

TEMA 3. VARIABLE ALEATORIA

3.1. Introducción.

3.1.1. Distribución de Probabilidad de una variable aleatoria

3.1.2. Función de Distribución de una variable aleatoria

3.2. Variable aleatoria discreta

3.2.1. Función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta

3.2.2. Función de distribución de una variable aleatoria discreta

3.3. Variable Aleatoria Continua

3.3.1. Función de densidad de una variable aleatoria continua

3.3.2. Función de distribución de una variable aleatoria continua

3.4. Características de una variable aleatoria. Esperanza y Varianza

3.4.1. Esperanza Matemática de una variable aleatoria discreta

3.4.2. Esperanza Matemática de una variable aleatoria continua

3.4.3. Propiedades de la Esperanza

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.5. Independencia

❖ 3.1. Introducción

Necesidad de asociar a un suceso un número real

➤ **Definición.** Una variable aleatoria (v.a.) es una función que asocia a cada resultado del espacio muestral un número real

▪ **Ejemplo:** *Se realiza un experimento en un laboratorio cuyo resultado puede ser positivo o negativo. Construir el espacio muestral y dar una v.a. asociada al experimento.*

$$E = \{ \text{Positivo}, \text{Negativo} \} \quad \begin{cases} X(\text{Positivo}) = 1 \\ X(\text{Negativo}) = 0 \end{cases}$$

X es una variable aleatoria

➤ **Tipología:** V.a. discreta y v.a. continua

Discreta: Toma valores en un conjunto numerable

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

◆ Sucesos y ejemplos

A un suceso experimental se le asocia un número real a través de la variable aleatoria

■ Ejemplo. Experimento en un laboratorio

A : “el test da positivo” \longleftrightarrow **A** = $\{X = 1\}$

B : “el test da negativo” \longleftrightarrow **B** = $\{X = 0\}$

→ **A** \cup **B** : “dar positivo o negativo”

→ **A** \cup **B** : $\{X = 0, X = 1\} = E$

■ Ejemplo. X : “Bacterias de tipo A en una pipeta”

A : “número de bacterias entre 1000 y 1500”

A = $\{1000 < X < 1500\}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

◇ 3.1.1. Distribución de Probabilidad de una variable aleatoria

➤ La distribución de probabilidad de una v.a. es una función que asigna a cada valor posible de dicha v.a. una probabilidad

▪ **Ejemplo.** *Experimento en un laboratorio*

$$P\{X = 1\} = P\{\text{positivo}\}$$

▪ **Ejemplo.** *X : “Bacterias de tipo A en una pipeta”*

$$P\{1000 \leq X \leq 1500\} = P(\mathbf{A})$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow shadow is cast beneath the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

