

## Probabilidades y Estadística (M)

---

Funciones de densidad o probabilidad puntual, esperanzas, varianzas y funciones características de las variables aleatorias más frecuentes

### I. Distribuciones discretas

**Distribución Binomial**  $Bi(n, p)$

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n \text{ y } 0 < p < 1$$

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ \text{var}(X) &= np(1-p) \\ \varphi_X(t) &= (1 + p(e^{it} - 1))^n \end{aligned}$$

Un caso particular de la distribución binomial es cuando  $n = 1$ . Esta distribución suele denominarse *Bernoulli* de parámetro  $p$ ,  $Be(p) = Bi(1, p)$ .

**Distribución Geométrica**  $Ge(p)$

$$p_X(k) = p(1-p)^{k-1} \quad \text{si } k = 1, 2, \dots \text{ y } 0 < p < 1$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{p} \\ \text{var}(X) &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

**Distribución Binomial Negativa (o de Pascal)**  $BN(r, p)$

$$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad k = r, r+1, \dots \text{ y } 0 < p < 1$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{r}{p} \\ \text{var}(X) &= \frac{r(1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

La distribución geométrica es un caso particular de la distribución binomial negativa:  $Ge(p) = BN(1, p)$ .

**Distribución Poisson**  $\mathcal{P}(\lambda)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Distribución Hipergeométrica $\mathcal{H}(N, r, m)$

$N$  : total poblacional

$r$  : cantidad de “buenos” en la población

$m$  : cantidad de elementos extra ídos (tamaño de la muestra)

$$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{m-k}}{\binom{N}{m}} \quad \text{si } k \text{ es entero con } \max(r+m-N, 0) \leq k \leq \min(r, m)$$

$$E(X) = m \frac{r}{N}$$
$$var(X) = m \frac{r}{N} \frac{(N-r)}{N} \frac{(N-m)}{(N-1)}$$

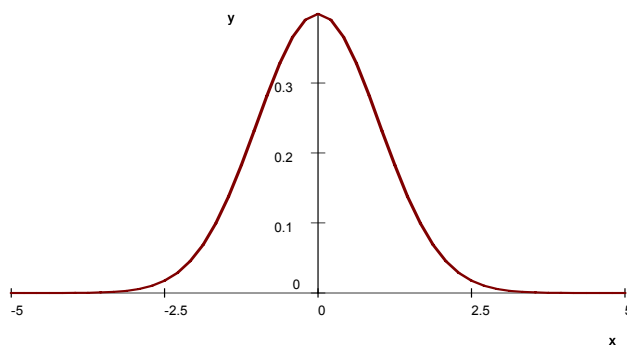
## II. Distribuciones continuas

### Distribución Normal $N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \text{con } \sigma > 0$$

$$E(X) = \mu$$
$$var(X) = \sigma^2$$
$$\varphi_X(t) = e^{it\mu} e^{-(\sigma t)^2/2}$$

La distribución Normal estándar corresponde a la elección de parámetros  $N(0, 1)$ .



Densidad de la normal estándar

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^\alpha}$$

Recordemos que el símbolo  $\Gamma(\alpha)$  representa a la *función gama* que se define por

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx \quad \text{si } y > 0$$

Satisface las siguientes propiedades:

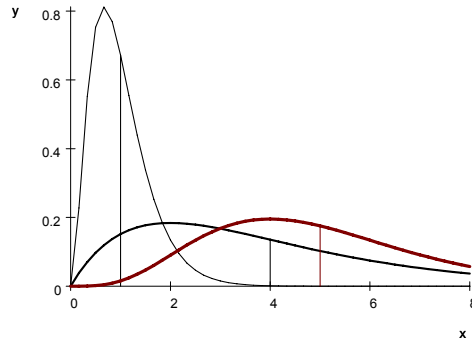
$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1)$$

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

En el gráfico siguiente figuran las funciones de densidad de la gama para distintos valores de los parámetros: la función de la línea fina corresponde a  $\alpha = 3, \lambda = 3$ , la de la línea sólida de grosor intermedio corresponde a  $\alpha = 2, \lambda = \frac{1}{2}$ , y la de la línea punteada corresponde a  $\alpha = 5, \lambda = 1$ . Con la línea punteada están las esperanzas en cada caso.



Densidad de la gama

### Distribución Exponencial $Exp(\lambda)$

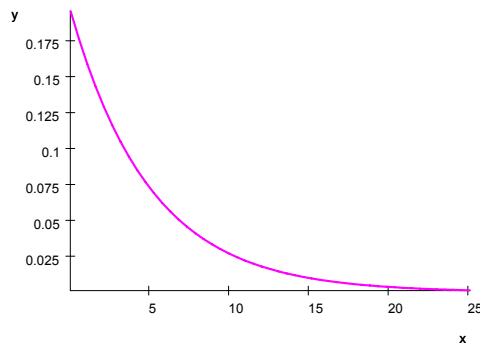
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \quad \text{con } \lambda > 0$$

1

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Densidad Exponencial con  $\lambda = 1/5$

La distribución exponencial es un caso particular de la distribución gama:  $Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$ .

