Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________

IMPORTANTE

- Duración del examen: **90 minutos**
- No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- No se permite ningún tipo de documentación
- Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (25 puntos) Considere un sistema de control, con realimentación unitaria, cuya función de transferencia en lazo abierto obedece a

$$H(s) = \frac{K(s+2)}{s^3 + 2s^2 + 15s}.$$

Determine, para un margen de fase de 30°, el factor de ganancia A que ha de multiplicar a una entrada rampa unitaria, a fin de obtener un error en régimen permanente inferior al 50 %.

2. (25 puntos) Considere el sistema de control, con realimentación unitaria, mostrado en la figura 1.

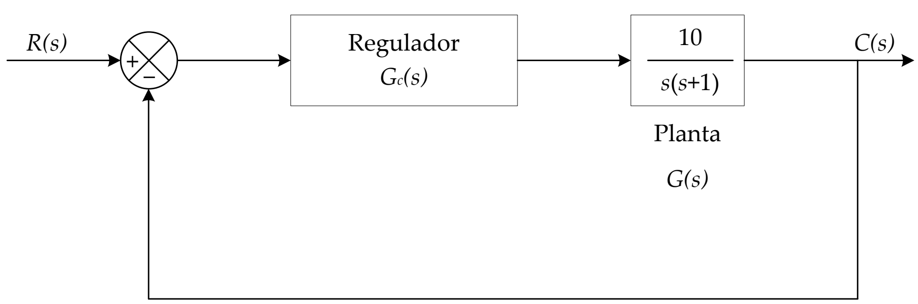


Figura 1: Sistema de control considerado.

Diseñe un regulador $G_c(s)$ (ver **notas**, al final del enunciado, para satisfacer la función de transferencia propuesta) de manera que se cumplan las siguientes especificaciones.

1. El sistema de control, forzado a un máximo sobreimpulso, ante una entrada escalón unidad, presentaría un ancho de banda, próximo a la frecuencia de resonancia, de 3 rad/s.

2. En modo de operación normal la frecuencia natural amortiguada w_d asciende a 2,6 rad/s, con lo que se obtiene un tiempo de subida t_R de 2,417 s.
3. El diseño del regulador atiende al método de cancelación polo/cero.

Notas:

$$G_c(s) = \frac{K_c(T_1 s + 1)}{(T_2 s + 1)}, \quad \text{con } 0 < T_1, T_2 < 10. \quad t_R = \frac{2\pi}{w_d}.$$

3. (15 puntos) Sea la transformada de Laplace

$$X(s) = \frac{s+3}{(s^2+2s+2)(s+1)}.$$

Obtenga la señal $x(k)$, en forma cerrada y para un período de muestreo T, sirviéndose del método de expansión en fracciones simples.

4. (15 puntos) Sea la siguiente ecuación en diferencias,

$$y(k+2) - y(k+1) + 0,25y(k) = x(k).$$

1. Determine la función de transferencia $H(z) = Y(z)/X(z)$, suponiendo que la señal de salida del sistema es nula ante la ausencia de señal de entrada.
2. Obtenga la respuesta al impulso, $h(k)$, sirviéndose del método de la integral de inversión.

5. (20 puntos) Determine la transformada z de las siguientes funciones.

1. $f(k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \cos(\alpha_0 k) u(k)$.
2. $f(k) = k \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k-2) \right)$.

$$\angle H(jw) = -150^\circ = \tan^{-1}\frac{w}{2} - 90^\circ - \tan^{-1}\frac{2w}{15-w^2}$$

$$-60^\circ = \tan^{-1}\frac{w}{2} - \tan^{-1}\frac{2w}{15-w^2} \rightarrow w_c = 4{,}7 \text{ rad/s}$$

PARA $w_c = 4{,}7$ rad/s $\longrightarrow |H(jw_c)| = 1$

$$\frac{K\cdot(w_c^2+4)^{1/2}}{w_c\left(4w_c^2+(15-w_c^2)^2\right)^{1/2}} = 1 \longrightarrow K = 10{,}82$$

ENTRADA RAMPA : $R(s) = \frac{A}{s^2}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}}{1+H(s)}\cdot\frac{A}{s^{\cancel{2}}} = \frac{A}{\lim_{s\to 0} s\cdot H(s)} = \frac{A}{\frac{2K}{15}} < 0{,}5$$

