Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________

IMPORTANTE

- Duración del examen: **90 minutos**
- No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- No se permite ningún tipo de documentación
- Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (20 puntos) Sea el sistema de control mostrado en la figura 1, en que se asume un período de muestreo de T s.

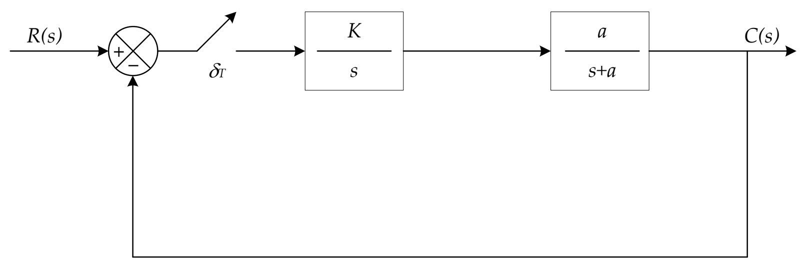


Figura 1: Sistema de control considerado.

Determine, conforme al criterio de estabilidad de Jury, el rango de valores de K (con $K > 0$), así como las condiciones que debe reunir el parámetro a, a fin de garantizar la estabilidad del sistema considerado.

2. (30 puntos) Sea el sistema de control digital mostrado en la figura 2. Diseñe un controlador $G_D(z)$, de forma que la respuesta en lazo cerrado presente un tiempo de establecimiento mínimo, con un error en régimen permanente nulo y sin oscilaciones en régimen permanente ante una entrada rampa unidad.

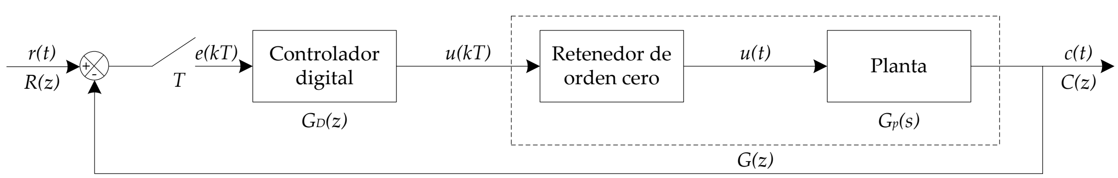


Figura 2: Sistema de control digital considerado.

Se asume un período de muestreo T de 10 s, y la función de transferencia de $G(z)$ obedece a

$$G(z) = \frac{0,3935}{z(z-0,6065)}.$$

Además, la respuesta deseada $c(t)$, ante una entrada escalón unidad, queda reflejada en la figura 3.

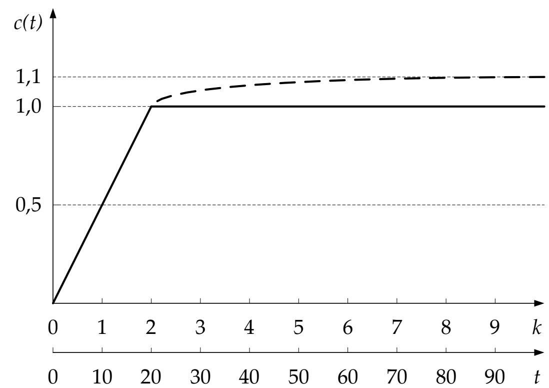


Figura 3: Señal $c(t)$ deseada en respuesta a una entrada escalón unidad.

3. (20 puntos) Considere el sistema de control digital ilustrado en la figura 4.

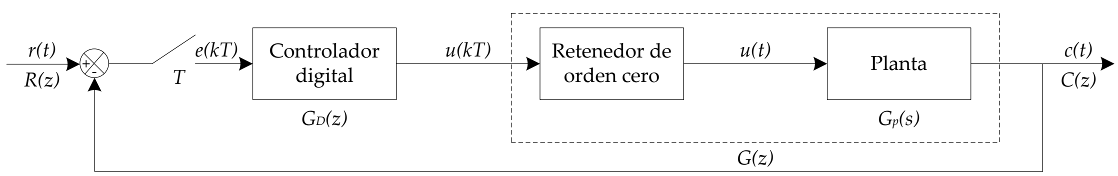


Figura 4: Sistema de control digital considerado.

