Si R es ortonormal $\Rightarrow M_B(\vec{\phi})$ es ortogonal.

$\lambda \cdot \phi$ no está definida para $\lambda \in \mathbb{R}$

OBS

$\varnothing$ movimiento.

$$d(\varnothing(p),\varnothing(q))^2 = \|\overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)}\|^2 = f(\overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)},\overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)}) =$$

$$= f(\vec{\varnothing}(\vec{pq}),\vec{\varnothing}(\vec{pq})) \underset{\uparrow\ \vec{\varnothing}\text{ ortogonal}}{=} f(\vec{pq},\vec{pq}) = \|\vec{pq}\|^2 = d(p,q)^2$$

Por esto, los movimientos también se conocen como isometrías.

Recíprocamente, si $\varnothing : A \to A$ es una aplicación y conserva las distancias

$\Longrightarrow$ $\varnothing$ es movimiento

Ej: $\varnothing : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$M_{R_c}(\varnothing) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \varnothing \text{ afín}$$

Veamos $\varnothing$ movimiento

$M_{B_c}(\vec{\varnothing}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ es ortogonal $\Longrightarrow$ $\varnothing$ movimiento

$\det(\vec{\varnothing}) = 1 \Longrightarrow \vec{\varnothing} \in O^+(2) \Longrightarrow \varnothing$ es un movimiento directo

$$1 \notin \sigma(\vec{\varnothing}) \Longrightarrow A_{\varnothing} = \{p_0\} : \begin{cases} \left(\frac{4}{5} - 1\right)x + \frac{3}{5}y = 0 \\ -1 - \frac{3}{5}x + \left(\frac{4}{5} - 1\right)y = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \exists\, R = \{p_0, B = \{v_1, v_2\}\}$ ortonormal tal que

$$M_R(\varnothing) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \underset{\parallel}{\operatorname{sen}\theta} & \cos\theta \end{array}\right) \neq 4/5$$

Ej:

$$M_{R_C}(\phi) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_C}(\vec{\phi}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ es ortogonal } \Longrightarrow \vec{\phi} \in O(3)$$

$$\det(\vec{\phi}) < 0 \Longrightarrow \det(\vec{\phi}) = -1 \Longrightarrow \vec{\phi} \in O^{-}(3) \Longrightarrow \phi \text{ movimiento}$$

$$\Longrightarrow \exists B \text{ base tal que } M_B(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

$$tr(\vec{\phi}) = 1 = -1 + 2c \Longrightarrow c = 1 \Longrightarrow s = 0 \Longrightarrow M_B(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ simetría especular}$$

ϕ será una simetría especular si hay puntos fijos.

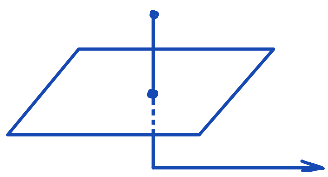
$$A_\phi : \begin{cases} 1 - x - y + 2z = 0 \\ 1 - x - y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \Longrightarrow A_\phi = \emptyset \Longrightarrow \vec{\phi} \text{ es simetría ortogonal, pero}$$

ϕ no es simetría (es simetría con desplazamiento)

$O = (0,0,0)_{R_C}$

$$R = \{O, B\},\quad M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Traslación}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Simetría}}$$

$$= M_R(\phi_2 \circ \phi_1)$$



$$V_{\vec{\phi},1} \text{ (en } B_C) : \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \Longrightarrow V_{\vec{\phi},1} : x + y - 2z = 0$$

$$M_R(\varnothing) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_R(\varnothing_2)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_R(\varnothing_1)}$$

$\varnothing_1$ es simetría ortogonal respecto del plano $A_{\varnothing_1}$

$$\underset{(\text{en } R)}{A_{\varnothing_1}} : \left\{ \begin{array}{l} a_1 - 2x = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow A_{\varnothing_1} : 2x = a_1$$

$$\overrightarrow{A_{\varnothing_1}} : x = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{A_{\varnothing_1}} = L(v_2, v_3)$$

$$p_0 = O + \frac{a_1}{2} v_1 = (0,0,0)_{Rc} + \frac{a_1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3)\right) = \left(\frac{a_1}{2\sqrt{6}}, \frac{a_1}{2\sqrt{6}}, -\frac{a_1}{\sqrt{6}}\right)_{Rc} \in A_\varnothing$$

