

## Tema 2

# Sistemas de control en tiempo discreto

## I. Conceptos generales

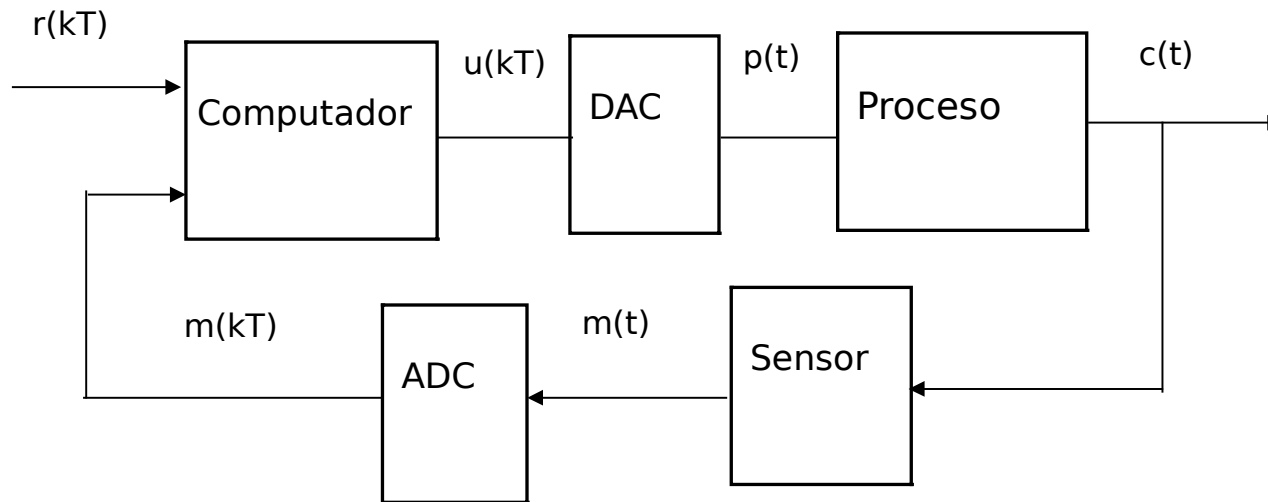
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# 1. El computador como elemento de control



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# 1. El computador como elemento de control

---

## ■ **Ventajas:**

- Se pueden realizar acciones de control más complejas.
- El cambio de regulador es más sencillo. (Flexibilidad)
- El ordenador puede realizar varios procesos a la vez. (control multivariable)
- Las operaciones son más precisas que con sistemas analógicos.
- Mayor inmunidad al ruido y distorsión. Las

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# 1. El computador como elemento de control

---

- **Inconvenientes:**

- Puede resultar costoso para sistemas sencillos.
- Requiere personal cualificado para el mantenimiento.
- **PÉRDIDA DE INFORMACIÓN:**
  - No existe control entre dos muestras consecutivas.
  - Proceso de conversión: muestreo, retención y cuantificación.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



## 2. Sistemas discretos y transformada z

---

- SISTEMA DE CONTROL DISCRETO O MUESTREADO: Sistema de control mediante computador, considerando únicamente determinados instantes de la señal continua denominados **muestras**.
- PROCESO DE DATOS: Se almacenan los datos para posteriormente ser analizados. No sucede en tiempo real.
- CONTROL DIGITAL: Control de un sistema mediante computador en tiempo real, usando

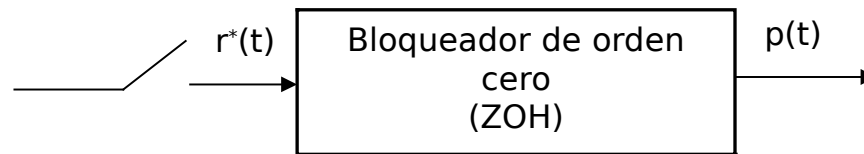
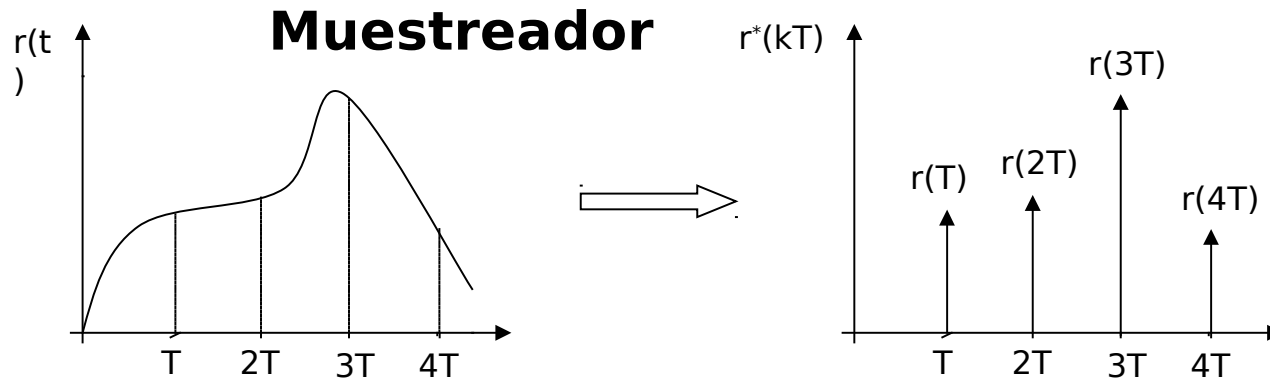
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 2. Sistemas discretos y transformada z



$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT)$$

- El ZOH mantiene la muestra constante hasta el siguiente muestreo.

