

TEMA 4:

GESTIÓN DE INVENTARIOS:

DEMANDA INDEPENDIENTE

(II)

TEMA 4: GESTIÓN DE INVENTARIOS: DEMANDA INDEPENDIENTE (II)

4.1. Modelos probabilistas

4.2. Artículos con demanda aleatoria

4.3. Artículos con tiempo de suministro aleatorio

4.4. Artículos con demanda y tiempo de suministro
aleatorios

4.5. Modelo del vendedor de periódicos

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

La DEMANDA y/o el TIEMPO DE SUMINISTRO no son conocidos con certeza (variables aleatorias)

PROBLEMA

Rotura de stocks

SOLUCIÓN

Crear stock de seguridad (SS)

PROBLEMA

Calcular el stock de seguridad

SOLUCIÓN

Definir el nivel de servicio

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

- Esa incertidumbre puede no ser total (las fluctuaciones tendrán una estructura que puede ser descrita por una distribución de probabilidad)
- Si la variabilidad de alguna magnitud aleatoria es pequeña, se puede recurrir a valores representativos de dichas variables aleatorias (media, mediana, moda)
- **Stock de seguridad:** ofrece protección frente a roturas de stock cuando los valores reales de demanda y tiempo de suministro son superiores a lo esperado
- **Nivel de servicio:** % de veces que la demanda es satisfecha en el momento en que se produce (cociente entre el número de ciclos sin rotura de stock y el número total de ciclos de inventario)
- **Riesgo de rotura:** complementario al nivel de servicio

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

TIPOS

- Modelo con **demanda aleatoria** y tiempo de suministro constante
- Modelo con demanda constante y **tiempo de suministro aleatorio**
- Modelo con **demanda y tiempo de suministro aleatorios**
- Modelo del **vendedor de periódicos**

CARACTERÍSTICAS COMUNES

- Debe **calcularse un stock de seguridad (SS)**, para que la probabilidad de rotura se corresponda con el nivel de servicio fijado
- **Trade off** entre protección y coste de almacenamiento
- En general habrá que calcular el **cuantil** de una variable aleatoria.

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

CUANTILES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

- Sea D_{TS} la variable aleatoria **demanda durante el tiempo de suministro**, C un valor concreto de esa variable y OC una probabilidad (está entre 0 y 1). Si se tiene que:

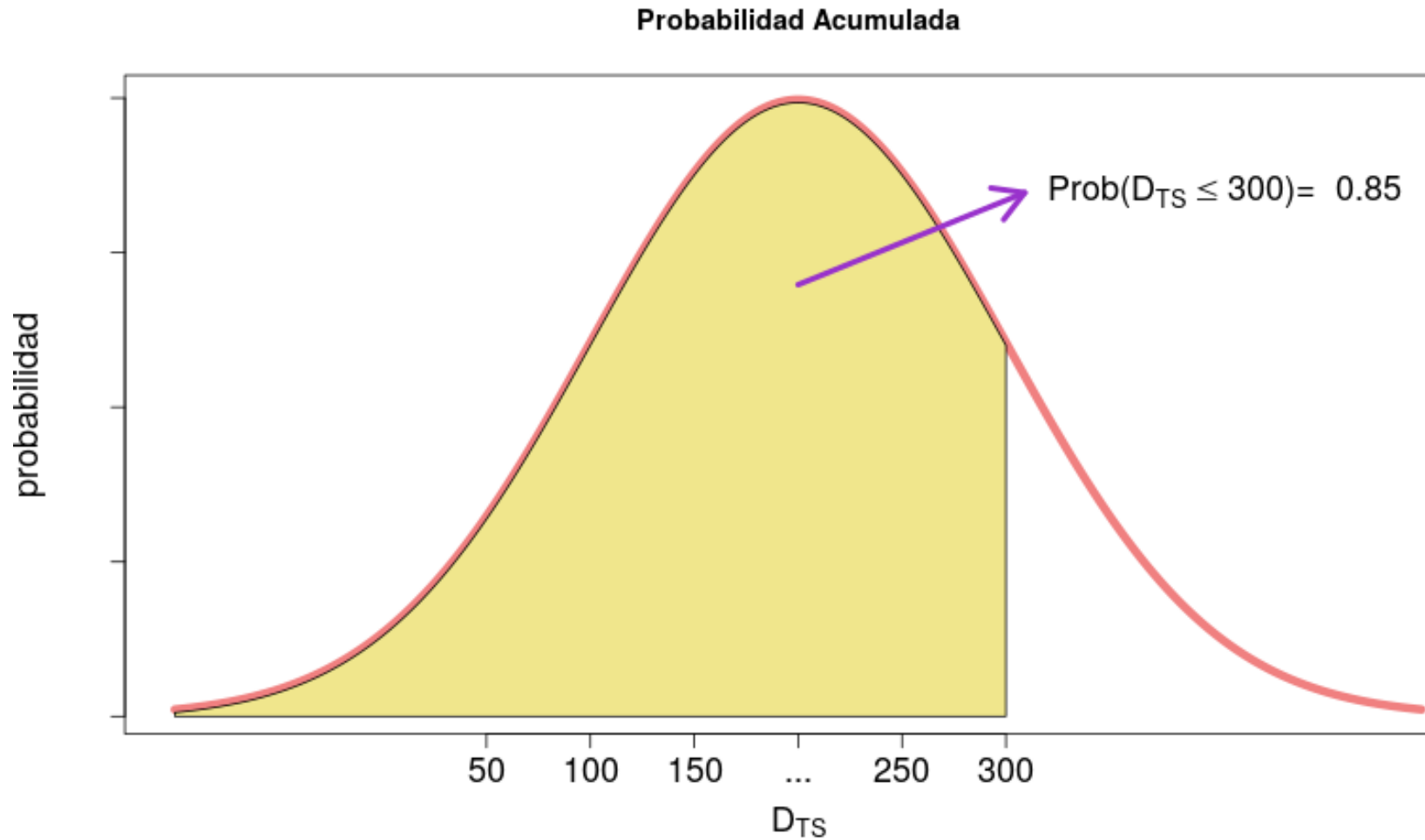
$$Prob(D_{TS} \leq C) = OC$$

entonces **C es el cuantil de orden OC de la v. aleatoria D_{TS} .**

- Un cuantil es el valor de la v. aleatoria al que le corresponde una probabilidad acumulada OC (el orden del cuantil).
- Si $Prob(D_{TS} \leq 300) = 0,85$ quiere decir que D_{TS} es menor o igual a 300 el 85% de las ocasiones (300 es el cuantil de orden 0,85, o percentil 85, de D_{TS}).

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

CUANTILES DE UNA VARIABLE ALEATORIA



4.1. MODELOS PROBABILISTAS

CUANTILES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

- Se puede conocer el valor de C y tener que calcular OC , o conocer OC y tener que calcular C .
- Para la variable aleatoria normal estándar (z) [$N(0, 1)$], estos valores se obtienen directamente de la tabla de probabilidades acumuladas.
- Para otra variable aleatoria normal que no sea estándar habrá que estandarizarla primero
- Si p. ej. tenemos la variable aleatoria D_{TS} y queremos calcular su cuantil de orden 0.85, al que denominamos D_{TS85} , habrá que estandarizar D_{TS} , restando su media μ , y dividiendo por su desviación típica σ

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

CUANTILES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

- Para ello, se estandariza D_{TS} : $\frac{D_{TS} - \mu}{\sigma} = z$.
- Eso implica que $\frac{D_{TS85} - \mu}{\sigma} = z_{85}$.
- El valor de z_{85} se obtiene de tablas:
 - El **orden del cuantil** ($OC = 0,85$ en este ejemplo) está en el interior de la tabla
 - El **cuantil** ($C = z_{85} = 1,04$) está en los márgenes de la tabla
- Una vez conocido z_{85} se puede despejar para obtener D_{TS85} :
$$D_{TS85} = \mu + z_{85} \times \sigma.$$