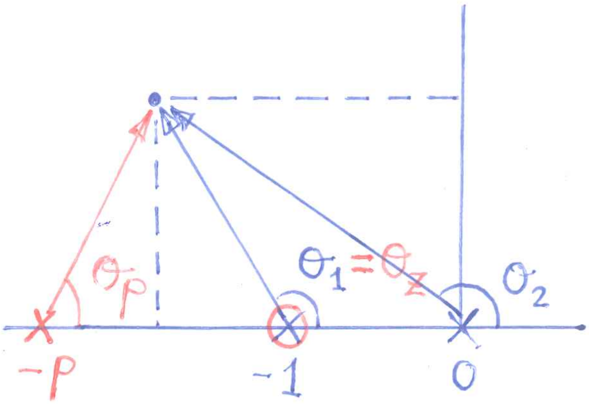
$$A < \frac{2\cdot 0{,}5\cdot K}{15} < \frac{K}{15}$$

$$\Delta B \simeq w_r = w_n\sqrt{1-2\xi^2} \;;\; \text{PARA } M_p \to 1,\ \xi \to 0$$

$$\Delta B \simeq w_r = w_n = 3 \text{ rad/s}$$

$$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} = 2{,}6 \text{ rad/s} \to \xi = 0{,}5$$

$$s_d = -\xi w_n \pm w_n\sqrt{1-\xi^2}\,j = -1{,}5 \pm 2{,}5981\,j$$



$$\angle G(s)\big|_{s_d} = -\theta_1 - \theta_2$$

$$= -100{,}89^\circ - 120^\circ = -220{,}89^\circ \neq -180^\circ$$

DESVIACIÓN ANGULAR $= 40{,}89^\circ$

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = \frac{K_c T_1}{T_2}\,\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

DADO QUE $0 < T_1, T_2 < 10$ NO PUEDE CANCELARSE EL POLO EN EL ORIGEN.

$$\angle G_c(s)G(s)\big|_{s_d} = \cancel{\theta_z} - \theta_p - \cancel{\theta_1} - \theta_2 = -180^\circ \to \theta_p = 60^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \frac{2{,}5981}{p - 1{,}5} \to p = 3$$

$$G_c(s) = 3K_c \cdot \frac{s+1}{s+3}$$

$$\left| 3K_c \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s+3} \cdot \frac{10}{s\,\cancel{(s+1)}} \right|_{s_d} = 1 \longrightarrow K_c = \left| \frac{s(s+3)}{30} \right|_{s_d} = 0{,}3$$

$$G_c(s) = 0{,}9 \cdot \frac{s+1}{s+3}$$

$$X(s) = \frac{s+3}{(s^2+2s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+D}{s^2+2s+2}$$

$$A = (s+1)\,X(s)\Big|_{s=-1} = 2$$

$$\frac{s+3}{(s^2+2s+2)(s+1)} = \frac{2s^2+4s+4+Bs^2+Ds+Bs+D}{(s^2+2s+2)(s+1)}$$

$0 = 2+B \rightarrow B=-2$

$1 = 4+D+B \rightarrow D=-1$

$3 = 4+D$

$$X(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2s+1}{s^2+2s+2} = X_1(s) - X_2(s)$$

$$X_1(s) = \frac{2}{s+1} = 2\cdot\frac{1}{s+1} \xrightarrow{4} x_1(t) = 2\cdot e^{-t}$$

$$X_2(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+2} = 2\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} - \frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$

$$\xrightarrow{17 \text{ y } 16} x_2(t) = 2\cdot e^{-t}\cdot\cos t - e^{-t}\cdot\sin t$$

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) = 2\cdot e^{-t} - 2\cdot e^{-t}\cdot\cos t + e^{-t}\cdot\sin t$$

$$x(KT) = \left[2e^{-KT} - 2\cdot e^{-KT}\cos KT + e^{-KT}\sin KT\right] u(KT)$$

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z y(1) - z Y(z) + z y(0) + 0{,}25\, Y(z) = X(z)$$

$$(z^2 - z + 0{,}25)\, Y(z) = X(z) + z^2 y(0) + z y(1) - z y(0)$$

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 - z + 0{,}25} \cdot X(z) + \underbrace{\frac{(z^2 - z) y(0) + z y(1)}{z^2 - z + 0{,}25}}_{\text{DEBE SER NULO}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^2 - z + 0{,}25} = \frac{1}{(z - 0{,}5)^2}$$

RESPUESTA AL IMPULSO, $X(z) = 1 \rightarrow H(z) = Y(z)$

$$h(k) = y(k) = K_1$$

$$K_1 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 0{,}5} \frac{d}{dz} \left[\cancel{(z - 0{,}5)^2} \frac{z^{k-1}}{\cancel{(z - 0{,}5)^2}} \right]$$

$$= 2 \cdot (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} u(k-1)$$

$$f(k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \cos(\alpha_0 k)\, u(k)$$

$$F(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}\cos\alpha_0 \cdot z^{-1}}{1 - \frac{2}{3} \cdot z^{-1}\cos\alpha_0 + \frac{1}{9} z^{-2}}$$

$$f(k) = k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k-2)\right)$$

$$F(z) = \frac{1}{2} z^{-2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)^2}$$