

Apellidos: _____ Nombre: _____

IMPORTANTE

- ⊕ Duración del examen: **90 minutos**
- ❗ No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- ❗ No se permite ningún tipo de documentación
- ❗ Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- ❗ Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (30 puntos) Sea un sistema de control digital, con realimentación unitaria y período de muestreo $T = 1$ s, cuya función de transferencia en lazo abierto obedece a

$$G(z) = \frac{K(0,3679z + 0,2642)}{(z - 0,3679)(z - 1)}$$

Determine, mediante el test de estabilidad de Jury, el rango de valores de K que garantizan la estabilidad del sistema considerado.

2. (40 puntos) Sea el sistema de control digital mostrado en la figura 1. Diseñe un controlador $G_D(z)$, de forma que la respuesta en lazo cerrado presente un tiempo de establecimiento mínimo, con un error en régimen permanente nulo y sin oscilaciones en régimen permanente ante una entrada rampa unidad.

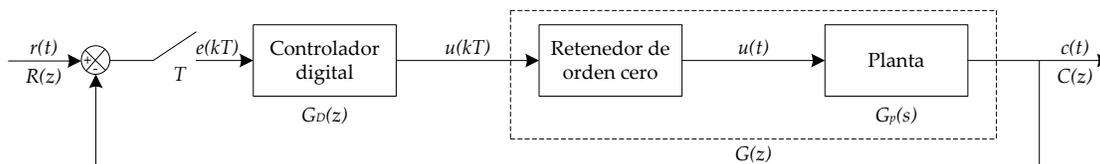


Figura 1: Sistema de control digital considerado.

Se asume un período de muestreo T de 1 s, una respuesta transitoria que debe finalizar una vez transcurridos tres períodos de muestreo, y la función de transferencia de la planta obedece a

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2}$$

3. (30 puntos) Considere la siguiente ecuación característica.

$$P(z) = z^3 - 1,3z^2 - 0,08z + 0,24 = 0.$$

- (a) (10 puntos) Demuestre que si se considera

$$s = \frac{z + 1}{z - 1}$$

como transformación bilineal, el interior del círculo unidad en el plano z se mapea al semiplano izquierdo del plano s .

- (b) (20 puntos) Determine, conforme a la transformación bilineal del apartado anterior y al criterio de estabilidad de Routh, cuántas raíces de la ecuación característica presentan un módulo superior a la unidad.

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K(0,3679z + 0,2642)}{z^2 + (0,3679K - 1,3679)z + 0,3679 + 0,2642K}$$

$$P(z) = z^2 + (0,3679K - 1,3679)z + 0,3679 + 0,2642K = 0$$

$$P(z) = a_0 z^2 + a_1 z^1 + a_2 z^0$$

$$1.- \quad |a_2| < a_0$$

$$|0,3679 + 0,2642K| < 1 \rightarrow -5,1775 < K < 2,3925$$

$$2.- \quad P(z) \Big|_{z=1} > 0$$

$$1 + 0,3679K - 1,3679 + 0,3679 + 0,2642K > 0$$

$$0,6321K > 0$$

$$K > 0$$

$$3.- \quad P(z) \Big|_{z=-1} > 0 \quad \text{PARA } n=2 \text{ PAR}$$

$$1 - 0,3679K + 1,3679 + 0,3679 + 0,2642K > 0$$

$$2,7358 - 0,1037K > 0$$

$$K < 26,382$$

$$\boxed{0 < K < 2,3925}$$

$$G(z) = z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = (1 - z^{-1}) z \left\{ \frac{1}{s^3} \right\} = \frac{(1 + z^{-1}) z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^2}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z) G(z)}{1 + G_D(z) G(z)} = F(z) = \frac{z+1}{2(z-1)^2}$$

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} = 0,5 z^{-1} + \dots$$

CON ENTRADA RAMPADA UNIDAD, $1 - F(z) = (1 - z^{-1})^2 N(z)$

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{C(z)}{R(z)} \cdot \frac{R(z)}{G(z)} = F(z) \cdot \frac{R(z)}{G(z)} = F(z) \cdot \frac{z}{1+z^{-1}}$$

PARA QUE $U(z)$ PRESENTE UN NÚMERO FINITO DE TÉRMINOS $F(z)$ DIVISIBLE POR $1+z^{-1} \rightarrow F(z) = (1+z^{-1}) F_1(z)$. LUEGO $U(z) = 2 F_1(z)$

$$1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3} = (1 - z^{-1})^2 N(z) \quad (1)$$

$$N(z) = 1 + (2 - a_1) z^{-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2(2 - a_1) - (1 + a_2) = 0 \\ 2 - a_1 + a_3 = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} = (1 + z^{-1}) F_1(z) \quad a_1 = 1,25$$

$$F_1(z) = a_1 z^{-1} + (a_2 - a_1) z^{-2} \quad a_2 = 0,5$$

$$a_1 - a_2 + a_3 = 0 \quad a_3 = -0,75$$

(3)

$$N(z) = 1 + 0,75 z^{-1}$$

$$F_1(z) = 1,25 z^{-1} (1 - 0,6 z^{-1})$$

$$F(z) = 1,25 z^{-1} (1 + z^{-1}) (1 - 0,6 z^{-1})$$

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z) (1 - z^{-1})^2 N(z)} = \frac{2,5 (1 - 0,6 z^{-1})}{1 + 0,75 z^{-1}}$$

$$P(z) = z^3 - 1,3z^2 - 0,08z + 0,24 = 0$$

$$z = \frac{s+1}{s-1}, \quad \text{SI } s = \sigma + j\omega$$

$$|z| = \left| \frac{s+1}{s-1} \right| = \left| \frac{\sigma + j\omega + 1}{\sigma + j\omega - 1} \right| < 1; \quad \frac{(\sigma+1)^2 + \omega^2}{(\sigma-1)^2 + \omega^2} < 1$$

$$(\sigma+1)^2 + \omega^2 < (\sigma-1)^2 + \omega^2 \rightarrow \sigma < 0$$

$$\left(\frac{s+1}{s-1} \right)^3 - 1,3 \left(\frac{s+1}{s-1} \right)^2 - 0,08 \frac{s+1}{s-1} + 0,24 = 0$$

$$-0,14s^3 + 1,06s^2 + 5,10s + 1,98 = 0$$

$$s^3 - 7,571s^2 - 36,43s - 14,14 = 0$$

| | | |
|-------|--------|--------|
| s^3 | 1 | -36,43 |
| s^2 | -7,571 | -14,14 |
| s^1 | -38,30 | 0 |
| s^0 | -14,14 | |

UN CAMBIO DE SIGNO \rightarrow UNA RAÍZ CON PARTE REAL POSITIVA EN EL PLANO S; UNA RAÍZ FUERA DEL CÍRCULO DE RADIO UNIDAD EN EL PLANO Z.