Capítulo 6: Variable Aleatoria Bidimensional

Cuando introducíamos el concepto de variable aleatoria unidimensional, decíamos que se pretendía modelizar los resultados de un experimento aleatorio en el conjunto de los números reales. Sin embargo, en muchas ocasiones, los resultados de un experimento aleatorio no pueden expresarse mediante una única cantidad, y se requiere una variable aleatoria multidimensional. Nos centramos en este capítulo en el estudio de una variable aleatoria bidimensional.

6.1 Concepto de variable aleatoria bidimensional

Una variable aleatoria bidimensional (X, Y) es una aplicación del espacio muestral Ω en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}x\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{XxY} & \mathbb{R}x\mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Por lo tanto, cada componente de la variable aleatoria bidimensional es una variable aleatoria unidimensional.

Ejemplo 6.1: Consideremos el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces, al que tenemos asociado el siguiente espacio muestral:

$$\Omega = \{(c,c,c),(c,c,+),(c,+,c),(+,c,c),(c,+,+),(+,c,+),(+,+,c),(+,+,+)\}$$

Se define la v.a. bidimensional $Z = (X, Y)$, donde $X(\omega) =$"*Número de caras en* ω", e $Y(\omega) =$"*Diferencia en valor absoluto entre el número de caras y el número de cruces en* ω". Entonces:

$$\begin{aligned} Z(+,+,+) &= (0,3) \\ Z(c,+,+) &= Z(+,c,+) = Z(+,+,c) = (1,1) \\ Z(c,c,+) &= Z(c,+,c) = Z(+,c,c) = (2,1) \\ Z(c,c,c) &= (3,3) \end{aligned}$$

6.2 Distribución de probabilidad inducida. Función de distribución conjunta

Vamos a asociar a cada v.a. bidimensional un espacio probabilístico definido en $\mathbb{R}^2$.

6.2.1 Caso discreto

Sean X e Y variables aleatorias unidimensionales de tipo discreto, que toman un número finito o infinito numerable de valores $\{x_1, x_2, ...\}$, $\{y_1, y_2, ...\}$, respectivamente.

Se define la *función masa de probabilidad conjunta* de (X, Y) como:

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \forall i, j$$

verificando:

i) $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $\forall i, j$

ii) $\displaystyle\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

La *función de distribución conjunta* de (X, Y) viene dada por:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ejemplo 6.2: La v.a. $Z = (X, Y)$ del ejemplo 5.1 tiene función masa de probabilidad dada por:

$X \backslash Y$	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

y su función de distribución es:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0,\ y < 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1,\ 1 \leq y < 3 \\ 1/8 & \text{si } 0 \leq x < 1,\ y \geq 3 \\ 4/8 & \text{si } 1 \leq x < 2,\ y \geq 1 \\ 7/8 & \text{si } 2 \leq x < 3,\ y \geq 1 \\ 6/8 & \text{si } x \geq 3,\ 1 \leq y < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3,\ y \geq 3, \end{cases}$$

6.2.2 Caso continuo

Sean X e Y dos v.a. continuas definidas en $\mathbb{R}$.

Se define la *función de densidad conjunta* de (X, Y) como una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

i) $f(x, y) \geq 0 \ \forall (x, y)$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

En este caso, la *función de distribución conjunta* de (X, Y) vendrá dada por:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) dv du, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

La función de densidad conjunta se obtiene a partir de la de distribución según la siguiente expresión:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Ejemplo 6.3: Sea (X, Y) una v.a. bidimensional continua con función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtenemos su función de distribucion:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) dv du = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{y} 0 dv du + \int_{0}^{x} \int_{-\infty}^{0} 0 dv du + \\ + \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} uv dv du &= \frac{(xy)^2}{4}, \ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.4: Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con la siguiente función de distribución:

$$F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)}, \ x > 0, \ y > 0$$

donde X =*"Duración de llamadas comerciales" e* Y = *"Duración de llamadas personales"*.

a. Calcular $P(X \leq 1, Y \leq 2)$.

$$P(X \leq 1, Y \leq 2) = F(1, 2) = 1 - e^{-1} - e^{-2} + e^{-3}$$

b. Determinar la función de densidad conjunta.

$$\partial^2 F(x, y)$$

6.3 Distribuciones marginales y condicionadas

6.3.1 Distribuciones marginales

En general, se definen las distribuciones marginales como las distribuciones por separado de cada una de las componentes de la v.a. bidimensional.