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

z_c	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922

Cuantil ($z_{85} = 1.04$)

Orden del
cuantil (0.85)

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

En un modelo de cantidad fija de pedido EOQ, con demanda por unidad de tiempo D y tiempo de suministro T_S :

- El punto de pedido será la demanda o consumo durante el tiempo de suministro (D_{TS}): $P_p = D_{TS} = D \times T_S$.
- Si D y/o T_S son variables aleatorias resultará que D_{TS} también es una variable aleatoria, que se suele asumir que sigue una distribución de probabilidad normal: $D_{TS} \sim N(\mu, \sigma)$
- Se podría tomar como punto de pedido la demanda media durante el tiempo de suministro: $P_p = \mu$
- En tal caso, la mitad de las ocasiones se tendría que $D_{TS} > \mu$ y habría rotura de stock (el **nivel de servicio** sería del 50%).

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

- Se fija un determinado **nivel de servicio**, k , p. ej del 85%.
- Al inventario se le añade un **stock de seguridad** (SS) que permite alcanzar dicho nivel de servicio.
- Eso equivale a hacer el pedido, no cuando quedan μ unidades, sino antes, cuando quedan $P_p = \mu + SS$.
- Se debe cumplir que la demanda durante el tiempo de suministro (D_{TS}) sea menor o igual a ese valor de P_p el 85% de las ocasiones:

$$Prob(D_{TS} \leq P_p) = 0,85$$

- Eso significa que P_p es el **cuantil de orden 0,85**, o el percentil 85, de la variable aleatoria D_{TS} (también denominado D_{TS85}).

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

➤ Entonces:

$$P_p = \mu + SS = D_{TS85}$$

- Para calcular P_p y SS hay que conocer D_{TS85} , que se puede obtener de la tabla de las probabilidades acumuladas de la distribución de dicha variable aleatoria.
- Sin embargo la tabla contiene los cuantiles de la variable aleatoria **normal estándar** z [la que tiene $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, es decir, la $N(0, 1)$].
- Habrá que **estandarizar o tipificar** D_{TS} (restándole su media y dividiendo por su desviación típica):

$$\frac{D_{TS} - \mu}{\sigma} = z$$

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

- Eso significa que $\frac{D_{TS85} - \mu}{\sigma} = z_{85}$, y despejando D_{TS85} :

$$P_p = D_{TS85} = \mu + z_{85} \times \sigma$$

- Como $P_p = \mu + SS$ se tiene que:

$$SS = z_{85} \times \sigma$$

- Estas expresiones son válidas en los tres modelos mencionados (todos ellos son modelos de **cantidad fija de pedido** y con **revisión continua**):
 - Modelo con demanda aleatoria y tiempo de suministro constante
 - Modelo con demanda constante y tiempo de suministro aleatorio
 - Modelo con demanda y tiempo de suministro aleatorios
- Lo que cambia en cada caso es la forma de calcular μ y σ .

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

- Las **unidades** de medida de las variables son importantes
- Como $D_{TS} = D \times T_S$, entonces **D y T_S deben estar expresadas en las mismas unidades.**
- P. ej., si D es la demanda semanal, T_S deberá estar expresado en semanas, si D es diaria, T_S estará en días, etc.
- Si **D o T_S son variables aleatorias** y se quiere cambiar sus unidades es necesario ser cuidadoso, ya que **cambiarán su media y su desviación típica.**
- Para **cambiar las unidades de T_S** se multiplican tanto la media como la desviación típica por el mismo factor.
- P. ej. si el tiempo de suministro expresado en semanas es $T_S \sim N(4, 1)$, en días será $T_S \sim N(4 \times 7, 1 \times 7)$.

