Departamento de Automática

Universidad de Alcalá

Tema 2

Sistemas de control en tiempo discreto

II. Diseño de reguladores discretos

Diseño de reguladores discretos

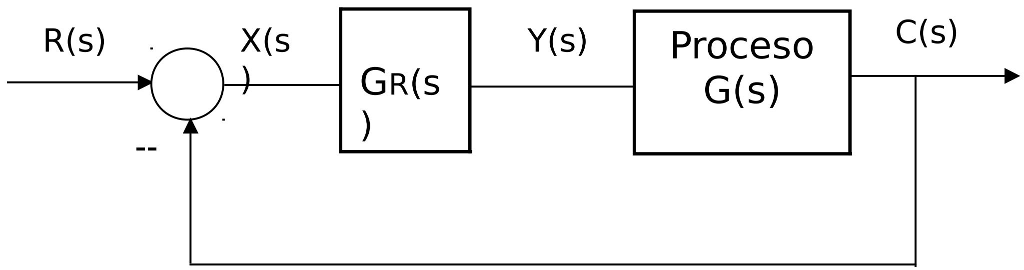
Dos métodos:

1. **Diseño continuo y discretización**.

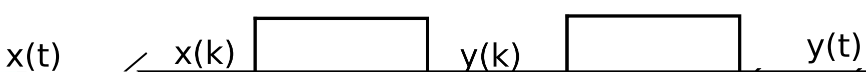
2. **Diseño discreto directo**. Se discretiza la planta y a continuación se aplica la teoría de sistemas continuos: Lugar de las R., respuesta en frecuencia,...

1. Diseño continuo y discretización

Según el siguiente diagrama de bloques, el problema consiste en diseñar un regulador $G_R(s)$ que cumpla las especificaciones deseadas, y a continuación encontrar su equivalente discreto.



- Implementación digital del regulador $G_R(s)$.



1. Diseño continuo y discretización

para obtener $G_R(z)$, existen diversos procedimientos:

- Método de las diferencias de atraso.
- Método de las diferencias de adelanto.
- Método de la transformada bilineal o de Tustin.
- Método de igualación cero polo. (MPZ).

....

1.1 Método de las diferencias de atraso (Euler Backward)

Para verlo discretizaremos una función de transferencia sencilla:

$$G_R(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s}$$ Pasando al dominio del tiempo → $$y(t) = \int_0^t x(t)dt$$

Muestreada con periodo T, resulta: $$y(kT) = \int_0^{kT} x(t)dt = \int_0^{kT-T} x(t)dt + \int_{kT-T}^{kT} x(t)dt$$

Aproximando: $y(kT) = y(kT-T) +$ Área bajo *X(t)* sobre el último *T.*

Aproximando el área como un rectángulo de base T y altura x(kT):

$$y(kT) = y(kT-T) + Tx(kT)$$ (Ecuación en diferencias $\rightarrow$Transf.. “z”)

1.2 Método de las diferencias de adelanto (Euler Forward)

Igual que en el caso anterior, sólo que a la hora de calcular el área del rectángulo, se utiliza el valor de la muestra anterior:

$$y(kT) = y(kT - T) + Tx(kT - T)$$

Ecuación en diferencias $\rightarrow$ Transf."z"

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + Tz^{-1}X(z) \Rightarrow G_R(z) = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{\frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}}} \Rightarrow s = \frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}}$$

No es muy recomendado porque el sistema puede volverse inestable en algunos casos.

1.3 Método de la transformada bilineal o de Tustin

Método de integración numérica por aproximación trapezoidal.

$$y(kT) = y(kT-T) + \frac{T}{2}\left[x(kT-T) + x(kT)\right]$$

Ecuación en diferencias$\rightarrow$Transf.“z”

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T}{2}\left[z^{-1}X(z) + X(z)\right] \Rightarrow G_R(z) = \frac{1}{\frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}} \Rightarrow s = \frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}$$

1.4 Método de la igualación cero polo. (MPZ)

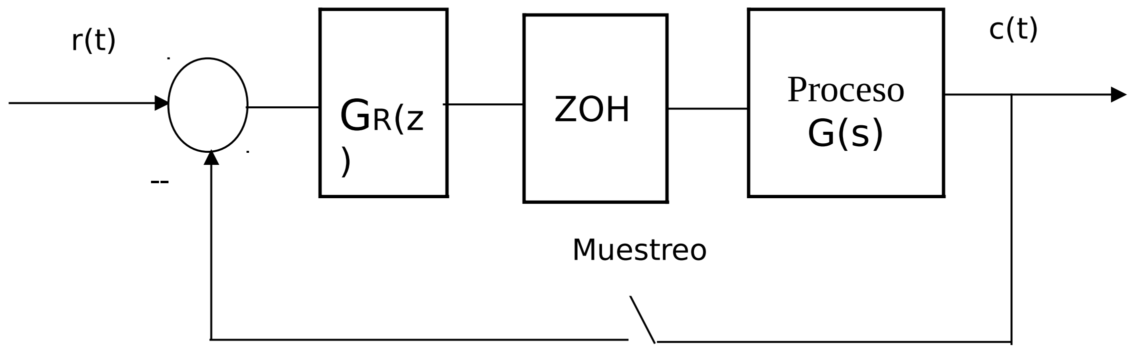
Pasos a seguir:

1. Relación entre X(s) y X(z) $\Rightarrow z = e^{sT}$
2. G(s) debe estar factorizada y se aplicará la anterior relación a todos los polos y ceros finitos:

$$G(s) = \frac{K(s+b)}{(s-c)} \Rightarrow \begin{Bmatrix} z = e^{sT} \\ z_1 = e^{-bT} \\ z_2 = e^{cT} \end{Bmatrix} \Rightarrow G(z) = \frac{K^*(z - e^{-bT})}{(z - e^{cT})}$$