Ej: $\varnothing : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$M_{Rc}(\varnothing) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{Bc}(\vec{\varnothing}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot C = A$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) Los vectores son unitarios} \\ \text{2) Los vectores son ortogonales 2 a 2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{\varnothing} \in O(4)$$

$$C^2 = 4 I_4 \Longrightarrow A^2 = I_4 \Longrightarrow q_{\vec{\varnothing}} = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$\Longrightarrow \vec{\varnothing} \text{ diagonalizable}, \ \sigma(\vec{\varnothing}) = \{1, -1\}, \ p_{\vec{\varnothing}} = (x-1)^a (x+1)^b, \ a+b=4$$

$$V_{\vec{\varnothing}, -1} = L(e_1 - e_2 - e_3 + e_4)$$

$$\Longrightarrow v_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4)$$

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_4)$, $v_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4)$ (ortogonales 2 a 2)

$B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$M_B(\vec{\varnothing}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{\varnothing} \text{ simetría ortogonal con base hiperplano } L(v_2, v_3, v_4)$$

$\vec{\varnothing} \in O^-(4)$

$$A_\varnothing : \begin{cases} -x + y + z - t = 0 \\ 2 + x - y - z + t = 0 \\ \vdots \end{cases} \Longrightarrow A_\varnothing = \varnothing$$

$R = \{0, B\}$

$$M_R(\varnothing) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{0\varnothing(0)} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4$

$= e_2 + e_3$

$$M_R(\varnothing) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ a_2 & & I_4 & & \\ a_3 & & & & \\ a_4 & & & & \end{array}\right)}_{\varnothing_2 \text{ traslación}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\varnothing_1 \text{ simetría ortogonal}}$$

Clasificación de movimientos en el plano

$\phi : A \longrightarrow A$ movimiento, A espacio euclídeo de dimensión 2

- $\vec{\phi} \in O^+(V)$: - $A_\phi \neq \emptyset \Longrightarrow M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $R = \{p_0, B\}$, B ortonormal

$\Longrightarrow \phi$ giro de centro p_0 y ángulo θ.

Si $\theta = 0 \Longrightarrow \phi = id_A$

Si $0 < \theta \leq \pi \Longrightarrow A_\phi = \{p_0\}$. Si $\theta = \pi \Longrightarrow \phi$ simetría central

- $A_\phi = \emptyset \Longrightarrow M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & c & -s \\ a_2 & s & c \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & \multicolumn{2}{c}{I_4} \\ a_2 & & \end{array}\right)}_{\phi_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}}_{\phi_1}$

$\phi = \phi_2 \circ \phi_1$, ϕ_1 giro, ϕ_2 traslación

Si $c = 1 \Longrightarrow \phi$ traslación, $(a_1, a_2) \neq (0,0)$

- $\vec{\phi} \in O^-(V)$: - $A_\phi \neq \emptyset \Longrightarrow M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$, $R = \{p_0, B\}$, B ortonormal

ϕ simetría ortogonal axial, base $p_0 + L(v_1)$, dirección $L(v_2)$

- $A_\phi = \emptyset \Longrightarrow M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & -1 \end{array}\right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & \multicolumn{2}{c}{I_2} \\ 0 & & \end{array}\right)}_{\phi_2} \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & -1 \end{array}\right)}_{\phi_1}$

$\phi = \phi_2 \circ \phi_1$, ϕ_1 simetría axial ortogonal, ϕ_2 traslación

$\Longrightarrow \phi$ simetría con desplazamiento

Clasificación de cónicas en el plano

$\mathbb{R}^2$ espacio afín euclídeo usual.

$$p=(x,y)_R \in C \iff 0 = a_{11}x^2 + \dots + a_{00} = (1\ x\ y)\ A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix},\ A = M_R(C)$$

R ortonormal

$C \equiv C'$ (afín-euclídeamente equivalentes) $\iff M_R(C) = M_{R'}(C')$, R y R' ortonormales

Teorema

Toda cónica de $\mathbb{R}^2$ es afín-euclídeamente equivalente a una y solo una de las siguientes:

i) $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,\quad 0 < a \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}$ ≡ Elipse no degenerada ($a = b \rightarrow$ Circunferencia)

ii) $C: x^2 + y^2 = 0$ ≡ Elipse degenerada

iii) $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,\quad 0 < a \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}$ ≡ Hipérbola no degenerada ($a = b \rightarrow$ Hipérbola equilátera)

iv) $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,\quad 0 < a \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}$ ≡ Hipérbola degenerada (a y b determinan ángulo de rectas secantes)

v) $C: x^2 - ay = 0,\ a > 0$ ≡ Parábola no degenerada

vi) $C: x^2 - a^2 = 0,\ a \neq 0$ ≡ Parábola simplemente degenerada

vii) $C: x^2 = 0$ ≡ Parábola doblemente degenerada

Dem.