◆ 3.1.2. Función de Distribución de una variable aleatoria

➤ **Definición.** Función de Distribución de una variable aleatoria X

$$F(x) = P\{X \leq x\}; \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

◆ Es la probabilidad de que X sea menor o igual a x

❖ Propiedades de la Función de Distribución

✓ F es no decreciente

✓ F continua a la derecha

✓ $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$

Cartagena99

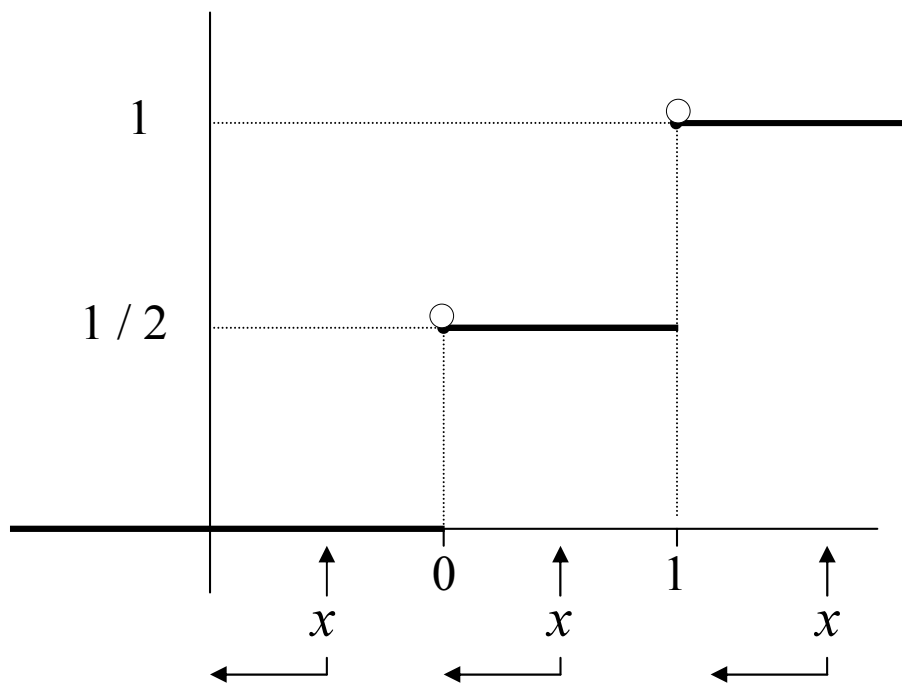
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

▪ **Ejemplo.** *Un experimento en un laboratorio*

$$P \{X = 0\} = P \{X = 1\} =$$

$$= P \{\text{Negativo}\} = P \{\text{Positivo}\} = 1/2$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1/2 & ; \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

❖ 3. 2. Variable aleatoria discreta

◆ Definición

X es una v.a. discreta si toma valores en un conjunto numerable $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots\}$

◆ 3.2.1. Función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta

✓ Sea X una v.a. discreta que toma los valores

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$$

La función masa de probabilidad se define como

$$\left. \begin{aligned} P\{X = x_i\} = p_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots \\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \end{aligned} \right\}$$

x_i	$P[X = x_i] = p_i$
-------	--------------------

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

◆ 3.2.2. Función de distribución de una variable aleatoria discreta

✓ Sea X una v.a. discreta que toma los valores

$$X = x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$$

□ La función de distribución, $F(x)$, es la probabilidad de que X tome valores menores o iguales a x

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

x_i	$P[X = x_i] = p_i$	$F(x_i) = F_i$
x_1	p_1	$F_1 = p_1$
x_2	p_2	$F_2 = p_1 + p_2$
x_3	p_3	$F_3 = p_1 + p_2 + p_3$
\vdots	\vdots	\vdots

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

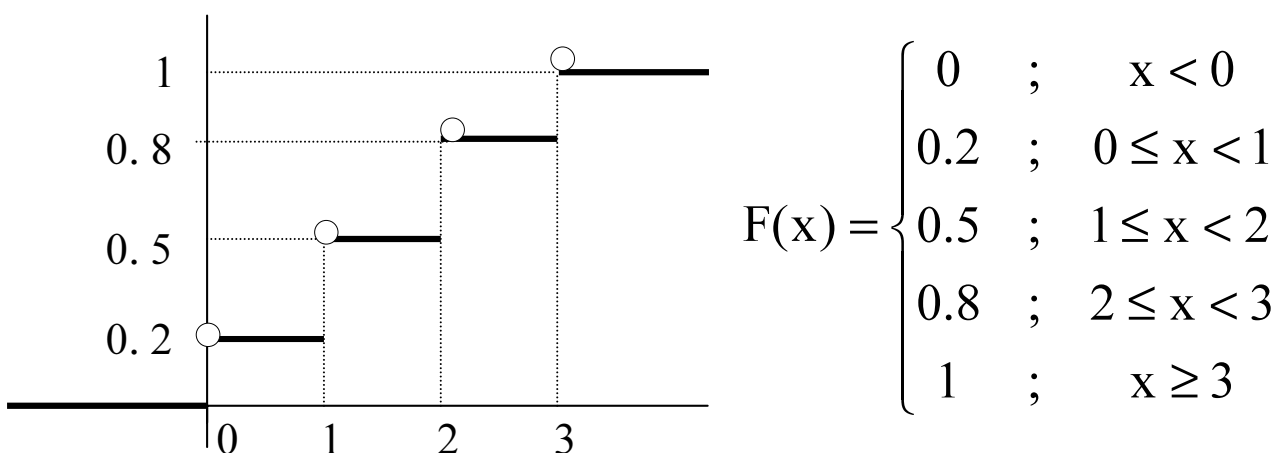
Cartagena99

▪ **Ejemplo.** Se desea realizar un estudio sobre el número de crías en una camada. Sea la v.a. X : “Número de crías en una camada”