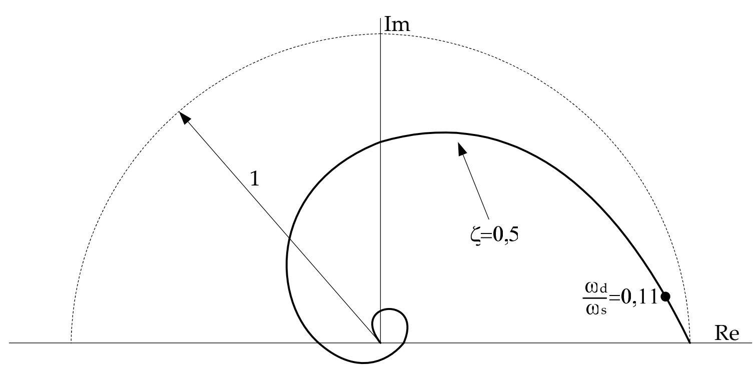


Figura 5: Lugar geométrico de ζ constante.

Diseñe un controlador digital $G_D(z)$, por medio del método de cancelación polo-cero, de forma que, en el plano z, las raíces dominantes del sistema regulado atiendan a las especificaciones reflejadas en el lugar geométrico de ζ constante, representado en la figura 5, en la que el símbolo • identifica el punto de operación (considere un tiempo de asentamiento t_s de 2 s). En el diseño del controlador digital $G_D(z)$ cancele aquel polo de $G(z)$ que produce en la respuesta una mayor velocidad de decaimiento.

Notas:
$t_s = \dfrac{4}{\zeta w_n}$; $G_p(s) = \dfrac{1}{s(s+2)}$.

4. (15 puntos) Demuestre que

$$Z^{-1}\left[\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}\right] = \frac{1}{2}k(k-1), \quad k = 0, 1, \ldots$$

5. (15 puntos) Considere un sistema de control, con realimentación unitaria, cuya función de transferencia en lazo abierto obedece a

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}.$$

Diseñe un compensador de fase $G_c(s)$, de forma que el diagrama de Bode de $G_c(s)G(s)$ coincida con el mostrado en la figura 6.

Notas: la constante estática de error de velocidad K_v del sistema de control, una vez regulado, ha de ser de 20 s^{-1}. Considere un factor de corrección de 5°, con la incorporación del compensador de fase.