Cartagena99

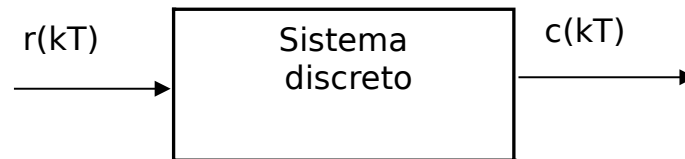
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 2. Sistemas discretos y transformada z

### Sistema discreto:



La entrada y la salida es una secuencia de números separados un intervalo  $T$  seg. que únicamente tienen un valor determinado para  $k=0,1,2,3,\dots$

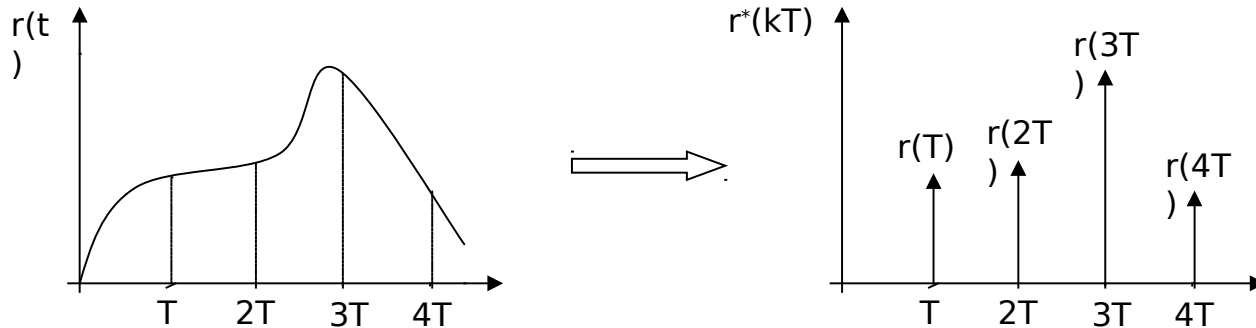
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 2. Sistemas discretos y transformada z



$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT)$$

Aplicamos transformada de Laplace  $\rightarrow \mathcal{L}\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)e^{-kTs}$

Se define  $z = e^{sT}$

y aplicamos transformada  $z \rightarrow \mathcal{Z}\{r^*(t)\} = R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)z^{-k}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



$k=0$

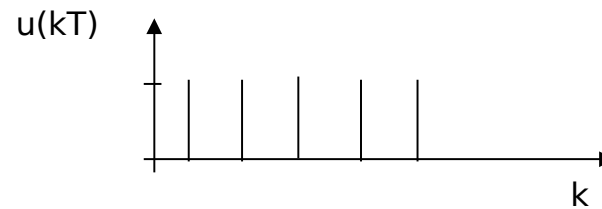
$1-z$



## 2. Sistemas discretos y transformada z

**Ejemplo:** Calcular la transformada z del escalón unitario  $r(t)=u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \dots k \geq 0 \\ 0 & \dots k < 0 \end{cases}$$



$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



## 2. Sistemas discretos y transformada z

---

### Propiedad de suma y resta

Si la señal  $y_1(kT)$  tiene la transformada  $Y_1(z)$  y la señal  $y_2(kT)$  tiene la transformada  $Y_2(z)$ , la combinación lineal de ambas tiene la siguiente transformada:

$$\mathcal{Z}[y_1(kT) \pm y_2(kT)] = Y_1(z) \pm Y_2(z)$$

### Propiedad multiplicación por una constante

$$\mathcal{Z}[c y(kT)] = c \mathcal{Z}[y(kT)] = c Y(z)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 2. Sistemas discretos y transformada z

### Propiedad del desplazamiento (retraso)

$$Z[y(k)] = Y(z)$$

$$Z[y(k-n)] = z^{-n}Y(z)$$

Un sistema discreto se puede representar mediante una ecuación en diferencias:

$$c(k) + a_1c(k-1) + a_2c(k-2) + \dots + a_nc(k-n) = b_0r(k) + b_1r(k-1) + \dots + b_mr(k-m)$$

$$C(z) + a_1z^{-1}C(z) + a_2z^{-2}C(z) + \dots + a_nz^{-n}C(z) = b_0R(z) + b_1z^{-1}R(z) + \dots + b_mz^{-m}R(z)$$

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 2. Sistemas discretos y transformada z

### Propiedad del desplazamiento (adelanto)

$$\mathcal{L}[y(kT + nT)] = z^n \left[ Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(kT)z^{-k} \right]$$

