

Probabilidades y Estadística (M)

Funciones de densidad o probabilidad puntual, esperanzas, varianzas y funciones características de las variables aleatorias más frecuentes

I. Distribuciones discretas

Distribución Binomial $Bi(n, p)$

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n \text{ y } 0 < p < 1$$

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ \text{var}(X) &= np(1-p) \\ \varphi_X(t) &= (1 + p(e^{it} - 1))^n \end{aligned}$$

Un caso particular de la distribución binomial es cuando $n = 1$. Esta distribución suele denominarse *Bernoulli* de parámetro p , $Be(p) = Bi(1, p)$.

Distribución Geométrica $Ge(p)$

$$p_X(k) = p(1-p)^{k-1} \quad \text{si } k = 1, 2, \dots \text{ y } 0 < p < 1$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{p} \\ \text{var}(X) &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Distribución Binomial Negativa (o de Pascal) $BN(r, p)$

$$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad k = r, r+1, \dots \text{ y } 0 < p < 1$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{r}{p} \\ \text{var}(X) &= \frac{r(1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

La distribución geométrica es un caso particular de la distribución binomial negativa: $Ge(p) = BN(1, p)$.

Distribución Poisson $\mathcal{D}(\lambda)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Distribución Hipergeométrica $\mathcal{H}(N, r, m)$

N : total poblacional

r : cantidad de “buenos” en la población

m : cantidad de elementos extra ídos (tamaño de la muestra)

$$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{m-k}}{\binom{N}{m}} \quad \text{si } k \text{ es entero con } \max(r+m-N, 0) \leq k \leq \min(r, m)$$

$$E(X) = m \frac{r}{N}$$
$$\text{var}(X) = m \frac{r}{N} \frac{(N-r)}{N} \frac{(N-m)}{(N-1)}$$

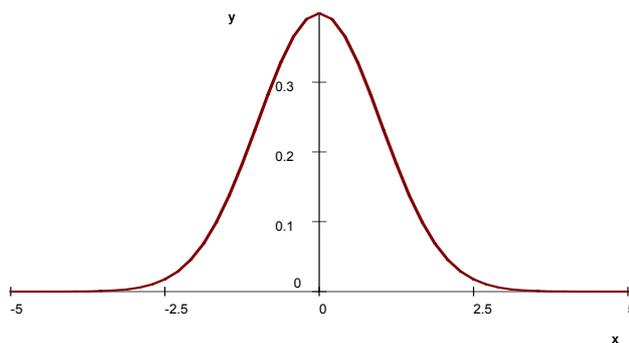
II. Distribuciones continuas

Distribución Normal $N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \text{con } \sigma > 0$$

$$E(X) = \mu$$
$$\text{var}(X) = \sigma^2$$
$$\varphi_X(t) = e^{it\mu} e^{-(\sigma t)^2/2}$$

La distribución Normal estándar corresponde a la elección de parámetros $N(0, 1)$.



Densidad de la normal estándar

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\text{var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^\alpha}$$

Recordemos que el símbolo $\Gamma(\alpha)$ representa a la *función gama* que se define por

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx \quad \text{si } y > 0$$

Satisface las siguientes propiedades:

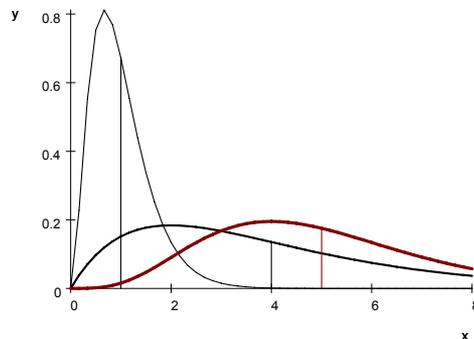
$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1)$$

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

En el gráfico siguiente figuran las funciones de densidad de la gama para distintos valores de los parámetros: la función de la línea fina corresponde a $\alpha = 3, \lambda = 3$, la de la línea sólida de grosor intermedio corresponde a $\alpha = 2, \lambda = \frac{1}{2}$, y la de la línea punteada corresponde a $\alpha = 5, \lambda = 1$. Con la línea punteada están las esperanzas en cada caso.



Densidad de la gama

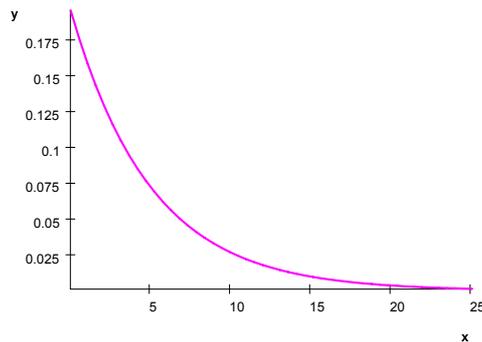
Distribución Exponencial $Exp(\lambda)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \quad \text{con } \lambda > 0$$

1

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Densidad Exponencial con $\lambda = 1/5$

La distribución exponencial es un caso particular de la distribución gama: $Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$.

