Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________

IMPORTANTE

- Duración del examen: **120 minutos**
- No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- No se permite ningún tipo de documentación
- Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (30 puntos) Sea el sistema de control mostrado en la figura 1.

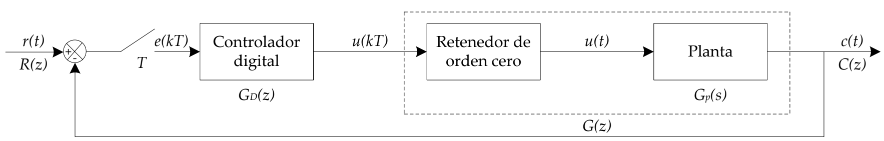


Figura 1: Sistema de control considerado.

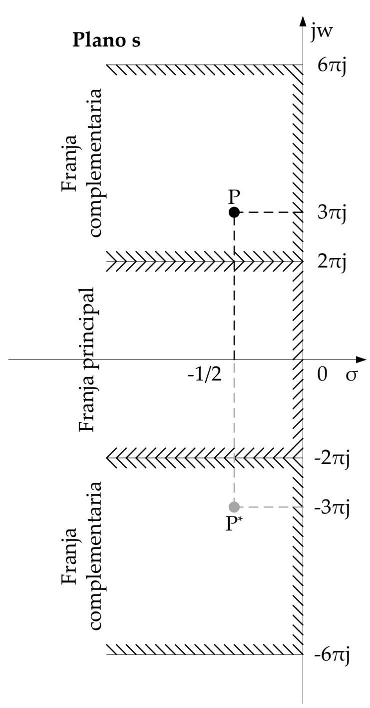


Figura 2: Raíces dominantes, P y P^*, en el plano s.

Determine numérica y analíticamente si la incorporación de un **regulador PD ideal** $G_D(z)$ satisfaría el cumplimiento de las especificaciones reflejadas en la figura 2, en que P y P^* representan las raíces dominantes (polos complejos conjugados). Se asume una planta $G_p(s)$, cuya función de transferencia obedece a

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2}.$$

2. (20 puntos) Determine la función de transferencia $G_c(s)$ del compensador de fase cuyo diagrama de Bode aparece delineado en la figura 3, y contraste gráfica y numéricamente los valores w_m y ϕ_m. Igualmente, bosqueje su diagrama de Nyquist, señalando aquellos valores más significativos.

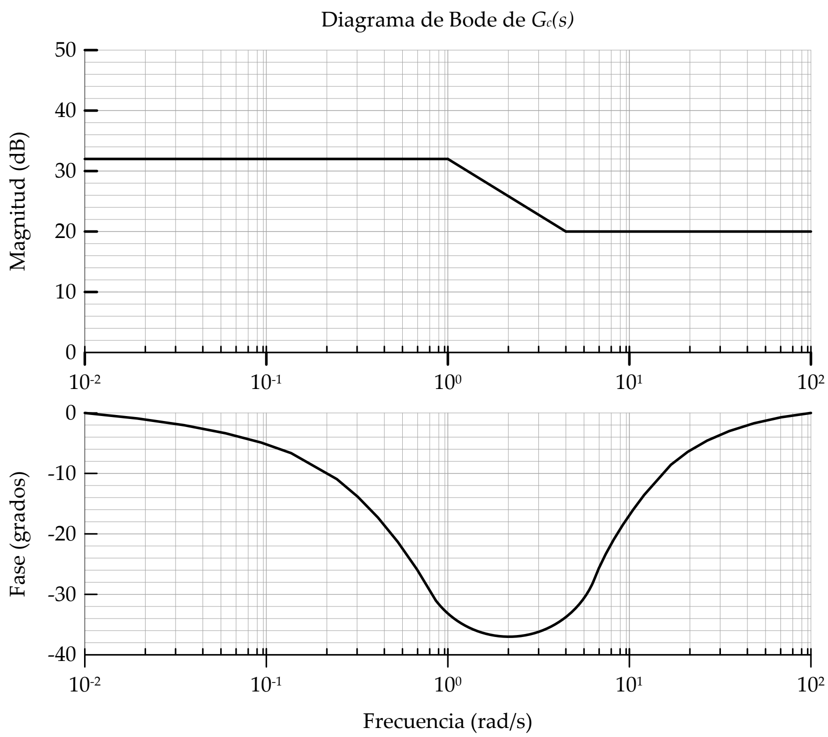


Figura 3: Diagrama de Bode de $G_c(s)$.