3. Los ceros en el infinito se transforman en el punto z=-1. Por cada cero en el infinito se incluirá un término [z+1] en el numerador de la función. (En un sistema físico el número de ceros es menor que el de polos).
4. Finalmente, se ajusta el valor de la ganancia discreta, al

2. Diseño discreto directo

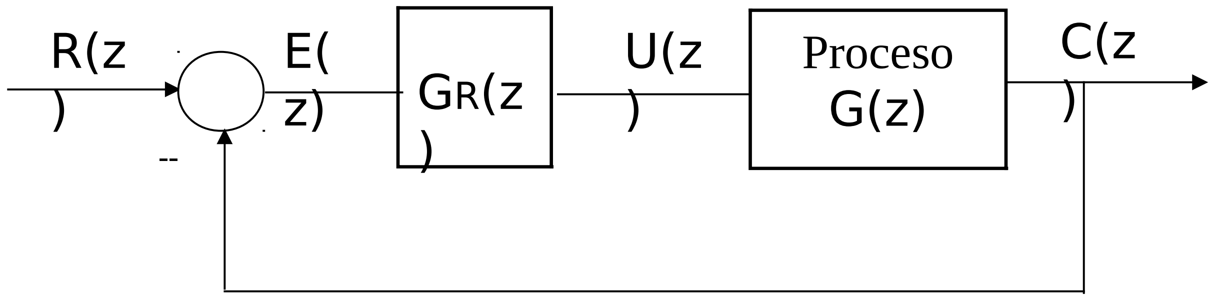


Para evitar el error cometido mediante el anterior sistema, se discretiza la función de transferencia del proceso, junto al circuito de retención ZOH: ZOH*G(s)

$$G(z) = Z[B_0 G(s)] = Z[\frac{1-e^{-sT}}{s} G(s)] = (1-z^{-1}) Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

2. Diseño discreto directo

Diagrama de bloques del sistema discretizado:



Para su estudio se aplicarán las mismas reglas que para sistemas continuos:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_R(z)G(z)}{1+G_R(z)G(z)}$$

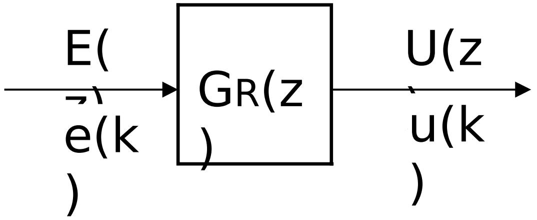
Ecuación característica → $1+G_R(z)G(z)=0$

Sistema estable: Los polos de la función de transferencia en lazo

2. Reguladores discretos empleados

Se discretizará el regulador mediante el método de las diferencias de atraso:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$



1. Regulador Proporcional (P)

$$u(k) = K_P e(k) \Rightarrow G_R(z) = K_P$$

2. Reguladores discretos empleados

2. Regulador Proporcional Derivativo (PD)

$$U(s) = K_P(1+T_D s)E(s) \Rightarrow G_R(s) = K_P(1+T_D s)$$

$$u(k) = K_P\left[e(k) + T_D \frac{e(k)-e(k-1)}{T}\right]$$

$$G_R(z) = K_P\left[1+\frac{T_D}{T}(1-z^{-1})\right] = K_P \frac{\frac{T+T_D}{T}z - \frac{T_D}{T}}{z} = K_0 \frac{z-c}{z}$$

$$c = \frac{T_D}{T_D+T} < 1$$

2. Reguladores discretos empleados

3. Regulador Proporcional Integral (PI)

$$U(s) = K_P(1+\frac{1}{T_i s})E(s)$$

$$u(k) = K_P\left[e(k)+\frac{T}{T_i}\sum_{n=0}^{k} e(n)\right]$$

$$G_R(z) = K_P\left[1+\frac{Tz}{T_i(z-1)}\right] = K_P\,\frac{(T_i+T)z-T_1}{T_i(z-1)} = K_1\,\frac{z-b}{T_i(z-1)}$$

$$b = \frac{T_i}{T_i+T} < 1$$

2. Reguladores discretos empleados

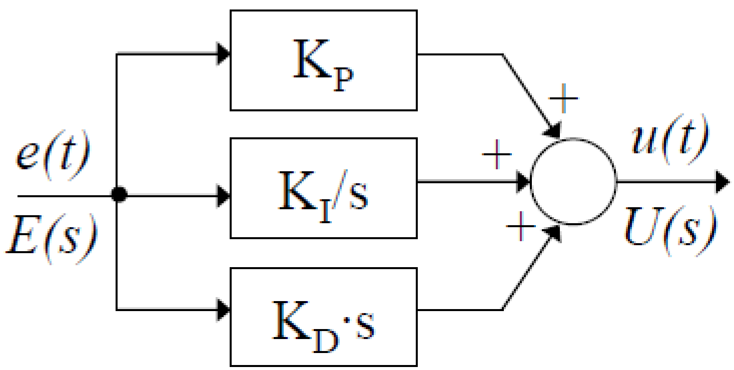
4. Regulador Proporcional Integral Derivativo(PID)