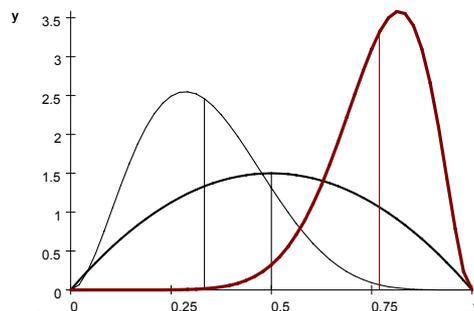
Distribución Beta $\beta(a, b)$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x) \quad \text{con } a, b > 0$$

$$E(X) = \frac{a}{a+b}$$

$$var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

En el gráfico siguiente figuran las funciones de densidad de la beta para distintos valores de los parámetros: la función de la línea fina corresponde a $a = 3, b = 6$, la de la línea sólida de grosor intermedio corresponde a $a = 2, b = 2$, y la de la línea punteada corresponde a $a = 10, b = 3$. Con la línea punteada están las esperanzas en cada caso.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{i(b-a)t}$$

La distribución uniforme en el $(0, 1)$ es un caso particular de la distribución beta: $\mathcal{U}[0, 1] = \beta(1, 1)$.

Distribución T de Student con n grados de libertad t_n

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

$$E(X) = 0 \quad n \geq 2$$

$$var(X) = \frac{n}{n-2} \quad n > 2$$

Distribución χ^2 cuadrado con n grados de libertad $\chi_n^2 = \chi^2(n)$ La distribución Chi cuadrado con n grados de libertad es un caso particular de la distribución gama: $\chi_n^2 = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$E(X) = n$$

$$var(X) = 2n$$

Distribución F de Snedecor con n y m grados de libertad $F_{n,m}$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} x^{(n/2)-1} \left(1 + \frac{n}{m}x\right)^{-(n+m)/2} I_{(0,\infty)}(x).$$

Distribución de Cauchy $\mathcal{C}(0, \lambda)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} \quad \lambda > 0$$

$$\varphi_X(t) = e^{-\lambda|t|}$$

La esperanza de esta distribución no está definida pues $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx = +\infty$. La distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$ coincide con la distribución T de Student de un grado de libertad, $\mathcal{C}(0, 1) = t_1$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

III. Propiedades

- $X \sim Bi(n, p)$, $Y \sim Bi(m, p)$ independientes $\Rightarrow X + Y \sim Bi(n + m, p)$. Más aún $X = \sum_{i=1}^n W_i$ con $W_i \sim Bi(1, p)$ independientes.
- $X \sim Ge(p)$, $Y \sim Ge(p)$ independientes $\Rightarrow X + Y \sim BN(2, p)$. Más aún, si $W \sim BN(r, p)$ existen $W_i \sim Ge(p)$ independientes tales que $W = \sum_{i=1}^r W_i$.
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ independientes $\Rightarrow X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- $Bi(n, p) \approx \mathcal{P}(\lambda)$ con $\lambda = np$ y $p \ll 1$.
- $\mathcal{H}(N, r, m) \approx Bi(m, \frac{r}{N})$ cuando N es muy grande, y $m \ll N$.
- $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$, $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$ independientes $\Rightarrow Y_1 = X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$ y es independiente de $Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim \beta(\alpha_1, \alpha_2)$.
- $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow cX \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{c})$.
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. En particular, $\frac{1}{\sigma}(X - \mu) \sim N(0, 1)$. Esta transformación se conoce como *estandarización* de la normal.
- $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ independientes, $a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow aX + bY + c \sim N(a\mu_1 + b\mu_2 + c, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$.
- Sea $Z \sim N(0, 1)$, $X_1 \sim \chi^2(n)$ y $X_2 \sim \chi^2(m)$, variables aleatorias independientes. Entonces

$$U = \frac{Z}{\sqrt{X_1/n}} \sim t_n$$

$$V = \frac{X_1/n}{X_2/m} \sim F_{n,m}$$

- Sea $X \sim \chi^2(n)$, entonces existen $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$ independientes tales que $X = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$. En particular, $Z_1^2 \sim \chi^2(1)$.
- Sean $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$, variables aleatorias independientes. Entonces

$$V = \frac{X_1}{X_2} \sim t_1 = \mathcal{C}(0, 1)$$

- Sean $X_1 \sim \mathcal{C}(0, \lambda_1)$ y $X_2 \sim \mathcal{C}(0, \lambda_2)$, variables aleatorias independientes. Entonces

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{C}(0, \lambda_1 + \lambda_2) \text{ y } aX_1 \sim \mathcal{C}(0, a\lambda_1) \text{ } \forall a \in \mathbb{R}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**