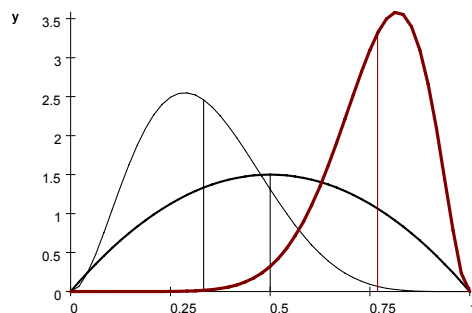
### Distribución Beta $\beta(a, b)$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x) \quad \text{con } a, b > 0$$

$$E(X) = \frac{a}{a+b}$$

$$var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

En el gráfico siguiente figuran las funciones de densidad de la beta para distintos valores de los parámetros: la función de la línea fina corresponde a  $a = 3, b = 6$ , la de la línea sólida de grosor intermedio corresponde a  $a = 2, b = 2$ , y la de la línea punteada corresponde a  $a = 10, b = 3$ . Con la línea punteada están las esperanzas en cada caso.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{i(b-a)t}$$

La distribución uniforme en el  $(0, 1)$  es un caso particular de la distribución beta:  $\mathcal{U}[0, 1] = \beta(1, 1)$ .

**Distribución  $T$  de Student con  $n$  grados de libertad  $t_n$**

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

$$E(X) = 0 \quad n \geq 2$$

$$var(X) = \frac{n}{n-2} \quad n > 2$$

**Distribución  $\chi^2$  cuadrado con  $n$  grados de libertad  $\chi_n^2 = \chi^2(n)$**  La distribución Chi cuadrado con  $n$  grados de libertad es un caso particular de la distribución gama:  $\chi_n^2 = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

$$E(X) = n$$

$$var(X) = 2n$$

**Distribución  $F$  de Snedecor con  $n$  y  $m$  grados de libertad  $F_{n,m}$**

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} x^{(n/2)-1} \left(1 + \frac{n}{m}x\right)^{-(n+m)/2} I_{(0,\infty)}(x).$$

**Distribución de Cauchy  $\mathcal{C}(0, \lambda)$**

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} \quad \lambda > 0$$

$$\varphi_X(t) = e^{-\lambda|t|}$$

La esperanza de esta distribución no está definida pues  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx = +\infty$ . La distribución Cauchy  $\mathcal{C}(0, 1)$  coincide con la distribución  $T$  de Student de un grado de libertad,  $\mathcal{C}(0, 1) = t_1$ .



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

### III. Propiedades

- $X \sim Bi(n, p)$ ,  $Y \sim Bi(m, p)$  independientes  $\Rightarrow X + Y \sim Bi(n + m, p)$ . Más aún  $X = \sum_{i=1}^n W_i$  con  $W_i \sim Bi(1, p)$  independientes.
- $X \sim Ge(p)$ ,  $Y \sim Ge(p)$  independientes  $\Rightarrow X + Y \sim BN(2, p)$ . Más aún, si  $W \sim BN(r, p)$  existen  $W_i \sim Ge(p)$  independientes tales que  $W = \sum_{i=1}^r W_i$ .
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ ,  $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$  independientes  $\Rightarrow X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .
- $Bi(n, p) \approx \mathcal{P}(\lambda)$  con  $\lambda = np$  y  $p \ll 1$ .
- $\mathcal{H}(N, r, m) \approx Bi(m, \frac{r}{N})$  cuando  $N$  es muy grande, y  $m \ll N$ .
- $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ ,  $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$  independientes  $\Rightarrow Y_1 = X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$  y es independiente de  $Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim \beta(\alpha_1, \alpha_2)$ .
- $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ ,  $c \in \mathbb{R} \Rightarrow cX \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{c})$ .
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ . En particular,  $\frac{1}{\sigma}(X - \mu) \sim N(0, 1)$ . Esta transformación se conoce como *estandarización* de la normal.
- $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  independientes,  $a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow aX + bY + c \sim N(a\mu_1 + b\mu_2 + c, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ .
- Sea  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $X_1 \sim \chi^2(n)$  y  $X_2 \sim \chi^2(m)$ , variables aleatorias independientes. Entonces

$$U = \frac{Z}{\sqrt{X_1/n}} \sim t_n$$

$$V = \frac{X_1/n}{X_2/m} \sim F_{n,m}$$

- Sea  $X \sim \chi^2(n)$ , entonces existen  $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$  independientes tales que  $X = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ . En particular,  $Z_1^2 \sim \chi^2(1)$ .
- Sean  $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$ , variables aleatorias independientes. Entonces

$$V = \frac{X_1}{X_2} \sim t_1 = \mathcal{C}(0, 1)$$

- Sean  $X_1 \sim \mathcal{C}(0, \lambda_1)$  y  $X_2 \sim \mathcal{C}(0, \lambda_2)$ , variables aleatorias independientes. Entonces

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{C}(0, \lambda_1 + \lambda_2) \text{ y } aX_1 \sim \mathcal{C}(0, a\lambda_1) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**