En R ortonormal: $0 = a_{11}x^2 + \dots + a_{00} = (x\ y)\ A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{01}\ a_{02}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00}$

$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R})$ simétrica

$R = \{p_0, B\}$, B ortonormal

$$\Rightarrow C: 0 = (x \;\; y)\, P^t A_0' \, P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\,(a_{01} \;\; a_{02}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00}$$

$$= (x' \;\; y')\, A_0' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\,(a_{01} \;\; a_{02})\, P^t \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \overset{\shortparallel}{a_{00}'}$$

$$= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_{01}' x' + 2a_{02}' y' + a_{00}'$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$

Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 \leq 0$, multiplicando por -1:

$0 > t = \lambda_1 + \lambda_2 = tr(A_0) \Rightarrow p_{A_0} = x^2 - tx + d$

$0 < -t = \mu_1 + \mu_2 = tr(-A_0) \Rightarrow p_{A_0} = x^2 + tx + d$

$\Rightarrow$ Podemos suponer que alguno es positivo

Supongamos $\lambda_1 > 0$:

- $\lambda_2 > 0$: $0 = \lambda_1 (x' + \lambda_1^{-1} a_{01})^2 + \lambda_2 (y' + \lambda_2^{-1} a_{02})^2 + a_{00}''$

$$= \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_{00}''$$

  - $a_{00}'' > 0 \Rightarrow C$ no es cónica
  - $a_{00}'' = 0 \Rightarrow x'' = y'' = 0 \Rightarrow$ Elipse degenerada
  - $a_{00}'' < 0 \Rightarrow \dfrac{x''^2}{\frac{-a_{00}''}{\lambda_1}} + \dfrac{y''^2}{\frac{-a_{00}''}{\lambda_2}} - 1 = \dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow$ Elipse no degenerada

Ej: $C: 0 = 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y + 2 = (x \;\; y)\, A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4x + 4y + 2$

$A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = M_{B_c}(\vec{\varphi})$, $\vec{\varphi}$ autoadjunto

$p_{A_0} = x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$

$\Rightarrow \sigma(A_0) = \{2, 8\}$

$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $|P| = 1 \Rightarrow M(B', B_c) = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

20/05/2021

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\ } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad P = M_{Bc}(\vec{\varnothing}), \quad \vec{\varnothing}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\varnothing} \text{ ortogonal}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' + y' \\ -x' + y' \end{pmatrix}$$

$$C: 0 = (x \;\; y) P^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-4 \;\; 4) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2$$

$$= 2x'^2 + 8y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (-4 \;\; 4) \begin{pmatrix} x' + y' \\ -x' + y' \end{pmatrix} + 2$$

$$= 2x'^2 + 8y'^2 - \frac{8x'}{\sqrt{2}} + 2 = 2\left(x' - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8y'^2 + 2 - 2 \cdot \frac{16}{2}$$

$$= 2x'^2 + 8y'^2 - 14$$

$$\Rightarrow C: \frac{x'^2}{\frac{14}{2}} + \frac{y'^2}{\frac{14}{8}} = 1 \quad \Rightarrow C: \frac{x'^2}{(\sqrt{7})^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -4/\sqrt{2} & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{I_2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

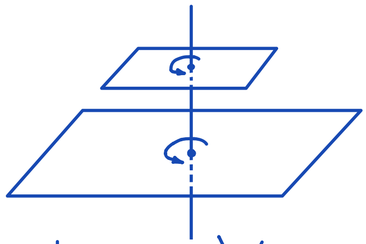
Movimiento con puntos fijos seguido de traslación.