X toma los valores $x = 0, 1, 2, 3$, con probabilidades

$$P\{X=0\} = 0.2; P\{X=1\} = 0.3; P\{X=2\} = 0.3; P\{X=3\} = 0.2$$

$$F(2.5) = P\{X \leq 2.5\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} \\ + P\{X=2\} = 0.8$$



¿Cuál es la probabilidad de que una camada tenga 2 crías?

$$P\{X=2\} = P\{X \leq 2\} - P\{X \leq 1\} = F(2) - F(1) = 0.3$$

¿Cuál es la probabilidad de que el número de crías en una camada sea mayor o igual a 2.2?

$$P\{X \geq 2.2\} = 1 - P\{X < 2.2\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - F(2) \\ = 0.2$$

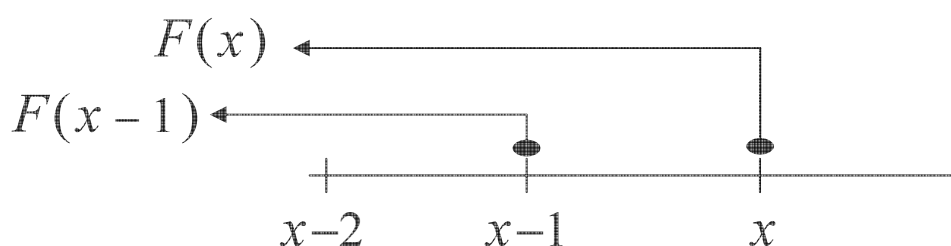
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

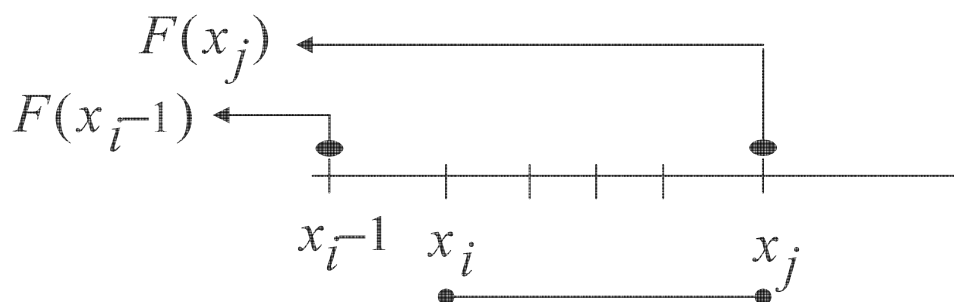
❖ **Nota:** Relación de la f.m.p. y la F. distribución cuando la v.a. toma valores enteros

$$P[X = x] = P[X \leq x] - P[X \leq x - 1] = F(x) - F(x - 1)$$



$$P[x_i \leq X \leq x_j] = P[X \leq x_j] - P[X < x_i] =$$

$$= P[X \leq x_j] - P[X \leq x_i - 1] = F(x_j) - F(x_i - 1)$$



■ Ejemplos.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

❖ 3.3. Variable Aleatoria Continua

◆ Definición

X es una v.a. continua si toma valores en un conjunto no numerable

◆ 3.3.1. Función de densidad de una variable aleatoria continua

✓ Si X es una v.a. continua X , si existe una función f , llamada **función de densidad** tal que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad ; \quad a, b \in \mathfrak{R}$$

◆ La función de densidad verifica

$$f(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- **Ejemplo:** Se desea estudiar el nivel de colesterol en cierto tipo de pollos. La función de densidad de la v.a. asociada es