Dada la función de distribución conjunta de (X, Y), $F(x, y)$, se define la *función de distribución marginal de* X como:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = F(x, +\infty) = P(X \leq x, Y \leq +\infty),\ x \in \mathbb{R}$$

Análogamente, la *función de distribución marginal de* Y viene dada por:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = F(+\infty, y) = P(X \leq +\infty, Y \leq y),\ y \in \mathbb{R}$$

- **Caso discreto:**

  Dada una v.a. bidimensional (X, Y) con función masa de probabilidad conjunta $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, se define la *función masa de probabilidad marginal de* X como:

  $$P_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p_{ij} = p_{i.}$$

  Análogamente, la *función masa de probabilidad marginal de* Y es:

  $$P_Y(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i p_{ij} = p_{.j}$$

  Entonces, las *funciones de distribución marginales* resultan:

  $$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{x_i \leq x} p_{i.}, x \in \mathbb{R}$$

  $$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \sum_{y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{y_j \leq y} p_{.j}, y \in \mathbb{R}$$

- **Caso continuo:**

  Sea una v.a. bidimensional (X, Y) con función de densidad conjunta $f(x, y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

  Las *funciones de densidad marginales* están dadas por:

  $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy, x \in \mathbb{R}$$

  y

Las correspondientes *funciones de distribución marginales* resultan:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv, x \in \mathbb{R}$$

y

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in \mathbb{R}, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv, y \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 6.5: Sea (X,Y) una v.a. bidimensional discreta con función masa de probabilidad dada por:

$X\backslash Y$	0	1	2	3	$p_{i.}$
1	1/14	0	2/14	1/14	4/14
2	0	1/14	3/14	1/14	5/14
3	2/14	1/14	0	2/14	5/14
$p_{.j}$	3/14	2/14	5/14	4/14	

La función masa de probabilidad de X es:

$$\begin{aligned} P_X(1) &= P(X=1) = \sum_{j=0}^{3} P(X=1, Y=j) = p_{1.} = 4/14 \\ P_X(2) &= P(X=2) = \sum_{j=0}^{3} P(X=2, Y=j) = p_{2.} = 5/14 \\ P_X(3) &= P(X=3) = \sum_{j=0}^{3} P(X=3, Y=j) = p_{3.} = 5/14 \end{aligned}$$

La de Y :

$$\begin{aligned} P_Y(0) &= P(Y=0) = p_{.1} = 3/14 \\ P_Y(1) &= P(Y=1) = p_{.2} = 2/14 \\ P_Y(2) &= P(Y=2) = p_{.3} = 5/14 \\ P_Y(3) &= P(Y=3) = p_{.4} = 4/14 \end{aligned}$$

La función de distribución marginal de X es:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 4/14 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 9/14 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

y

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 3/14 & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 5/14 & \text{si } 1 \leq y < 2 \end{cases}$$

Ejemplo 6.6: Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x(1-xy) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Entonces, las funciones de densidad marginales vienen dadas por:

$$f_X(x) = \int_0^1 3x(1-xy)dy = 3\left(xy - \frac{x^2y^2}{2}\right)\Big]_0^1 = 3x\left(1 - \frac{x}{2}\right), 0 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 3x(1-xy)dx = 3\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3y}{3}\right)\Big]_0^1 = \frac{3-2y}{2}, 0 \leq y \leq 1$$