### Propiedad de traslación compleja

$$\mathcal{L}[e^{\pm\alpha kT} y(kT)] = Y(ze^{\pm\alpha T})$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 2. Sistemas discretos y transformada z

### Teorema del valor final

- En sistemas continuos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

- En sistemas discretos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 2. Sistemas discretos y transformada z

### Teorema del valor final

- **Ejemplo:** Determinar el valor de la salida en régimen permanente del siguiente sistema, cuando se le aplica a la entrada un escalón unitario:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.58(1+z)}{z+0.16} \quad r(t) = u(t)$$

$$r(k) = 1, (k \geq 0) \rightarrow R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$C(z) = \frac{0.58(1+z)}{(1-z^{-1})(z+0.16)}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



## 2. Sistemas discretos y transformada z

---

### Teorema del valor inicial

- En sistemas discretos:

$$\lim_{k \rightarrow 0} x(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Se aplica cuando deseamos calcular el valor inicial de la serie discreta.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 2. Sistemas discretos y transformada z

### Convolución real

$$\begin{aligned} Y_1(z)Y_2(z) &= \mathcal{Z} \left[ \sum_{k=0}^N y_1(kT)y_2(NT - kT) \right] = \mathcal{Z} \left[ \sum_{k=0}^N y_2(kT)y_1(NT - kT) \right] \\ &= \mathcal{Z}[y_1(kT) * y_2(kT)] \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



## 2. Sistemas discretos y transformada z

### Resumen de teoremas de la transformada Z

Suma y resta

$$\mathcal{L}[y_1(kT) \pm y_2(kT)] = Y_1(z) \pm Y_2(z)$$

Multiplicación por una constante

$$\mathcal{L}[\alpha y(kT)] = \alpha \mathcal{L}[y(kT)] = \alpha Y(z)$$

Traslación real

$$\mathcal{L}[y(k - n)T] = z^{-n}Y(z) \quad (\text{retraso})$$

$$\mathcal{L}[y(k + n)T] = z^n \left[ Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(kT)z^{-k} \right] \quad (\text{adelanto})$$

en donde  $n =$  entero positivo

Traslación compleja

$$\mathcal{L}[e^{\pm \alpha kT} y(kT)] = Y(ze^{\pm \alpha T})$$

Teorema del valor inicial

$$\lim_{k \rightarrow 0} y(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z)$$

Teorema del valor final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z)$$

si  $(1 - z^{-1})Y(z)$  no tiene polos sobre o fuera  $|z| = 1$ .

Convolución real

$$Y_1(z)Y_2(z) = \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^n y_1(kT)y_2(NT - kT) \right]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# 3. Transformada z inversa

## Métodos de cálculo

- Se descompone la función en fracciones simples y se recurre a las tablas.

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i z}{z - a_i} \implies x(k) = \sum_{i=1}^n b_i a^k$$

- Se divide el numerador entre el denominador. Al polinomio en “z” resultante se le aplica la definición de transformada z.

$$z^{-n} = \delta(k - n), \begin{cases} 1, (k = n) \\ 0, (k \neq n) \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# 3. Transformada z inversa

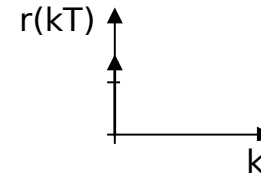
□ **Ejemplo:** Obtener la transformada z inversa de la siguiente ecuación en diferencias, correspondiente a un sistema de primer orden:

$$c(k) = ac(k - 1) + r(k)$$

Si le aplicamos un impulso definido por:

$$r(t) = \begin{cases} 1 \dots (n = 0) \\ 0 \dots (n > 0) \end{cases}$$

$$\implies R(z) = 1$$



$$c(k) = ac(k - 1) + r(k)$$

$$c(k)(1 - az^{-1}) = r(k)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

### 3. Transformada z inversa

Dos formas de hacerlo:

1. Según tablas:  $C(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \implies c(k) = a^k$

2. Otra forma es dividir el numerador entre el denominador:

$$C(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots$$

$$z^{-n} = \delta(k - n), \begin{cases} 1, & (k = n) \\ 0, & (k \neq n) \end{cases}$$

$$c(0) = 1$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



## 3. Transformada z inversa

---

### Fórmula de inversión

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Y(z) z^{k-1} dz$$

donde la trayectoria  $\Gamma$  es un círculo de radio:

$$|z| = e^{cT}$$

El valor de  $c$  es tal que contiene todos los polos  $Y(z)z^{k-1}$

La resolución de esta integral se realiza empleando el teorema de los residuos de la teoría de variable



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 4. Relación entre los planos “s” y “z”

- En sistemas continuos, la ubicación de los polos en el plano “s”, determina la estabilidad del sistema.
- Consideremos la siguiente función continua:

$$g(t) = e^{-at}, (t > 0) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s + a} \quad (\text{Un polo en } s = -a)$$

Su transformada “z” es:

$$G(z) = Z[e^{-akT}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (ze^{aT})^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