3. (30 puntos) Sea un sistema $G(z)$, cuyo diagrama de Bode se muestra en la figura 4. Si se opera con un ángulo de fase de $\angle G(z) = -216°$, diseñe un regulador PID, $G_R(z)$, para un período de muestreo T de 0,5 s, de forma que el margen de fase del sistema de control, con realimentación unitaria, ascienda a 24°.

Notas:

$K_1 = K_p + \dfrac{K_d}{T} + K_i T$; $K_2 = K_i T - \dfrac{2K_d}{T}$; $K_3 = \dfrac{K_d}{T} - K_p$.

Considere la relación $T_i = \alpha T_d$, donde el factor α identifica, de acuerdo con su lugar geométrico de las raíces, el valor crítico de ganancia del sistema

$$T(z) = \frac{z^{-1}(1 + 0,5z^{-1})}{1 - 0,5z^{-1}}.$$

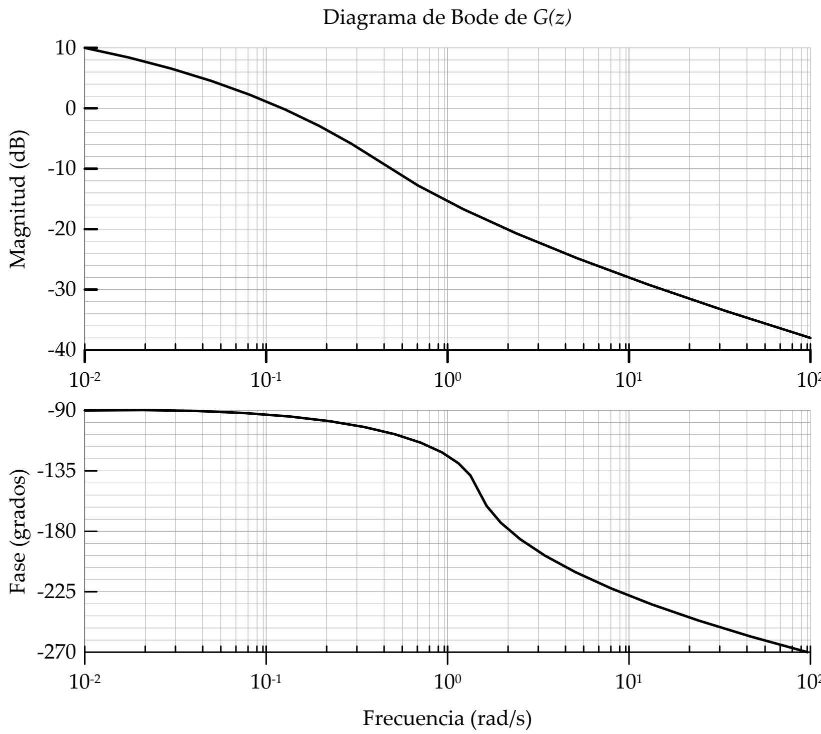


Figura 4: Diagrama de Bode de $G(z)$.

4. (20 puntos) Determine la solución, en forma cerrada, de la transformada z de la función $f(k)$ representada en la figura 5.