$$R(z) = K_0 K_1 \frac{(z-c)(z-b)}{T_i z(z-1)}$$

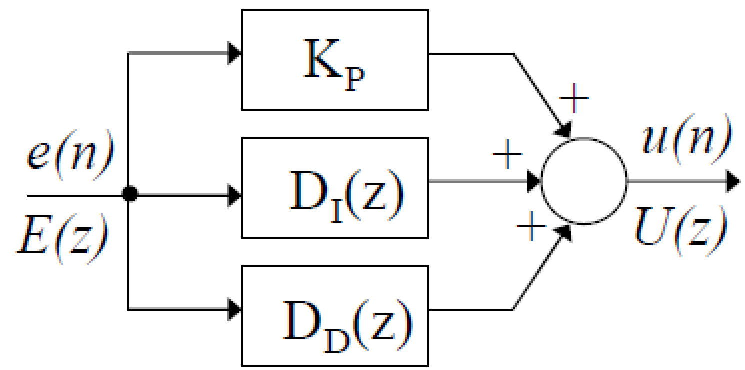
$$b = \frac{T_i}{T_i + T} < 1$$

3. Diseño de Reguladores PID digitales

Control PID analógico



Control PID digital



Función de transferencia

$$\boxed{U(s) = K_p E(s) + K_i \frac{E(s)}{s} + K_d \, s \, E(s)}$$

Función de transferencia

$$\boxed{U(z) = K_p E(z) + D_I(z) E(z) + D_D(z) E(z)}$$

3. Diseño de Reguladores PID digitales

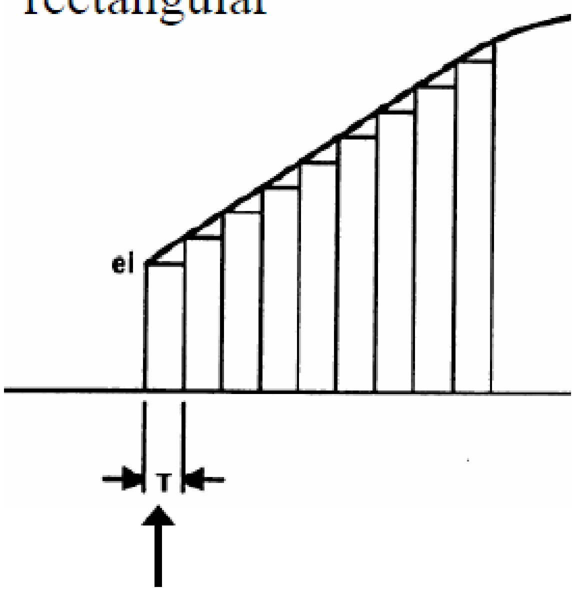
Dos técnicas de implementación del control PID digital:

- *Aproximación rectangular:*
  - El diseño se realiza en el dominio analógico y a continuación se transfiere al dominio discreto
  - Es fácil de implementar y proporciona resultados satisfactorios

- *Aproximación trapezoidal:*
  - El diseño se realiza en el dominio discreto directamente utilizando técnicas de ubicación de polos

3. Aproximación Rectangular del PID (I)

Aproximación rectangular



Término proporcional

$$K_p e(t) = K_p e(n)$$

Término integral

$$K_i \int e(t) = K_i T \sum_i e_i$$

Término derivativo

Si T es suficientemente pequeño se puede aproximar por:

$$K_d \frac{e(t)}{dt} = K_d \frac{e(n) - e(n-1)}{T}$$

Si se conoce e(n+1) se puede obtener una mejor aproximación de la derivada

$$K_d \frac{e(t)}{dt} = K_d \frac{e(n+1) - e(n)}{T}$$

Algoritmo de posición

3. Aproximación Rectangular del PID (II)

Algoritmo de posición

$$\boxed{u(n) = K_p e(n) + K_i T \sum_i e_i + K_d \left[e(n) - e(n-1)\right]/T}$$

Inconveniente: en caso de malfuncionamiento del sistema digital que calcula $u(n)$ se podría generar una salida $u(n)=0$

Algoritmo de velocidad

$$\boxed{\Delta u(n) = u(n) - u(n-2)}$$

- Es el algoritmo que se utiliza habitualmente
- El sistema de control solo calcula el incremento de la señal de control
- Presenta mejor comportamiento en arranque y frente a transitorios bruscos en la señal de referencia.

3. Algoritmo PID de velocidad

Algoritmo de velocidad

$$\boxed{\Delta u(n) = u(n) - u(n-2)}$$

$$u(n-2) = K_p e(n-2) + K_i T \sum_{i=1}^{n-2} e_i + K_d \left[e(n-1) - e(n-2)\right]/T$$

$$u(n) - u(n-2) = K_p\left[e(n) - e(n-2)\right] + K_i T\left[e(n) + e(n-1)\right] + K_d/T\left[e(n) - 2e(n-1) + e(n-2)\right]$$

$$u(n) = u(n-2) + K_1 e(n) + K_2 e(n-1) + K_3 e(n-2)$$

$$K_1 = K_p + K_d/T + K_i T$$

3. Determinación de coeficientes de PID

Método del margen de fase (MF) y margen de ganancia (MG)

Se escoge como parámetros de diseño:

- MF = 55º
- Frecuencia de transición (fase:-180º) = 100Hz

Aplicando técnicas de control clásico en el dominio frecuencial se obtiene:

$K_p = 4181$

$K_d = 9.569$

$K = 1$

MG = 77dB (f=100Hz)