Clasificación momimientos en $\mathbb{R}^3$

$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ movimiento

- $\vec{\phi} \in O^+(3)$: $- A_\phi \neq \emptyset \Longrightarrow M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{array}\right)$, $c = \cos\theta$, $s = \operatorname{sen}\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$

$R = \{p_0, B\}$



ϕ rotación de eje $p_0 + L(v_1)$ y ángulo θ

Si $\theta = \pi \Longrightarrow \phi$ simetría axial

$- A_\phi = \emptyset \Longrightarrow M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & c & -s \\ a_3 & 0 & s & c \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ 0 & & I_3 & \\ 0 & & & \end{array}\right)}_{\substack{\phi_2 \\ a_1 \neq 0}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & c & -s \\ a_3 & 0 & s & c \end{pmatrix}}_{\substack{\phi_1 \\ A_{\phi_1} \neq \emptyset}}$

ϕ_2 traslación de vector $a_1 v_1$, ϕ_1 rotación

ϕ rotación seguida de traslación de vector del eje de la rotación.

(ϕ movimiento helicoidal)

$O^+(3)$ son rotaciones, traslaciones y composición de ellos.

- $\vec{\phi} \in O^-(3)$: $- A_\phi \neq \emptyset \Longrightarrow M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{array}\right)$

ϕ rotación compuesta con simetría especular respecto de un plano ortogonal al eje de la rotación.

$- A_\phi = \emptyset \Longrightarrow 1 \in \sigma(\vec{\phi}), -1 \in \sigma(\vec{\phi}) \Longrightarrow \sigma(\vec{\phi}) = \{-1, 1, 1\}$

$\Longrightarrow M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right. = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ a_2 & & I_3 & \end{array}\right. \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right.$

Cuádricas de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ e.a.e. usual. , $\mathcal{R}$ referencia ortonormal

$$\emptyset \neq Q = \{ p = (x, y, z)_{\mathcal{R}} : \underbrace{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz}_{\neq 0} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0 \}$$

$$p = (x, y, z) \in Q \iff 0 = (1\ x\ y\ z)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = M_{\mathcal{R}}(Q)$$

$P = M(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ ortogonal, $\mathcal{R}'$ ortonormal , $P^t = P^{-1}$

$$A = P^t A' P$$

$$\Longrightarrow 0 = (1\ x\ y\ z)\, P^t A' P \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1\ x'\ y'\ z')\, A' \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ \hline a_{01} & & & \\ a_{02} & & A_0 & \\ a_{03} & & & \end{array}\right) \Longrightarrow 0 = (x\ y\ z)\, A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(a_{01}\ a_{02}\ a_{03}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{00}$$

Dos cuádricas Q y Q' son afínmente equivalentes $\iff M_{\mathcal{R}}(Q) = M_{\mathcal{R}'}(Q')$ (es relación de equivalencia).

Si estamos en el espacio afín euclídeo y $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son ortonormales $\Longrightarrow$ Q y Q' son afín-euclídeamente equivalentes.

Teorema

Toda cuádrica de $\mathbb{R}^3$ es afín-euclídeamente equivalente a una y solo una de las siguientes:

xiv) $x^2 + y^2 = 0$ (en C ... sí serían ...)

$r = rg(A)$, $r_0 = rg(A_0)$, $\delta = |s-t|$, $\delta_0 = |s_0 - t_0|$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{E}(A) = (s,t) \qquad \mathcal{E}(A_0) = (s_0, t_0)$

Problema:

$Q : 0 = 2xy - 4xy + y^2 - 2yz + y$

Encontrar la única cuádrica canónica afín-euclídeamente equivalente a través de un movimiento directo y de otro inverso.

<u>OBS</u>

Cilindro parabólico

$\lambda x^2 + ax + by + cz + d = 0 \qquad \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\lambda x^2 + \alpha y + \beta z + \gamma = 0$ Queremos sacar una sola variable a partir de dos a través de un movimiento.

$$\begin{cases} y = cy' - sz' \\ z = sy' + cz' \end{cases} \qquad \alpha y + \beta z = (\alpha c + \beta s) y' + (-\alpha s + \beta c) z'$$

$$\alpha y + \beta z = (\alpha c + \beta s) y'$$

$$\Rightarrow -\alpha s + \beta c = 0 \Rightarrow \alpha s = \beta c \Rightarrow \alpha^2 s^2 = \beta^2 c^2 \Rightarrow \alpha^2 (1 - c^2) = \beta^2 c^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha^2 c^2 = \beta^2 c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \Rightarrow c = \cos\theta = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\rightsquigarrow \lambda x^2 + 2ky + h = 0 \Rightarrow \frac{\lambda x^2}{k} + \frac{2ky}{k} + \frac{h}{k} = 0$$