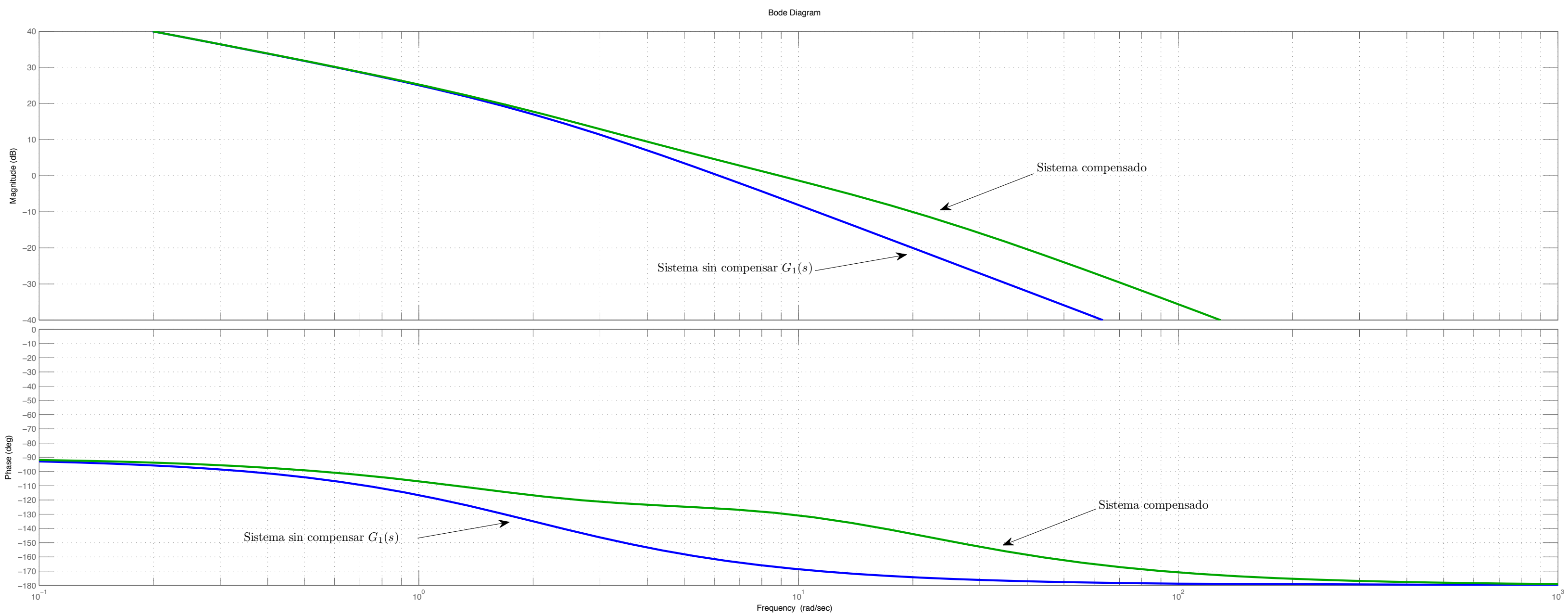


Figura 6: Diagrama de Bode de $G_1(s)$ y del sistema compensado $G_c(s)G(s)$.

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{K\cdot a}{s(s+a)}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{K}{s} - \frac{K}{s+a}\right\}$$

$$= \frac{K}{1-z^{-1}} - \frac{K}{1-e^{-aT}z^{-1}} = \frac{K(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$P(z) = z^2 - (1+e^{-aT} - K + K\cdot e^{-aT})z + e^{-aT} = 0$$

$$P(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2 z^0 = 0$$

1.- $|a_2| < a_0$

$$|e^{-aT}| < 1 \;;\quad aT > 0$$

2.- $P(z)\big|_{z=1} > 0$

$$1 - (1+e^{-aT} - K + K\cdot e^{-aT}) + e^{-aT} > 0$$

$$e^{-aT} < 1 \;;\quad aT > 0$$

3.- $P(z)\big|_{z=-1} > 0$ PARA $n=2$ PAR

$$1 + (1+e^{-aT} - K + K\cdot e^{-aT}) + e^{-aT} > 0$$

$$K < \frac{2(1+e^{-aT})}{1-e^{-aT}} = 2\coth\frac{aT}{2}$$

$$\boxed{0 < K < 2\coth\frac{aT}{2}}$$

$$\boxed{a > 0}$$

$$G(z) = \frac{0{,}3935\, z^{-2}}{1 - 0{,}6065\, z^{-1}} = \frac{0{,}3935}{z\,(z - 0{,}6065)}$$

NO HAY PROBLEMAS DE ESTABILIDAD CON $G(z)$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)\, G(z)}{1 + G_D(z)\, G(z)} = F(z)$$

$c(0) = 0$; $c(1) = 0{,}5$; $c(2) = 1$; $c(k) = 1,\ k = 3, 4, \dots$

$$C(z) = 0{,}5 \cdot z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots = 0{,}5\, z^{-1} + z^{-2} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{0{,}5\, z^{-1} + 0{,}5\, z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$C(z) = F(z)\, R(z) = F(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{0{,}5\, z^{-1} + 0{,}5\, z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$F(z) = 0{,}5\, z^{-1} + 0{,}5\, z^{-2}$$