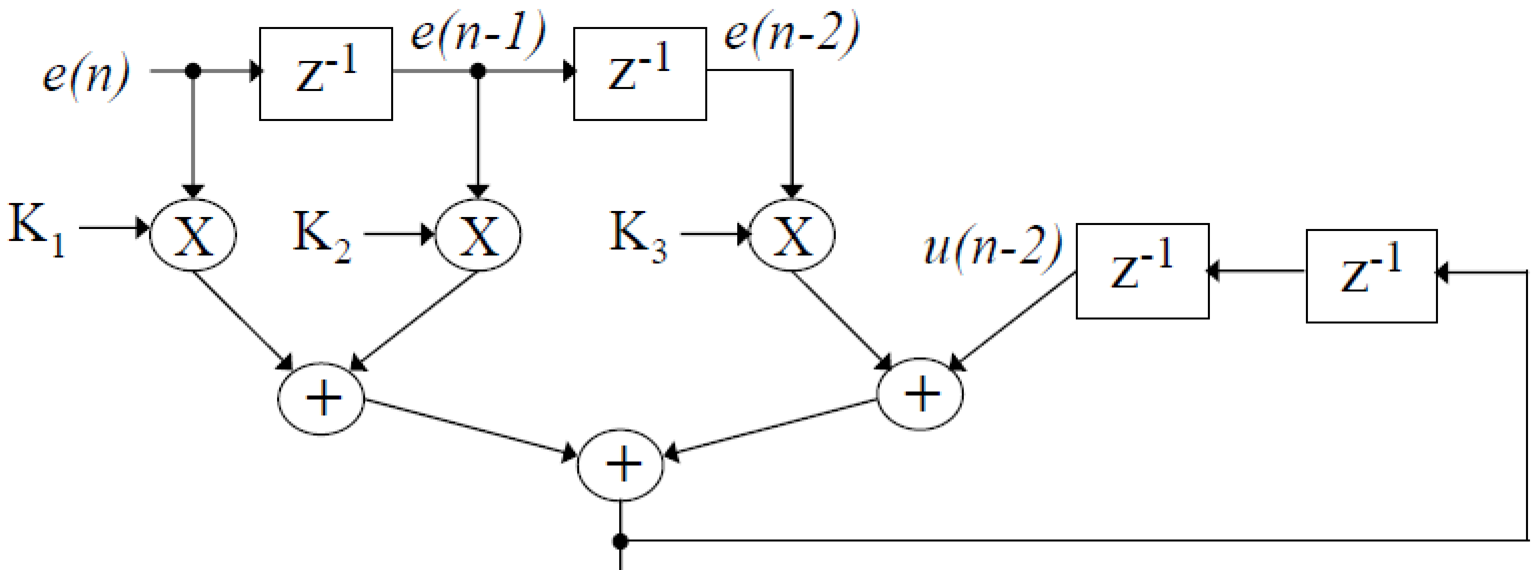
$K_1 = 13751$

$K_2 = -19138$

$K_3 = 5387$

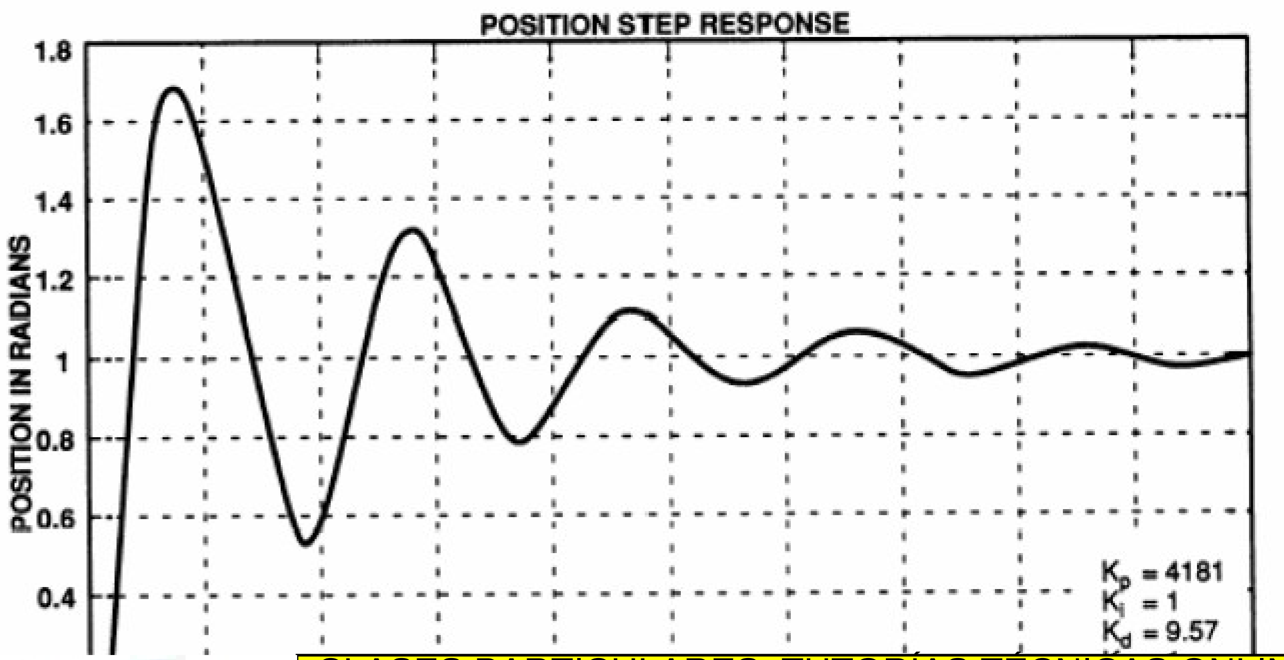
3. Implementación digital del PID

$$\boxed{u(n) = u(n-2) + K_1 e(n) + K_2 e(n-1) + K_3 e(n-2)}$$

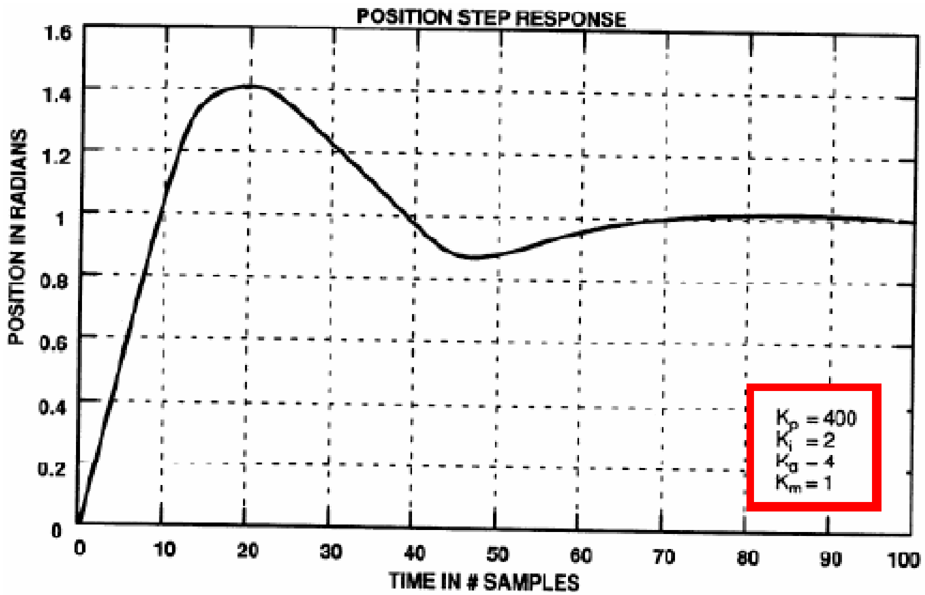


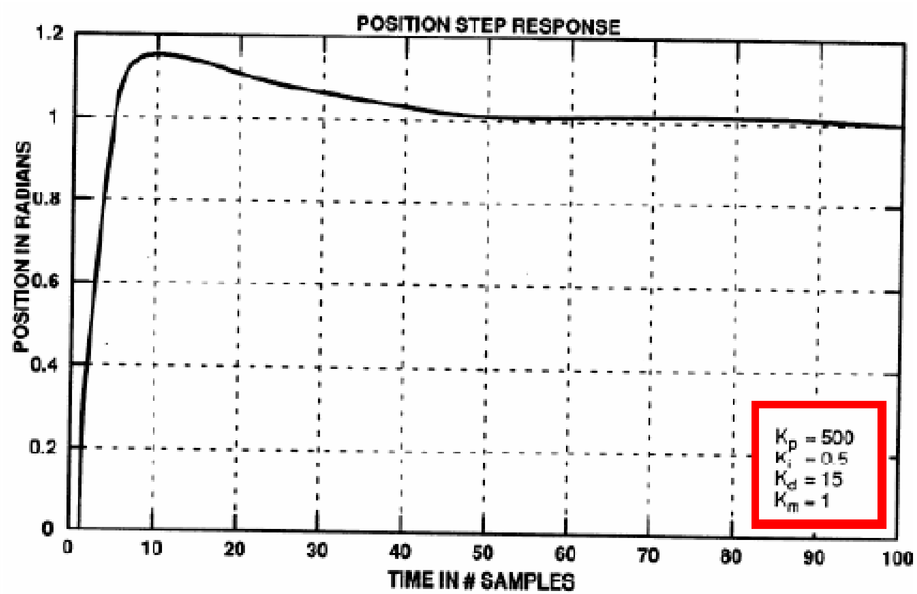