La función de distribución conjunta resulta:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x \int_0^y 3u(1-uv)dvdu = 3\int_0^x \left(uv - \frac{u^2v^2}{2}\right)du = \\ &= \frac{x^2y(3-xy)}{2}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

Y las funciones de distribución marginales son:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F(x,1) = \frac{x^2(3-x)}{2}, 0 \leq x \leq 1 \\ F_Y(y) &= F(1,y) = \frac{y(3-y)}{2}, 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

6.3.2 Distribuciones condicionadas

Como ya sabemos, la probabilidad de un suceso condicionada a la ocurrencia de otro suceso viene dada por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

Ahora, el condicionamiento tendrá lugar entre variables.

- **Caso discreto:**

  Sea (X, Y) una v.a. bidimensional discreta. Se define la *función masa de probabilidad de X condicionada al valor y_j de Y* como:

$$\begin{aligned} P_{X/Y}(x_i/y_j) &= p_{i/j} = P(X = x_i / Y = y_j) = \\ &= \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \end{aligned}$$

  Análogamente, la *función masa de probabilidad de Y condicionada al valor x_i de X* viene dada por:

$$P_{Y/X}(y_j/x_i) = p_{j/i} = P(Y = y_j / X = x_i) =$$

- **Caso continuo:**

  Sea (X, Y) una v.a. bidimensional continua. Se define la *función de densidad de X dado que Y vale y* como:

  $$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, x \in \mathbb{R}$$

  Análogamente, la *función de densidad de Y dado que X vale x* se define como:

  $$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, y \in \mathbb{R}$$

  Las funciones de distribución asociadas son:

  $$\begin{aligned} F(x/y) &= P(X \leq x/Y = y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx, x \in \mathbb{R} \\ F(y/x) &= P(Y \leq y/X = x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.7: Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Las funciones de densidad marginales son:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y

$$f_Y(y) = \begin{cases} y/2 & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Las densidades condicionadas vienen dadas por:

$$f(x/y) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y

$$f(y/x) = \begin{cases} y/2 & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Observamos que en este caso las densidades marginales y condicionadas coinciden.

6.4 Independencia de variables aleatorias

Sabemos que dos sucesos A y B son independientes si se cumple que:

$$\begin{aligned} P(A/B) &= P(A) \\ P(B/A) &= P(B) \end{aligned}$$

y en consecuencia:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Análogamente, diremos que dos variables aleatorias X e Y *son independientes* si se verifica:

- $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ en el caso discreto.
- $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ en el caso continuo.

Equivalentemente, $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$.
Por lo tanto, si las variables X e Y son independientes, se cumple que:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = P(a \leq X \leq b)P(c \leq Y \leq d)$$

Ejemplo 6.8: Las variables dadas en el ejemplo 5.7 son independientes, ya que las densidades condicionadas coinciden con las marginales.

6.5 Esperanza matemática

Sea (X, Y) una v.a. bidimensional. Se define el valor esperado o esperanza matemática de una función $g(X, Y)$ como:

- **En caso discreto:**

$$E\left[g(X, Y)\right] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$$

- **En caso continuo:**

$$E\left[g(X, Y)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dydx$$

Algunas propiedades de la esperanza son:

i) $E\left[aX + bY + c\right] = aE[X] + bE[Y] + c$

ii) Si X e Y son independientes, entonces $E\left[g(X)g(Y)\right] = E\left[g(X)\right]E[g(Y)]$.
En particular, $E\left[XY\right] = E\left[X\right]E[Y]$.