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)\,[1 - F(z)]}$$

$$= \frac{0{,}5\, z^{-1} + 0{,}5\, z^{-2}}{\dfrac{0{,}3935\, z^{-2}}{1 - 0{,}6065\, z^{-1}} \left(1 - 0{,}5\, z^{-1} - 0{,}5\, z^{-2}\right)}$$

$$= \frac{(0{,}5\, z^{-1} + 0{,}5\, z^{-2})(1 - 0{,}6065\, z^{-1})}{0{,}3935\, z^{-2} - 0{,}1968\, z^{-3} - 0{,}1968\, z^{-4}}$$

$$= \frac{0{,}5\, z^{-1} + 0{,}1968\, z^{-2} - 0{,}3032\, z^{-3}}{0{,}3935\, z^{-2} - 0{,}1968\, z^{-3} - 0{,}1968\, z^{-4}}$$

$$= \frac{1{,}27\, z\,(z + 1)(z - 0{,}6065)}{(z - 1)(z + 0{,}5)}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n} = 2 \; ; \quad \text{CON } \zeta = 0,5 \rightarrow w_n = 4 \text{ rad/s}$$

$$w_d = w_n \sqrt{1-\zeta^2} = 3,464 \; ; \quad \frac{w_d}{w_s} = 0,11 \rightarrow w_s = 31,5$$

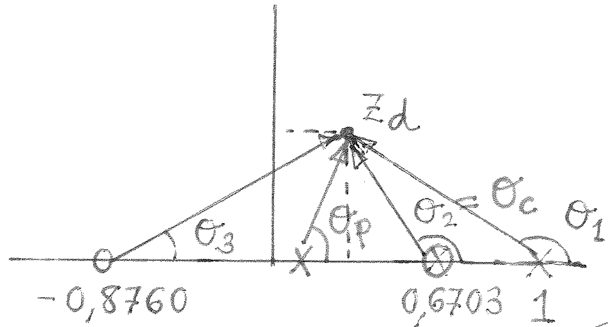
$$w_s = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 0,2$$

$$|z| = e^{-T\zeta w_n} = e^{-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{w_d}{w_s}} \; ; \quad \angle z = T w_d = 2\pi \frac{w_d}{w_s}$$

$$|z| = 0,6703$$
$$\angle z = 0,6927 \text{ rad} = 39,69^\circ \rightarrow z_d = 0,5158 + j\,0,4281$$

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+2)} \right\} = (1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{s^2(s+2)} \right\}$$

$$G(z) = \frac{0,01758\,(z+0,8760)}{(z-1)(z-0,6703)}$$



$$\angle G(z)\Big|_{z_d} = \theta_3 - \theta_1 - \theta_2$$
$$= 17,10^\circ - 138,52^\circ - 109,84^\circ$$
$$= -231,26^\circ \neq -180^\circ$$

CANCELA EL POLO SITUADO EN $z = 0,6703$

$$G_D(z) = K \cdot \frac{z-c}{z-p} = 12,67 \cdot \frac{z-0,6703}{z-0,2543}$$

$$\angle G_D(z)\,G(z)\Big|_{z_d} = \theta_3 + \cancel{\theta_c} - \theta_1 - \cancel{\theta_2} - \theta_p = -180^\circ \rightarrow \theta_p = 51,26^\circ$$

$$\tan 51,26^\circ = \frac{0,5158}{0,4281 - p} \; ; \quad p = 0,2543$$

$$\left| G_D(z)\,G(z) \right|_{z_d} = 1 = \left| K \cdot \frac{(z-0,6703)}{(z-0,2543)} \cdot \frac{0,01758\,(z+0,8760)}{(z-1)(z-0,6703)} \right|_{z_d} \; ;$$

$$K = 12,67$$

$$\text{SI} \quad X(z) = \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3} = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} - \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^3}$$

$$= \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} - \frac{z^{-1} - z^{-2} + z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$$

$$= \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} - \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} - \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]$$

$$Z^{-1}\left[X(z)\right] = \frac{1}{2}(K^2 - K) = \frac{1}{2}K(K-1), \quad \text{CONSIDERANDO } T = 1\,s$$