3. Repuesta a escalón con control PID (I)

$$u(n) = u(n-2) + K_1 e(n) + K_2 e(n-1) + K_3 e(n-2)$$



3. Repuesta a escalón con control PID (II)

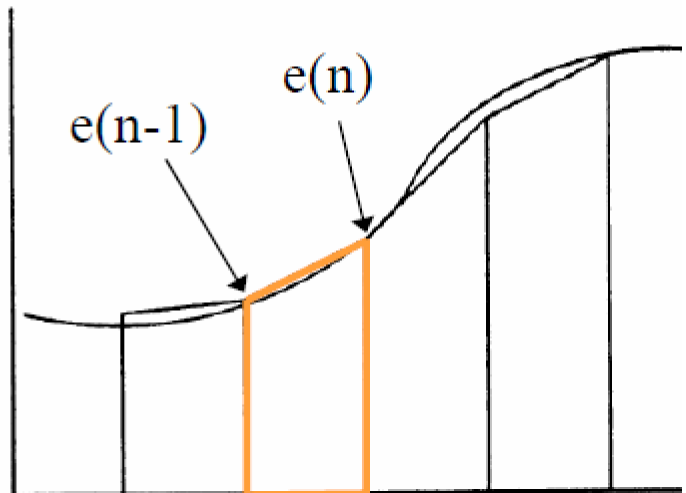




3. Aproximación Trapezoidal

- Se utiliza cuando se requiere una mayor precisión en la conversión discreta
- La integral se determina con la suma de trapezoides