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0, \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcular el valor de k

Solución.-

Para que f sea una función de densidad se debe verificar que:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\geq 0 \quad ; \quad \forall x \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Como $f(x) \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

$$1 = \int_0^2 kx dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = k \frac{4}{2} = 2k = 1$$

Cartagena99

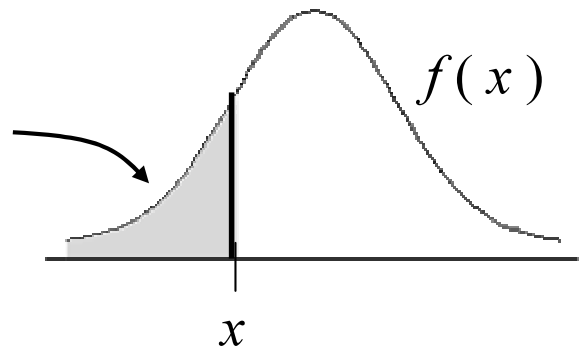
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

◆ 3.3.2. Función de distribución de una variable aleatoria continua

➤ Sea X una v.a. continua con función de densidad $f(x)$, entonces su función de distribución es

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$



❖ NOTA

Si X es una v.a. continua

- $P(X = a) = 0$; para cualquier número real a
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) =$

$$= \int_a^b f(u) du = \int_{-\infty}^b f(u) du - \int_{-\infty}^a f(u) du = F(b) - F(a)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

- **Ejemplo.** Se desea estudiar el nivel de colesterol en cierto tipo de pollos. La función de densidad de la v.a. asociada es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0, \quad x > 2 \end{cases}$$

1. Obtener la Función de Distribución, $F(x)$
2. Obtener: $P(X \leq 1.2)$; $P(X \geq 0.8)$; $P(1 < X < 1.5)$

Solución

1.

$$x < 0 : F(x) = 0$$

$$0 \leq x \leq 2 : F(x) = P[X \leq x] =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2} u du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$

$$2. \quad P(X \leq 1.2) = \frac{1.2^2}{4} = 0.36$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

2. Obtener : $P(X \leq 1.2)$; $P(X \geq 0.8)$; $P(1 < X < 1.5)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 / 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$P(X \leq 1.2) = F(1.2) = 1.2^2 / 4 = 0.36$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 0.8) &= 1 - P(X < 0.8) = 1 - F(0.8) = \\ &= 1 - 0.8^2 / 4 = 0.84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1 < X < 1.5) &= F(1.5) - F(1) = \\ &= 1.5^2 / 4 - 1^2 / 4 = 0.3125 \end{aligned}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

❖ 3.4. Características de una variable aleatoria. Esperanza y Varianza

- ◆ Necesidad de definir medidas que sinteticen el comportamiento de la variable aleatoria
- ◆ Consideraremos como medida de posición la Esperanza y de dispersión la Varianza

◆ 3.4.1. Esperanza Matemática de una variable aleatoria discreta

- ▶ Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores x_1, x_2, \dots con f.m.p.

$$P(X = x_i) \text{ para } i = 1, 2, \dots$$

$$E[X] = \sum_i x_i P[X = x_i]$$

- **Ejemplo.** X : “Número de crías en una camada”

X toma los valores $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ con probabilidades

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

◇ 3.4.2. Esperanza Matemática de una variable aleatoria continua

► Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

◇ 3.4.3. Propiedades de la Esperanza

■ $E[aX] = a E[X], a \in \mathcal{R}$

■ $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

■ $E[XY] = E[X]E[Y]$ si X y Y son independientes

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

▪ **Ejemplo.**

La altura de un cierto árbol sigue una v.a. con función de densidad,

$$f(x) = x / 12, \quad \text{con } 1 < x < 5.$$

Calcular la Esperanza de X

Solución.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_1^5 \frac{x^2}{12} dx = \frac{1}{36} \left[x^3 \right]_1^5 = \frac{31}{9}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white starburst shape behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

◇ 3.4.4. Esperanza Matemática de una función de variable aleatoria

► Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores $x = x_1, x_2, \dots$

► Sea $Y = h(X)$ una variable aleatoria discreta.