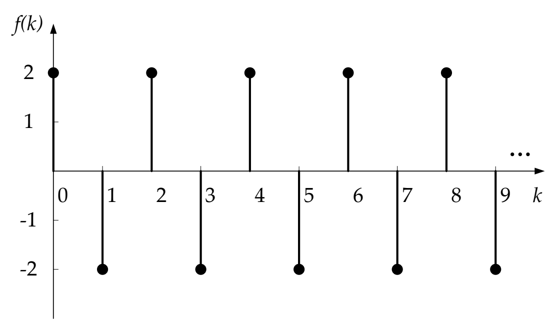


Figura 5: Señal en tiempo discreto $f(k)$.

$$P = -\frac{1}{2} + \pi j$$

$$\frac{W_s}{2} = 2\pi \rightarrow W_s = 4\pi = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{1}{2}\, s$$

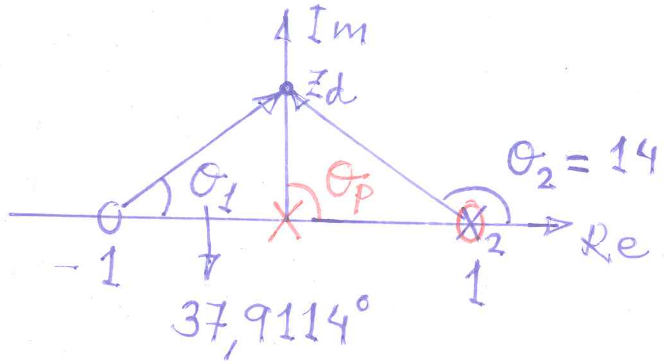
$$Z = e^{sT} = e^{\left(-\frac{1}{2}+\pi j\right)\cdot\frac{1}{2}} = e^{-1/4} \cdot e^{\pi/2\, j}$$

$$\left.\begin{aligned} |Z| &= e^{-1/4} = 0{,}7788 \\ \angle Z &= \frac{\pi}{2}\ \text{rad}\ (90^\circ) \end{aligned}\right\} Z_d = 0 \pm 0{,}7788 j$$

$$G(z) = Z\left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = (1 - z^{-1})\, Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

$$\angle G(z) = \theta_1 - 2\theta_2$$
$$= -246{,}265^\circ \neq -180^\circ$$



$$\theta_2 = 142{,}088^\circ = \theta_c$$

$$G_D(z) = K \cdot \frac{z-c}{z}$$

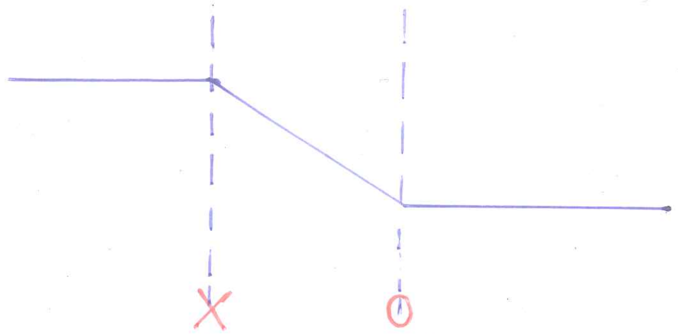
- EL CERO DEL REGULADOR DEBE ANULAR UN POLO DE G(Z) SITUADO EN Z = 1, A FIN DE SUPRIMIR LA INESTABILIDAD.
- $\angle G_D(z)G(z) = \theta_1 + \cancel{\theta_c - \theta_2} - \theta_2 - \theta_p$

$$= 37{,}9114^\circ - 142{,}088^\circ - 90^\circ = -194{,}1766^\circ$$

NO SATISFACE LAS CONDICIONES DE DISEÑO

COMPENSADOR MEDIANTE ATRASO DE FASE

$$G_c(s) = K_c\beta \cdot \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \cdot \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \; ; \; \beta > 1$$



$$1 \text{ rad/s} = \frac{1}{\beta T} \qquad 1/T = 4 \text{ rad/s} \Rightarrow T = 1/4$$

$$\longrightarrow \beta = 4$$

$$w_m = \frac{1}{\sqrt{\beta} \cdot T} = 2 \text{ rad/s}$$

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{1-\beta}{1+\beta} = \frac{-3}{5} \longrightarrow \phi_m \cong -37^\circ$$