Serie geométrica de  $(ze^{aT})^{-1}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 4. Relación entre los planos “s” y “z”

- $G(z)$  Tiene un polo en  $z = e^{-aT}$
- El polo en “s”:  $s = -a$  se corresponde con el polo en el plano “z”  $z = e^{-aT}$

$$\implies z = e^{sT}$$

- La localización de los polos en el plano “z”, dependen del periodo de muestreo T.
- Relación entre polos del plano “s” y del plano “z”:

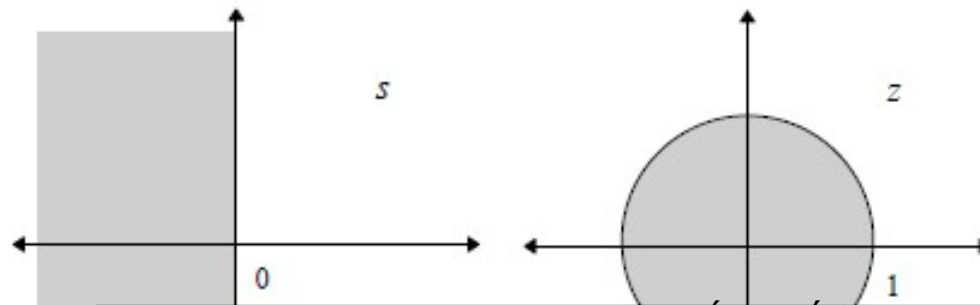
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 4. Relación entre los planos “s” y “z”

- Polos y ceros en s, cuyas frecuencias ( $\omega_d$ ) difieren en  $2\pi/T$  son mapeados en las mismas localizaciones en z, es decir, la correspondencia no es única.
- EL semiplano izquierdo de se transforma en el interior del círculo unidad en z, siendo la circunferencia unidad la imagen del eje  $s = j\omega$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

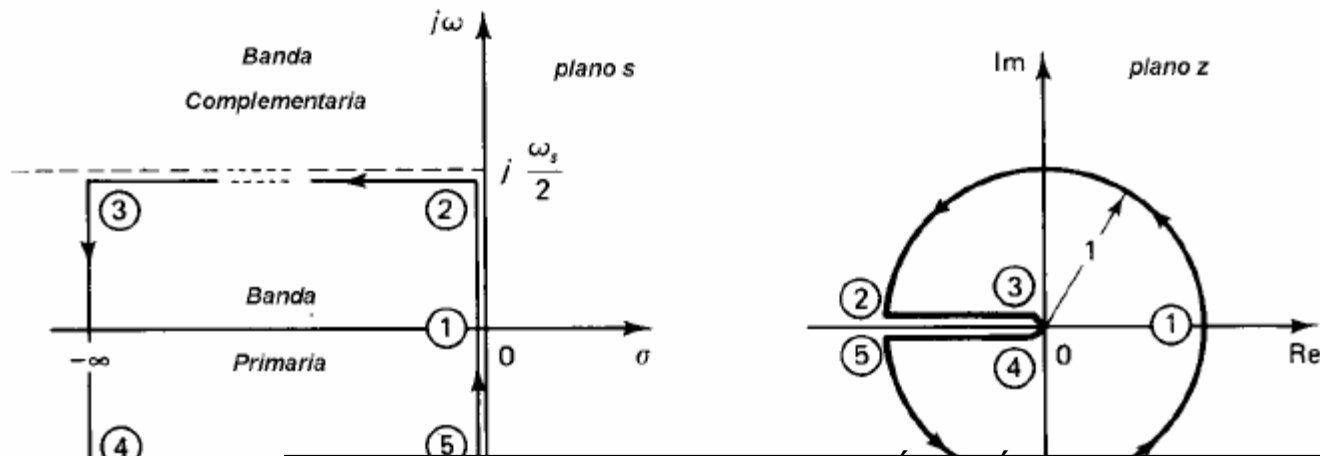
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



## 4. Relación entre los planos "s" y "z"

- Cada banda de anchura  $\omega_s$  ( $2\pi/T$ ) se mapea en el círculo unidad. A la primera banda se le llama banda primaria, y al resto bandas complementarias. Esto prueba la no unicidad del mapeo  $s \rightarrow z$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

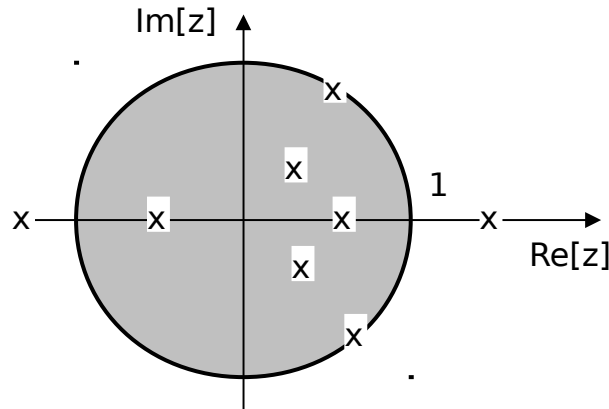
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# 5. Estabilidad