Entonces

$$E[Y] = E[h(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i)P[X = x_i]$$

■ Ejemplo.

Se ha realizado un test a una serie de ratones, pudiendo resultar éste negativo, nulo o positivo. La v.a. discreta asociada tiene la siguiente f.m.p.

$$P[X = -1] = P[X = 0] = P[X = 1] = 1/3,$$

asociando el valor -1 si el test da negativo, 0 si es nulo ó 1 si es positivo.

Calcular la esperanza de $Y = X^2$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3 3 3 3

Cartagena99

- Sea X una v.a. continua con función de densidad $f(x)$
 Sea $Y = h(X)$ una v.a. continua. Entonces

$$E[Y] = E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx$$

- **Ejemplo.** La longitud de las alas de un cierto tipo de ave sigue una v.a. con función de densidad,

$$f(x) = 2x; \quad 0 < x < 1$$

Calcular la esperanza de $Y = \sqrt{X}$

Solución.

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} 2x dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x^{1/2} x dx =$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

◇ 3.4.5. Varianza de una variable aleatoria. Propiedades y Ejemplos

► Se define la varianza de una v.a. como

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 \geq 0$$

❖ Propiedades de la varianza

✧ $Var[X] = 0 \iff X$ es constante

✧ a constante $\Rightarrow Var[aX] = a^2 Var[X]$

✧ a, b constantes $\Rightarrow Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- **Ejemplo.** Se desea realizar un estudio sobre el número de crías en una camada.

X : “Número de crías en una camada”

X toma los valores $x = 0, 1, 2, 3$ con probabilidades

$$P\{X=0\} = 0.2 ; \quad P\{X=1\} = 0.3 ;$$

$$P\{X=2\} = 0.3 ; \quad P\{X=3\} = 0.2$$

Calcular la varianza de dicha variable aleatoria.

Solución

$$E[X^2] = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.2 = 3.3$$

La esperanza de X ya fue calculada : $E[X] = 1.5$

Por lo tanto:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 3.3 - 1.5^2 = 1.05$$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font with a light blue shadow effect. The number '99' is larger and more prominent than the word 'Cartagena'.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

▪ Ejemplo.

La altura de un cierto árbol sigue una v.a. con función de densidad,

$$f(x) = x / 12, \text{ con } 1 < x < 5$$

Calcular la Varianza de X

Solución.

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{12} \int_1^5 x^3 dx = \frac{1}{48} [x^4]_1^5 = 13$$

La esperanza de X ya fue calculada y es: $E[X] = 31/9$.

Por lo tanto:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 13 - \left(\frac{31}{9}\right)^2 = 1.1358$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

❖ 3.5. Independencia

Dos variables aleatorias X, Y son independientes \Leftrightarrow

❖ Caso discreto:

$$P[X = x, Y = y] = P[X = x] \cdot P[Y = y], \text{ para todo } x, y$$

❖ Caso continuo:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \text{ para todo } x, y$$

Siendo f_X y f_Y las funciones de densidad de X e Y

Intuitivamente X e Y son independientes cuando el comportamiento de la primera no influye en el de la segunda y recíprocamente

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

▪ **Ejemplo.**

Sea X el número de machos por camada de una determinada especie e Y el número de hembras. Se han observado 399 camadas y el número de hembras y machos viene reflejado en la tabla adjunta

$X \setminus Y$	0	1	2	3	4	Marginal Y
0	2	10	6	8	16	42
1	1	5	3	4	8	21
2	6	30	18	24	48	126
3	10	50	30	40	80	210
Margina X	19	95	57	76	152	399

Estudiar si X e Y son independientes

X e Y son independientes si se verifica que:

$$P[X = x, Y = y] = P[X = x] P[Y = y]$$

$$P[X = 0, Y = 0] = 2 / 399 \quad \left\{ \begin{array}{l} P[X = 0] = \frac{42}{399} \\ P[Y = 0] = \frac{19}{399} \end{array} \right.$$

42 19 2

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99