Área del trapezoide: $\frac{T}{2}\left[e(n)+e(n-1)\right]$



<u>Función transferencia término integral</u>

$$u(n)=u(n-1)+K_I\frac{T}{2}\left[e(n)+e(n-1)\right]$$

$$U(z)\left(1-z^{-1}\right)=K_I\frac{T}{2}\left[1+z^{-1}\right]E[z]$$

3. Aproximación Trapezoidal

$$u(n) = K_p e(n) + K_i T \sum_i e_i + K_d \left[e(n) - e(n-1)\right]/T$$

Transformada Z de cada término

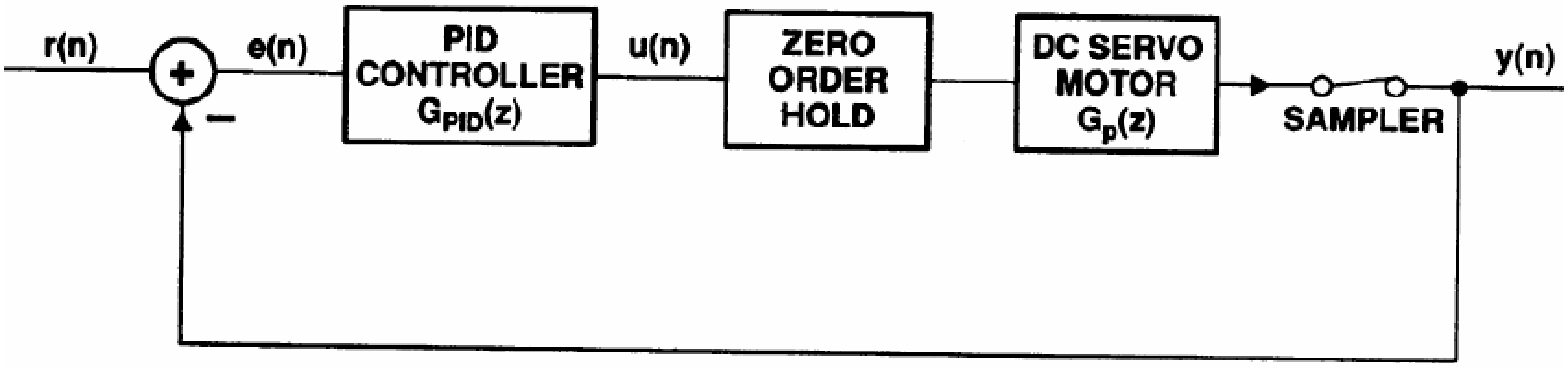
$$\boxed{U(z) = K_p E(z) + K_I \frac{T}{2}\frac{\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)} E(z) + \frac{K_d}{T}\left(1-z^{-1}\right)E(z)}$$

Función de transferencia discreta

$$\boxed{D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_I \frac{T}{2}\frac{\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)} + \frac{K_d}{T}\left(1-z^{-1}\right)}$$

Reordenando términos

3. Diseño control PID de motor DC



$$G_{PID}(z) = \frac{K_1 + K_2 z^{-1} + K_3 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$\text{Con:} \quad K_1 = K_p + \frac{K_i}{2}T + \frac{K_d}{T},\; K_2 = -K_p + \frac{K_i}{2}T - \frac{2K_d}{T},\; K_3 = \frac{K_d}{T}$$

3. Determinación coeficientes PID

$$G_s(z) = \frac{G_p(z)G_c(z)}{1+G_p(z)G_c(z)}$$ Función de transferencia global del sistema

Matlab $\Rightarrow$ ubicación de polos en 0.96, 0.95, 0.2 y 0.15

Resolviendo el denominador para la ubicación de polos propuesta se obtiene:

$K_1 = 1.4795$

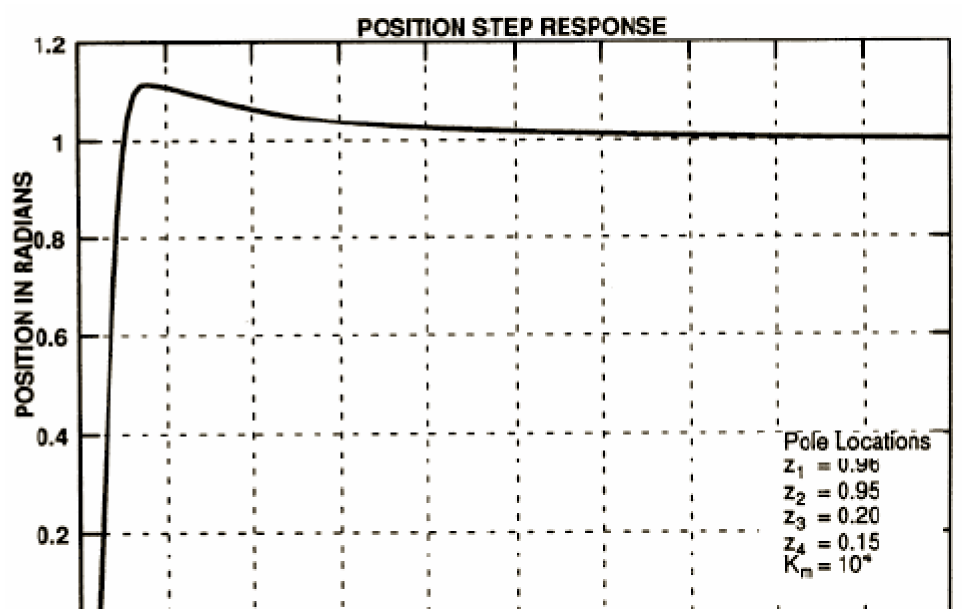
$K_2 = -2.845$

$K_3 = 1.3636$

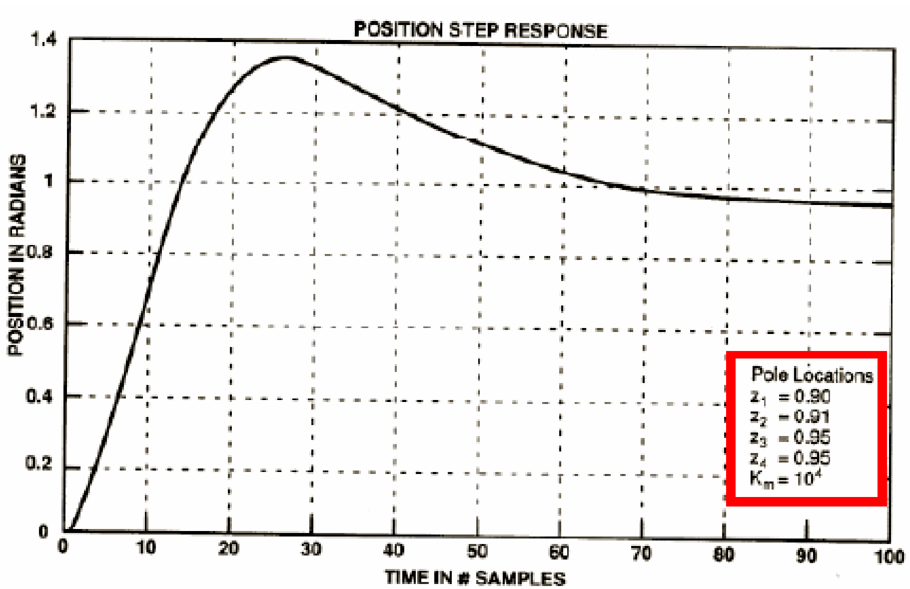
$$G_{PID}(z) = \frac{K_1 + K_2 z^{-1} + K_3 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