- En sistemas continuos, un sistema será estable cuando sus polos se encuentran en el semiplano izquierdo: ( $\sigma < 0$ )

$$\sigma < 0 \Rightarrow |z| = e^{\sigma T} < 1$$



**Para que el sistema discreto sea estable, todos**

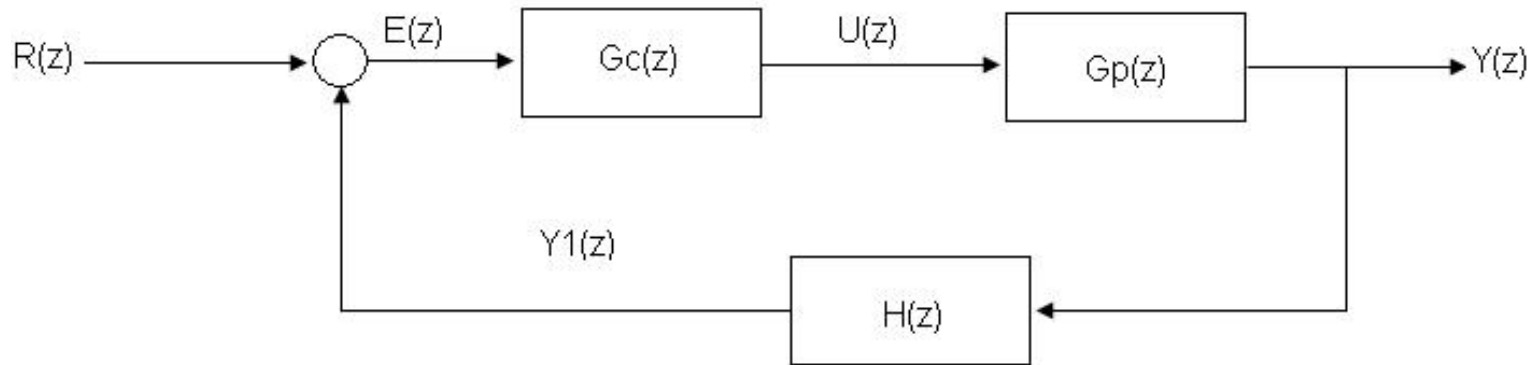
CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## 5. Estabilidad - Criterio de Jury



- Función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)H(z)}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# 5. Estabilidad – Criterio de Jury

- Criterio de estabilidad de Jury para el polinomio  $A(z)$  que representa la ecuación característica de la función de transferencia en lazo cerrado.
- El criterio define el número de raíces de  $A(z)$  que se ubica dentro del círculo unitario del plano  $Z$ .
- Condiciones:

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a^{n-1} z + a_n$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# 5. Estabilidad - Criterio de Jury

El arreglo de coeficientes es el siguiente:

donde:

$$\begin{array}{cccccccc}
 R_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & L & L & a_n \\
 R_2 & b_0 & b_1 & b_2 & L & L & b_{n-1} & 0 \\
 R_3 & c_0 & c_1 & c_2 & L & c_{n-2} & 0 & 0 \\
 M & M & M & M & & & & 
 \end{array}$$

$$b_i = a_i - a_{n-i} \alpha_1$$

$$b_0 = a_0 - a_n \alpha_1$$

$$b_1 = a_1 - a_{n-1} \alpha_1$$

$$c_j = b_j - b_{(n-1)-j} \alpha_2$$

$$c_{n-1} = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{a_n}{a_0}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# 5. Estabilidad – Criterio de Jury

- **Ejemplo 1:** Determine si  $A(z)$  tiene raíces fuera del círculo unitario (igual al número de coeficientes calculados en la primera columna que tienen signo negativo).
- Se concluye que el polinomio  $A(z)$  no tiene raíces fuera de la circunferencia unitaria y, por tanto, no tiene raíces inestables.

$$A(z) = z^3 + 0.5z^2 + 0.25z + 0.2$$

$R_1$	1	0.5	0.25	0.2	$\alpha = 0.2$
$R_2$	0.96	0.45	0.15		$\alpha = 0.15$
$R_3$	0.9375	0.3065			$\alpha = 0.38$
$R_4$	0.7911				

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 5. Estabilidad - Criterio de Jury

- **Ejemplo 2:** Determine las condiciones que deben satisfacer los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$  para que el sistema de control definido por el polinomio característico  $A(z)$  sea estable?

$$A(z) = z^2 + a_1z + a_2$$

$R_1$	1	$a_1$	$a_2$	$\alpha_1 = a_2$
$R_2$	$(1 - a_2^2)$	$a_1(1 - a_2)$		$\alpha_2 = \frac{a_1}{1 + a_2}$
$\dots$	$1 - a_1 + a_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# 5. Estabilidad - Criterio de Jury

• 1ª Condición:

• 2ª Condición:

• Conclusión:

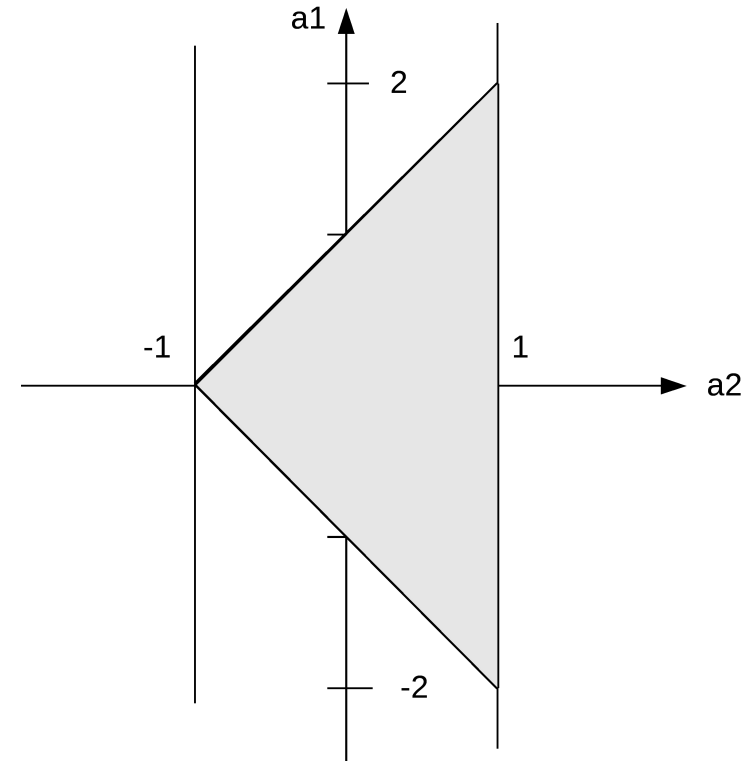
$$(1 - a_2^2) > 0$$

$$|a_2| < 1$$

$$\frac{1 - a_2}{1 + a_2} \left[ (1 + a_2)^2 - a_1^2 \right] > 0$$

$$(1 + a_2)^2 > a_1^2$$

$$1 + a_2 > |a_1|$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

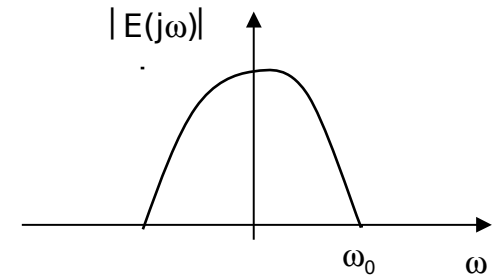
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



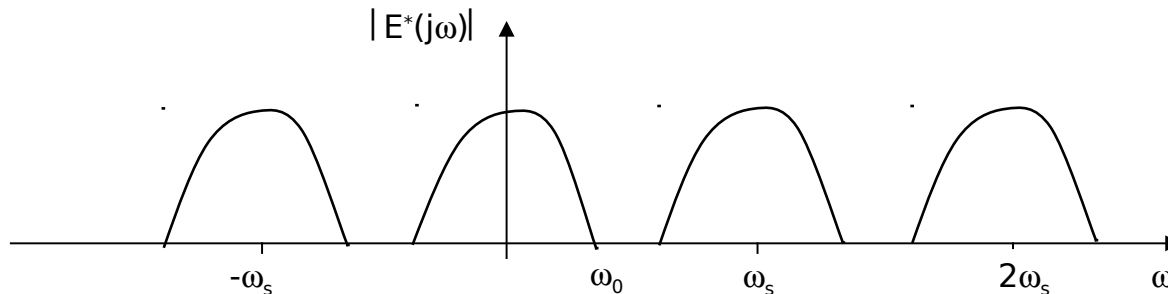
# 5. Estabilidad - Elección del periodo de muestreo

- Teorema de muestreo de Shanon: Para poder reconstruir una señal, es necesario muestrear a una frecuencia de:

$$f_s \geq 2\omega_0$$



- La señal debe estar limitada en banda. Para ello y que no se produzca el fenómeno de “aliasing” o solapamiento, se utiliza un filtro paso bajo.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$\omega_0$   $\omega_s$   $\omega$

## 6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Las especificaciones de respuesta transitoria vienen dadas por los valores de tiempo de subida, sobreoscilación y tiempo de establecimiento, relacionados con  $\xi$  y  $\omega_n$  (sistema dominante de 2º orden).
- Los valores de  $\xi$  y  $\omega_n$  determinan la ubicación de los polos del sistema en lazo cerrado en el plano  $z$  que satisfagan el transitorio. Es posible obtener diferentes lugares geométricos en el plano  $z$  usando:

$$z = e^{Ts}$$

Cartagena99

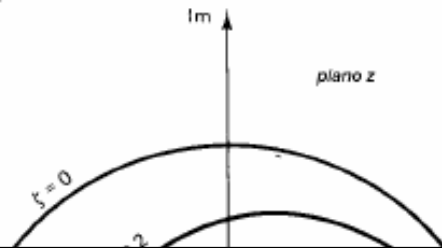
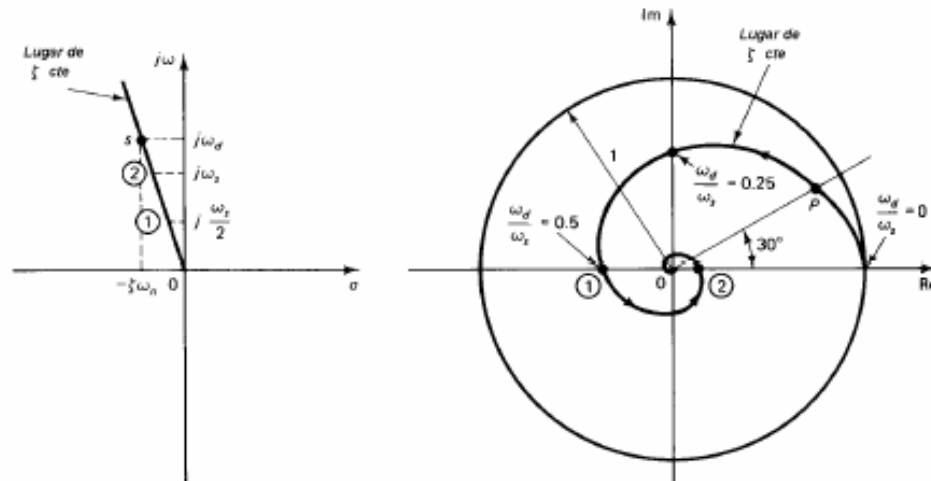
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# 6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Relación entre planos s y z.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

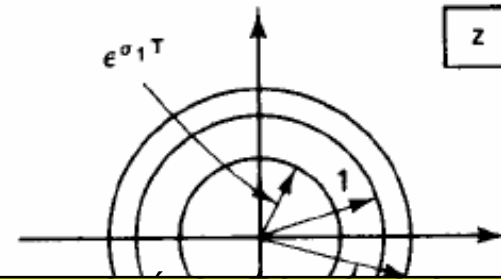
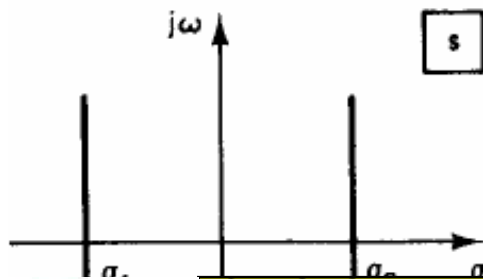
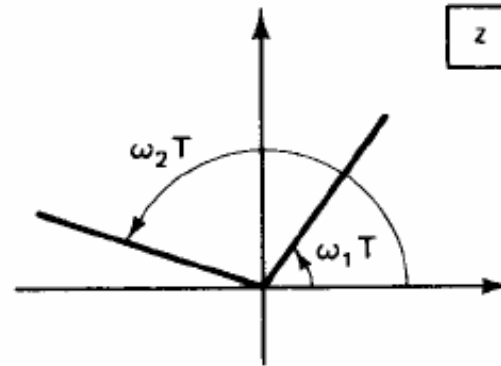
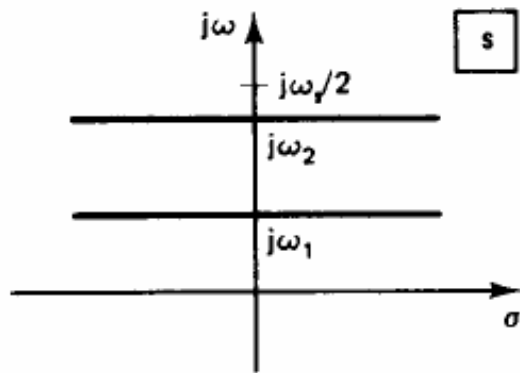
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# 6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Relación entre planos s y z.