4.1. MODELOS PROBABILISTAS

- **Cambiar las unidades de D es más complejo**, ya que p. ej. la demanda durante un mes de 30 días es la suma de las demandas de cada día, demandas que se consideran variables aleatorias independientes.
- Al sumar variables aleatorias independientes se suman sus varianzas, no sus desviaciones típicas.
- Eso significa que **para cambiar las unidades de D** se multiplica su media por un factor, pero se multiplica su desviación típica **por la raíz cuadrada** de ese factor.
- Por ejemplo, si la demanda diaria es $D_{diaria} \sim N(10, 2)$, entonces la demanda mensual (para un mes de 30 días) será $D_{mensual} \sim N(10 \times 30, 2 \times \sqrt{30})$.

MODELOS PROBABILISTAS

TIPOS

- Modelo con **demanda aleatoria** y tiempo de suministro constante
- Modelo con demanda constante y **tiempo de suministro aleatorio**
- Modelo con **demanda y tiempo de suministro aleatorios**
- Modelo del **vendedor de periódicos**

CARACTERÍSTICAS COMUNES (3 primeros modelos)

- Debe calcularse un stock de seguridad (SS), que garantiza un nivel de servicio k :

$$SS = z_k \times \sigma$$

- El punto de pedido será:

$$P_p = \mu + SS$$

4.2. ARTÍCULOS CON DEMANDA ALEATORIA

➤ Supongamos que:

- la demanda por unidad de tiempo es una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad normal, $D \sim N(\mu_D, \sigma_D)$
- el tiempo de suministro, T_S , es constante

➤ Entonces, la demanda durante el tiempo de suministro, $D_{TS} = D \times T_S$, será una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad normal:

$$D_{TS} \sim N(\mu_D \cdot T_S, \sigma_D \cdot \sqrt{T_S})$$

➤ Es decir, para D_{TS} se tiene que $\mu = \mu_D \cdot T_S$ y que $\sigma = \sigma_D \cdot \sqrt{T_S}$

4.2. ARTÍCULOS CON DEMANDA ALEATORIA

EJEMPLO

Una farmacia compra cajas de aspirinas a un proveedor que se las envía con un tiempo de suministro que se puede considerar fijo y de valor 7 días. Durante el invierno, la demanda de aspirinas de la farmacia es elevada, pero sujeta a una considerable variabilidad. Tras algunos cálculos se ha comprobado que la demanda diaria sigue una distribución aproximadamente normal de media 35 cajas y desviación típica 15 cajas.

Se usa un modelo EOQ con revisión continua del inventario y se ha decidido mantener un stock de seguridad que garantice un nivel de servicio del 99,5%.

Calcular:

1. El valor de la demanda que sólo se supera el 2% de los días
2. El stock de seguridad y el punto de pedido.

4.3. ARTÍCULOS CON TIEMPO DE SUMINISTRO ALEATORIO

- Supongamos que:
 - la demanda por unidad de tiempo, D , es constante.
 - el tiempo de suministro, T_S , es una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad normal, $T_S \sim N(\mu_{TS}, \sigma_{TS})$.
- Entonces, la demanda durante el tiempo de suministro, $D_{TS} = D \times T_S$, será una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad normal:
$$D_{TS} \sim N(D \cdot \mu_{TS}, D \cdot \sigma_{TS})$$
- Es decir, para D_{TS} se tiene que $\mu = D \cdot \mu_{TS}$ y que $\sigma = D \cdot \sigma_{TS}$

4.3. ARTÍCULOS CON TIEMPO DE SUMINISTRO ALEATORIO

EJEMPLO

Un fabricante de microcontroladores industriales utiliza unas memorias RAM de gran calidad que adquiere a un proveedor de Taiwan. El tiempo de suministro de las memorias sigue una variable aleatoria normal de media 25 días y desviación típica 15 días. Las necesidades anuales se pueden considerar constantes y son de 12.000 uds/año. El coste de realizar cada pedido es de 3.000€. Comprar cada memoria cuesta 50€ y almacenarla durante un año 20€/ud. Se considera que el año tiene 300 días hábiles. Se usa un modelo EOQ para la gestión del stock de memorias, pero con un stock de seguridad que asegure un nivel del servicio del 98%. Se desea averiguar:

1. El tamaño económico del pedido según el modelo EOQ
2. La probabilidad de que el tiempo de suministro sea menor o igual a 30 días
3. El tamaño del stock de seguridad y el punto de pedido

4.4. ARTÍCULOS CON DEMANDA Y TIEMPO DE SUMINISTRO ALEATORIOS

➤ Supongamos que:

- la demanda por unidad de tiempo, D , es una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad de media μ_D y desviación típica σ_D .
- el tiempo de suministro, T_S , es una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad de media μ_{TS} y desviación típica σ_{TS} .

➤ Entonces, la demanda durante el tiempo de suministro, $D_{TS} = D \times T_S$, suele **aproximarse** a una variable aleatoria que sigue una **distribución de probabilidad normal**:

$$D_{TS} \sim N \left(\mu_D \cdot \mu_{TS}, \sqrt{\sigma_D^2 \cdot \mu_{TS} + \mu_D^2 \cdot \sigma_{TS}^2} \right)$$

➤ Es decir, para D_{TS} se tiene que $\mu = \mu_D \cdot \mu_{TS}$ y $\sigma = \sqrt{\sigma_D^2 \cdot \mu_{TS} + \mu_D^2 \cdot \sigma_{TS}^2}$

4.4. ARTÍCULOS CON DEMANDA Y TIEMPO DE SUMINISTRO ALEATORIOS

EJEMPLO

La sección de alimentos gourmet de un centro comercial tiene entre sus productos estrella unos loncheados de jamón de bellota de la marca “Jaimito”, conocida por la altísima calidad de sus productos. La demanda semanal de los loncheados se ha calculado que sigue una distribución normal, con una media de 80 unidades y una desviación típica de 25 unidades. Al tratarse de un producto tan exclusivo, el tiempo de suministro también es aleatorio, ya que la producción de gorrinos viene condicionada por los ritmos de la madre naturaleza, y no siempre se va a disponer de producto en el momento concreto en que se desea. Se ha estimado que ese tiempo de suministro tiene una media de 6 semanas con una desviación típica de 2 semanas (las semanas son de 5 días hábiles). Se pretende mantener un cierto nivel de stock de seguridad que permita ofrecer un nivel de servicio del 80%. Calcular el tamaño del stock de seguridad y el punto de pedido.

TABLA RESUMEN DE LOS MODELOS PROBABILISTAS

	DEMANDA POR UNIDAD DE TIEMPO (D)	TIEMPO DE SUMINISTRO (T _S)	DEMANDA DURANTE EL TIEMPO DE SUMINISTRO (D _{TS})
D aleatoria y T _S constante	$D \sim N(\mu_D, \sigma_D)$	T _S constante	$D_{TS} \sim N(\mu_D \cdot T_S, \sigma_D \cdot \sqrt{T_S})$
D constante y T _S aleatorio	D constante	$T_S \sim N(\mu_{TS}, \sigma_{TS})$	$D_{TS} \sim N(D \cdot \mu_{TS}, D \cdot \sigma_{TS})$
D y T _S aleatorios	$E(D) = \mu_D$ $var(D) = \sigma_D^2$	$E(T_S) = \mu_{TS}$ $var(T_S) = \sigma_{TS}^2$	$D_{TS} \sim N\left(\mu_D \cdot \mu_{TS}, \sqrt{\sigma_D^2 \cdot \mu_{TS} + \mu_D^2 \cdot \sigma_{TS}^2}\right)$

Los dos primeros modelos son casos particulares del tercero:

- Si la demanda es constante se tiene que $\mu_D = D$ y $\sigma_D = 0$
- Si el tiempo de suministro es constante se tiene que $\mu_{TS} = T_S$ y $\sigma_{TS} = 0$