$$G_c(jw) = K_c\beta \cdot \frac{jwT+1}{jw\beta T+1}$$

$w \to \infty \Rightarrow G_c(jw) \to K_c$

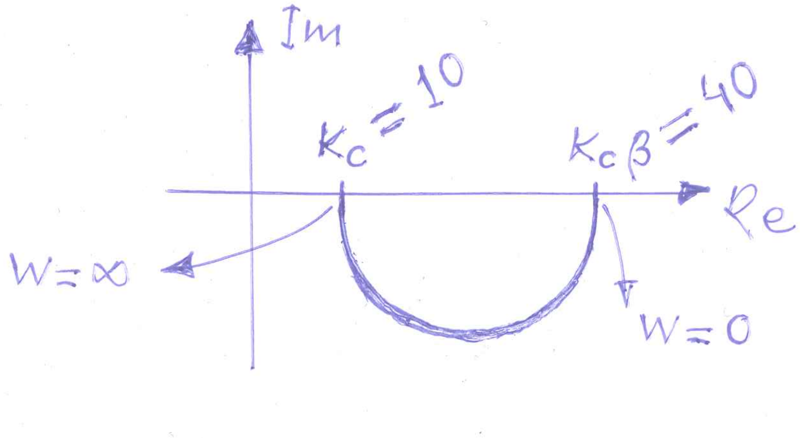
$20\,dB = 20\log K_c \to K_c = 10$

$w \to 0 \Rightarrow G_c(jw) \to K_c\beta$

$20\log K_c\beta \cong 32\,dB$

$$G_c(s) = 40\,\frac{\frac{1}{4}s+1}{s+1}$$

$$= 10 \cdot \frac{s+4}{s+1}$$



$$\underline{/G_c(jw_1)} = -180^\circ + MF - \underline{/G(jw_1)} = -180^\circ + 24^\circ + 216^\circ = 60^\circ$$

EN $w_1 = 6$ rad/s

$$|G_c(jw_1)| = \frac{1}{|G(jw_1)|} = 20$$

$$|G(jw_1)| = -26\,dB$$

EN VALORES ABSOLUTOS: 0,05

$$G_c(jw) = K_p\left(1 + j\left(wT_D - \frac{1}{wT_i}\right)\right)$$

$$K_p = |G_c(jw_1)| \cos \underline{/G_c(jw_1)} = 10$$

$$K_p\left(w_1 T_D - \frac{1}{w_1 T_i}\right) = |G_c(jw_1)| \operatorname{sen} \underline{/G_c(jw_1)} = 10\sqrt{3}$$

$$\frac{K_p\left(w_1 T_D - \frac{1}{w_1 T_i}\right)}{K_p} = w_1 T_D - \frac{1}{w_1 T_i} = \sqrt{3}$$

SI $T_i = \alpha T_D \Rightarrow w_1^2 \alpha T_D^2 - \sqrt{3}\alpha w_1 T_D - 1 = 0$

$T_D = 0,3178 \rightarrow T_i = 0,9534$

$\cancel{T_D = -0,0291}$

VALOR DE GANANCIA CRÍTICO (PARA $z = -1$) $\Rightarrow \alpha = 3$

$$K = -\frac{1}{T(z)} = -\left.\frac{z(z-0,5)}{z+0,5}\right|_{z=-1} = 3$$

$$K_D = K_p T_D = 3,178$$

$$K_i = K_p / T_i = 10,489$$

$$K_1 = K_p + \frac{K_D}{T} + K_i T = 21,6$$

$$K_2 = K_i T - \frac{2K_D}{T} = -7,47$$

$$K_3 = \frac{K_D}{T} - K_p = -3,64$$

$$G_R(z) = \frac{K_1 + K_2 z^{-1} + K_3 z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

$$G_R(z) = \frac{21,6 - 7,47 z^{-1} - 3,64 z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

$$f(k) = 2\cos k\pi$$

$$F(z) = 2 \cdot \frac{1 - z^{-1}\cos\pi}{1 - 2z^{-1}\cos\pi + z^{-2}}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} = 2 \cdot \frac{z^2 + z}{z^2 + 2z + 1}$$

$$= 2 \cdot \frac{z(z+1)}{(z+1)^2} = 2 \cdot \frac{z}{z+1}$$