Ejemplo 6.8: Sea (X, Y) una v.a. bidimensional discreta con f.m.p. conjunta:

$X \backslash Y$	0	1
2	1/4	1/4
4	3/8	1/8

La esperanza matemática de $g(X,Y) = X + Y^2$ es:

$$\begin{aligned} E\left[X + Y^2\right] &= (0+2^2)1/4 + (1+2^2)1/4 + (0+4^2)3/8 + (1+4^2)1/8 = 73/8 \\ &= E\left[X\right] + E[Y^2] \end{aligned}$$

6.6 Momentos bidimensionales

Dada una v.a. bidimensional (X, Y), definimos los siguientes momentos:

- *Momento no centrado de orden* (r, s) :

$$m_{rs} = E[X^r Y^s]$$

- *Momento centrado de orden* (r, s) :

$$\mu_{rs} = E[(X - E[X])^r (Y - E[Y])^s]$$

Al momento centrado de orden (1,1) se le llama *covarianza,* y se suele notar por $Cov(X, Y)$ o $\sigma_{X,Y}$. Su expresión es:

$$Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Diremos que dos variables son incorreladas si su covarianza es 0. Claramente, si dos variables son independientes, también son incorreladas.

Ejemplo 6.9: Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2)), \ -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

a. ¿Son X e Y independientes?. Comprobamos para ello si $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$.

Las funciones de densidad marginales resultan:

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2))dy = 1/2, \ -1 \leq x \leq 1$$

y

$$f_y(y) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2))dx = 1/2, \ -1 \leq y \leq 1$$

b. ¿Son X e Y incorreladas?. Comprobamos si la covarianza es 0.

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))dydx = 0, \\ E[X] &= \int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}dx = 0, \\ E[Y] &= \int_{-1}^{1} y\frac{1}{2}dy = 0. \end{aligned}$$

Por lo que $Cov(X,Y) = 0$ y en consecuencia las variables son incorreladas.

Con este ejemplo observamos que el que las variables sean incorreladas no implica que sean independientes. Sin embargo, si las variables son independientes sí son incorreladas.

6.7 Ejercicios

1. Se lanzan dos dados simultáneamente. Sea X="número de puntos obtenidos por el primer dado" e Y = "el número mayor de los puntos obtenidos con los dos dados". Se pide:

   a. La función masa de probabilidad conjunta.
   b. Las funciones masa de probabilidad marginales
   c. La función masa probabilidad de la variable X condicionada a $Y = 4$.
   d. $P(X = 2, Y = 4)$ y $P(X = 3)$.
   e. ¿Son independientes las variables X e Y?

2. Sea (X,Y) una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & \text{si } 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   a. Obtener la función de distribución conjunta.
   b. Obtener las funciones de distribución marginales.
   c. Obtener las funciones de densidad marginales.
   d. Calcular $P(X < 1, Y \le 1.5)$, $P(X \le 1)$, $P(X \le 1.7/Y \le 1.5)$.
   e. ¿Son incorreladas las variables?.

3. Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con función masa de probabilidad:

$X\backslash Y$	0	1	2	3
1	0	3/8	3/8	0
3	1/8	0	0	1/8

a. Calcular las funciones de probabilidad marginales.

b. Calcular $P(Y \leq 2)$, $P(X = 1 \cap (1 \leq Y \leq 2))$ y $P(Y = 3/X = 1)$.

c. Calcular la esperanza matemática de $2X + Y$.

d. ¿Son independientes las variables?.

4. Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{k}(3x - y) & \text{si } 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a. Calcular el valor de k para que sea función de densidad.

b. Obtener las funciones de densidad marginales.

c. Obtener la función de densidad de X dado que Y toma el valor y.

d. Calcular la función de distribución conjunta.

e. Calcular $P(X < 1.3, Y \leq 2.5)$.

5. Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a. Obtener las funciones de densidad marginales.

b. ¿Son independientes las variables?

c. Obtener la función de distribución conjunta.

d. Calcular $P((0 < X < 1) \cap (1 \leq X < 2))$

e. Obtener la función de densidad de Y condicionada a $X = 3$.

f. Calcular la esperanza de X^2Y

g. Calcular $Cov(X, Y)$.¿Son incorreladas las variables?.