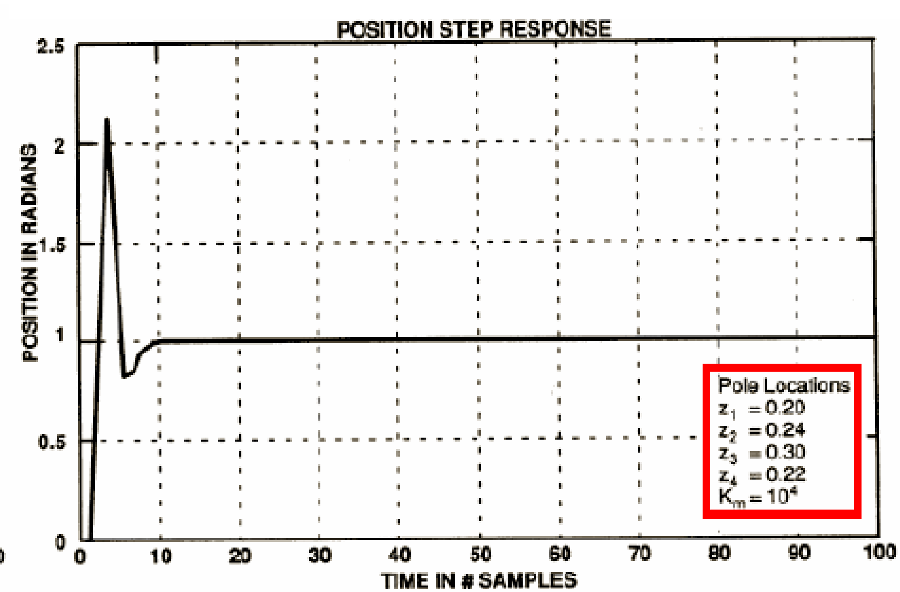
3. Respuesta al escalón con control PID (I)

$$\boxed{u(n) = u(n-1) + K_1 e(n) + K_2 e(n-1) + K_3 e(n-2)}$$



3. Respuesta al escalón con control PID (II)





Polos cerca del círculo unidad:

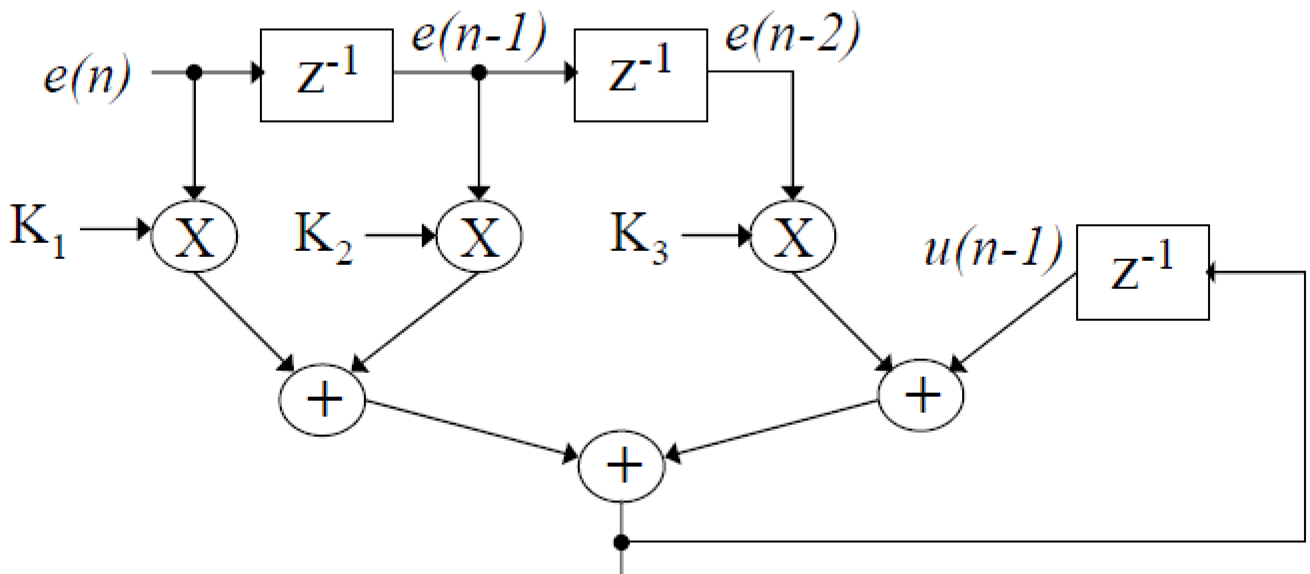
- Aumenta el tiempo de respuesta

Polos cerca del origen:

- Disminuye el tiempo de respuesta

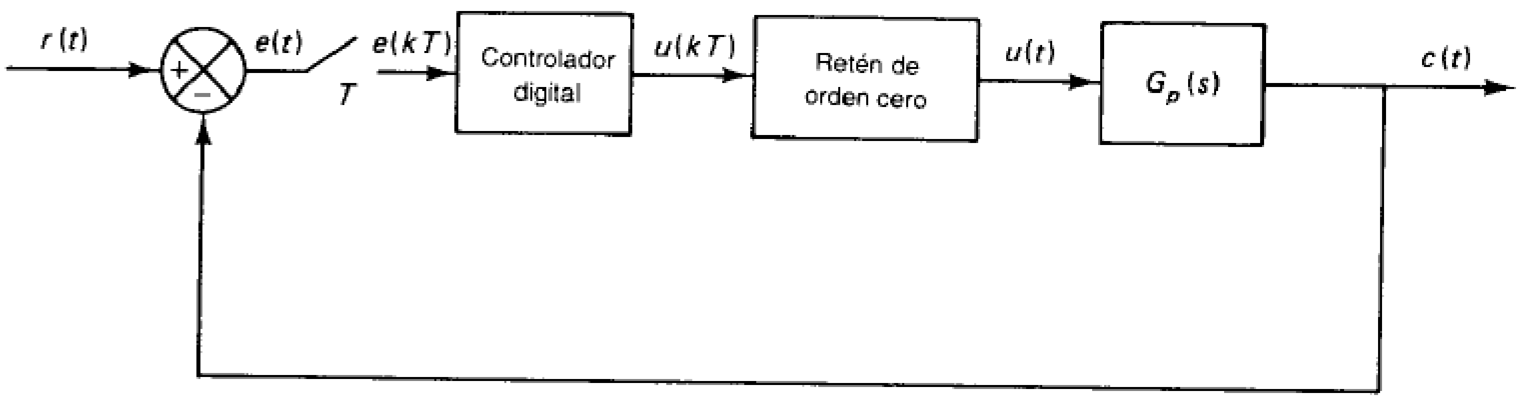
3. Implementación digital del PID

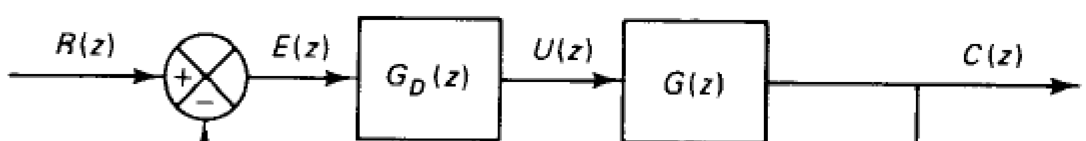
$$\boxed{u(n) = u(n-1) + K_1 e(n) + K_2 e(n-1) + K_3 e(n-2)}$$



4. Método de diseño analítico

Se desea una respuesta en lazo cerrado con tiempo de asentamiento mínimo, con un error nulo y sin oscilaciones en régimen permanente ante una entrada escalón, rampa o aceleración





4. Método de diseño analítico

Transformada z de la planta + retenedor de orden cero:

$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} G_p(s)\right]$$

Función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1+G_D(z)G(z)} = F(z)$$

El sistema, de orden *n*, debe tener un tiempo de asentamiento finito con error nulo en régimen permanente, con lo que debe presentar respuesta finita al impulso, es

4. Método de diseño analítico

Obtención de la función de transferencia del controlador:

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)(1-F(z))}$$

El sistema debe ser físicamente realizable, lo cual impone las siguientes condiciones sobre F(z) y $G_D(z)$:

1. El grado del numerador de $G_D(z)$ debe ser igual o menor que el grado del denominador.
2. Si la planta $G_p(s)$ incluye un retardo de transporte e^{Ls}, el sistema en lazo cerrado debe tener al menos el mismo retardo.

4. Método de diseño analítico

Condiciones de estabilidad:

1.Todos los polos inestables o críticamente estables de G(z) deben incluirse como ceros en 1-F(z), ya que los ceros del controlador $G_D(z)$ no deben cancelar polos inestables de G(z).

2.Los ceros de G(z) fuera del círculo unitario no deben cancelarse con polos de $G_D(z)$. Por tanto, todos los ceros de G(z) sobre o fuera del círculo unitario serán también ceros de F(z).

Demostración:

$$G(z)=\frac{G_1(z)}{z-a} \qquad a \quad Polo \quad inestable$$

$$\frac{C(z)}{R(z)}=F(z)=\frac{G_D(z)\frac{G_1(z)}{z-a}}{1+G_D(z)\frac{G_1(z)}{\cdots}}$$

4. Método de diseño analítico

Diseño del controlador:

Transformada z de la señal de error E(z):

$$E(z) = R(z) - C(z) = R(z)\left[1 - F(z)\right]$$

Valor de R(Z):

$$R(z) = \frac{P(z)}{\left(1 - z^{-1}\right)^{q+1}}$$

Entrada escalón unitario: q=0 P(z)=1
Entrada rampa unitaria: q=1 P(z)=Tz^{-1}
Entrada aceleración unitaria: q=2 P(z)=1/2 $T^2 z^{-1}(1+z^{-1})$

4. Método de diseño analítico

Diseño del controlador:

Sustituyendo, se obtiene E(z):

$$E(z) = \frac{P(z)\left[1 - F(z)\right]}{\left(1 - z^{-1}\right)^{q+1}}$$

E(z) debe tener un número finito de términos en z^{-1} para asegurar que el error en régimen permanente es cero, por tanto:

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{q+1} N(z)$$

Donde N(z) presenta un número finito de términos en z^{-1}.

Por tanto:

4. Método de diseño analítico

Diseño del controlador:

Función de transferencia total del controlador:

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)\left(1 - z^{-1}\right)^{q+1} N(z)}$$

Para una planta estable $G_p(s)$ debe cumplirse la siguiente condición para que la salida no muestre oscilaciones entre muestreos después de alcanzado el tiempo de asentamiento:

$$c(t \geq nT) = cte, \qquad para \quad entradas \quad escalón$$

$$\dot{c}(t \geq nT) = cte, \qquad para \quad entradas \quad rampa$$