ADELANTO DE FASE

$MF = 50°$ EN $w_T = 9\ rad/s$

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \cdot \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \ ; \ 0<\alpha<1$$

$$G_c(s) = K \cdot \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \ ; \quad K = K_c \cdot \alpha$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\, G_c(s) G(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot K \cdot \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \cdot \frac{4}{s(s+2)} = 20$$

$$K_v = 2K \longrightarrow K = 10$$

$$G_1(s) = K \cdot G(s) = \frac{40}{s(s+2)} \rightarrow \text{VER GRÁFICA: } \underline{/G_1(jw)} \cong -163°$$

$MF = 17°$

SE REQUIEREN $33°$ ADICIONALES $+ 5° = 38° = \phi_m$

$$\sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rightarrow \alpha = 0{,}24$$

ϕ_m OCURRE EN $w_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = w_T = 9\ rad/s \rightarrow T = 0{,}2268$

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = 41{,}7$$

$$G_c(s) = 10 \cdot \frac{0{,}2268s+1}{0{,}0544s+1} = 41{,}7 \cdot \frac{s+4{,}4092}{s+18{,}3715}$$

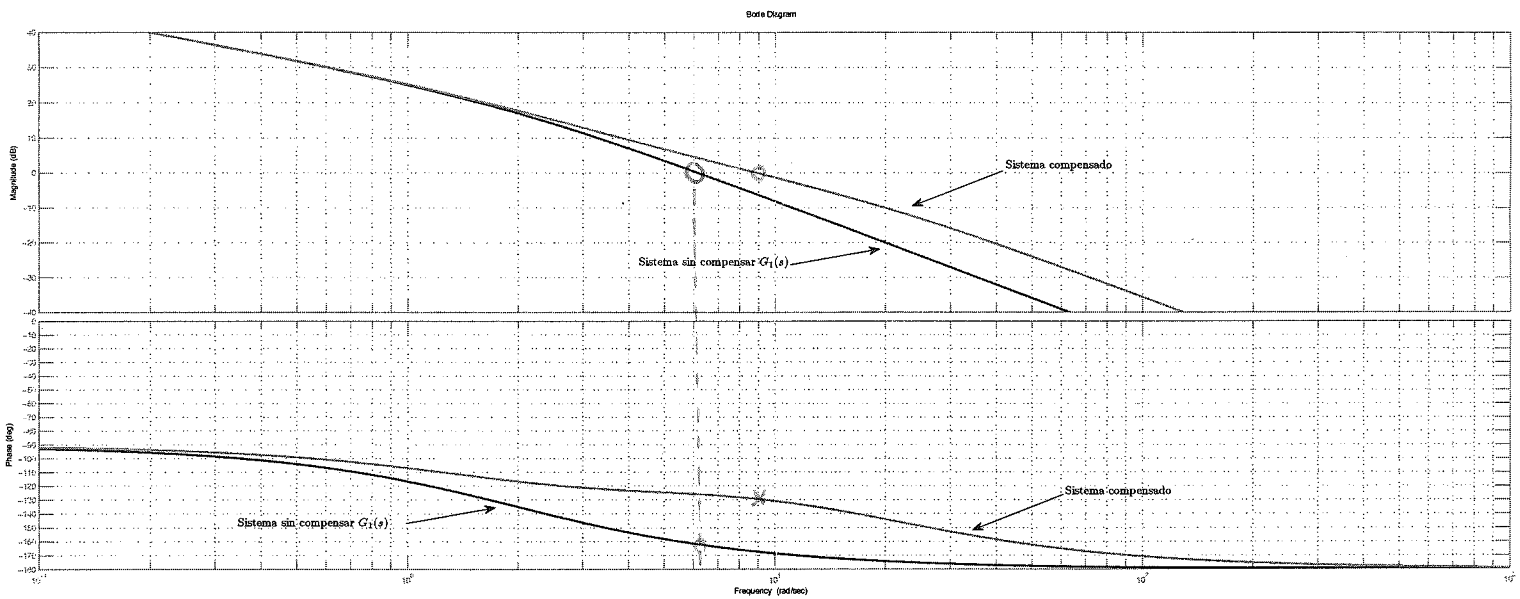


Figura 6: Diagrama de Bode de $G_1(s)$ y del sistema compensado $G_c(s)G(s)$.