4.5. MODELO DEL VENDEADOR DE PERIÓDICOS

- Existe una **demanda D** vinculada a un periodo concreto
- Habitual en **productos de temporada**
- Ejemplo típico del **vendedor de periódicos**: si compra pocos periódicos para vender el próximo día, perderá ventas; si compra demasiados, le sobrarán al final de la jornada
- La **demanda para el periodo** es una variable aleatoria que sigue una **distribución de probabilidad normal** $D \sim N(\mu, \sigma)$, y para intentar satisfacerla, se emitirá un **pedido de tamaño Q**:
 - Si **Q es muy pequeño** y la demanda real mayor, se generan **costes de oportunidad por ventas no realizadas**
 - Si **Q es muy grande** y la demanda real menor, se generan costes porque quedan **unidades sin vender**.

4.5. MODELO DEL VENDEDOR DE PERIÓDICOS

- c_u (coste de *under-buying*): **coste de oportunidad y pérdida de imagen** (precio de venta menos precio de adquisición)
- c_o (coste de *over-buying*): **coste del artículo comprado pero no vendido** (precio de adquisición menos su valor de liquidación)
- El coste total es una variable aleatoria, ya que depende de D , que también es variable aleatoria:
 - Si se compra de menos, Q es menor que D , entonces $CT = c_u \cdot (D - Q)$
 - Si se compra de más, Q es mayor que D , entonces $CT = c_o \cdot (Q - D)$
- Se busca determinar el tamaño óptimo del pedido, Q^* , que minimiza el coste total, CT .

4.5. MODELO DEL VENDEADOR DE PERIÓDICOS

CARACTERÍSTICAS

- Se define la **Ratio Crítica**: $RC = \frac{c_u}{c_o + c_u}$
- El tamaño del pedido que minimiza los costes totales es el valor Q^* que verifica que

$$Prob(D \leq Q^*) = \frac{c_u}{c_o + c_u}$$

- Es decir, que **Q^* será el cuantil de orden RC de la demanda D (D_{RC})**
- Para calcular $Q^* = D_{RC}$:
 - Se estandariza D: $\frac{D - \mu}{\sigma} = z$
 - Se busca en la tabla de las probabilidades acumuladas, el cuantil de orden RC de z: z_{RC}
 - Se tiene que $\frac{D_{RC} - \mu}{\sigma} = z_{RC}$, así que despejando resulta:

$$D_{RC} = \mu + z_{RC} \times \sigma$$

4.5. MODELO DEL VENDEDOR DE PERIÓDICOS

EJEMPLO

Una librería especializada en la venta de best-sellers y novelas de entretenimiento está planteándose el tamaño del pedido que hará a una editorial que va a lanzar de forma inminente un libro escrito por un famoso periodista en el que se cuentan cotilleos sobre ciertos miembros de una conocida casa real europea. La librería tiene en cuenta que, basándose en su experiencia pasada con obras similares, el libro se venderá con gran éxito durante un periodo de un mes desde su lanzamiento, y que pasado este plazo, los ejemplares sobrantes deberán ser vendidos a bajo precio en un mercadillo callejero. Estima además que la demanda total durante el mes en que se producirán las ventas seguirá una distribución normal de media 500 ejemplares y desviación típica 100 ejemplares.

El precio de venta de cada ejemplar será de 25€, el coste de adquirirlo a la editorial será de 15€ y el valor de liquidación de los ejemplares que se descarten al final del mes será de 3€.

Calcular cuál deberá ser el tamaño del pedido que se haga a la editorial para minimizar los costes (o maximizar los beneficios).

BIBLIOGRAFÍA

- Silver, E. A.; Pyke, D. F. y Thomas, D. J. (2017): *Inventory and Production Management in Supply Chains*. 4º edición. CRC Press, Boca Raton.
- Winston, W. L. (2005): *Investigación de Operaciones*. 4ª edición. Thomson, México DF

TEMA 4:
GESTIÓN DE INVENTARIOS:
DEMANDA INDEPENDIENTE
(II)