Cartagena99

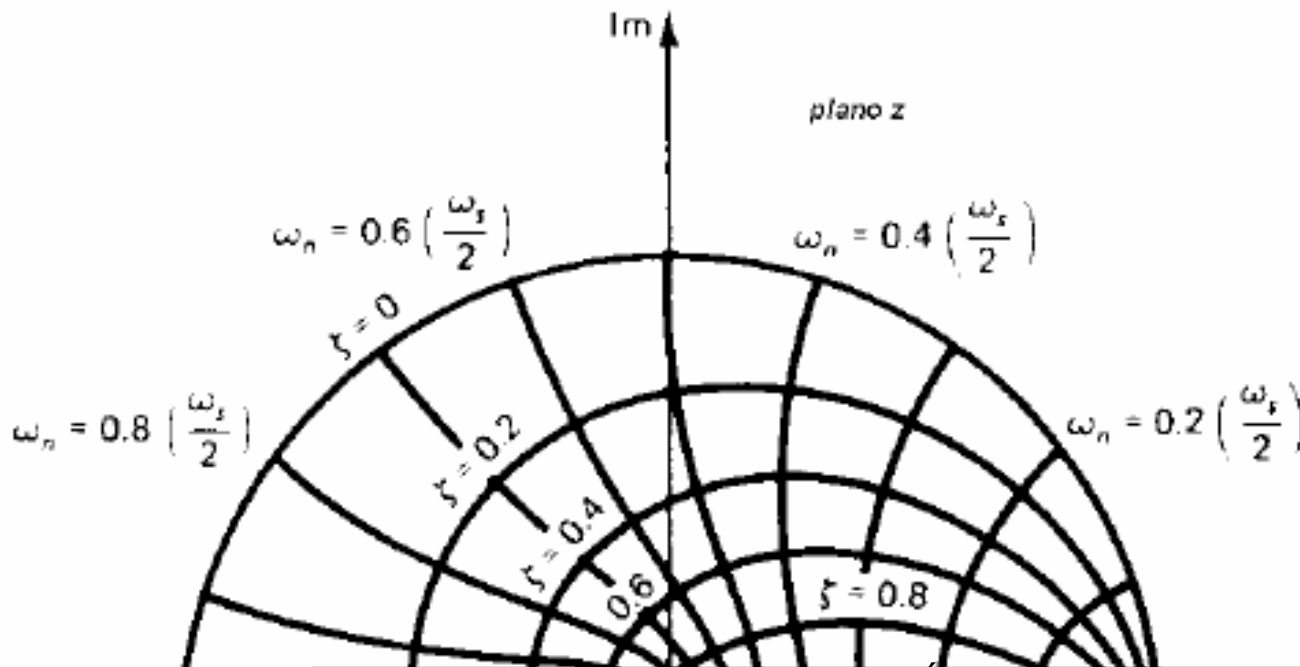
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Abaco con los lugares de  $\xi$  y  $\omega_n$  constante (en función de  $\omega_s$ )



Cartagena99

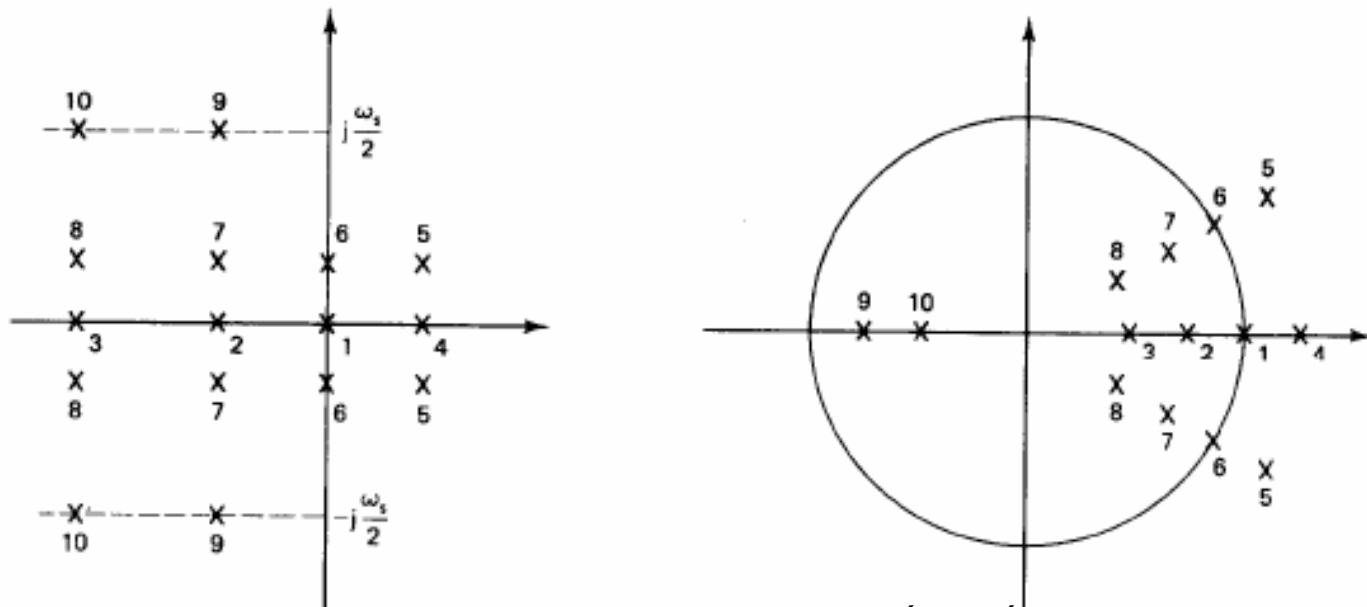
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Correspondencia entre la ubicación de los polos en el plano  $s$  y en el plano  $z$ , y efecto sobre la respuesta transitoria.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70


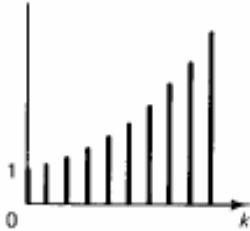

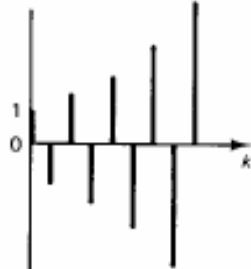



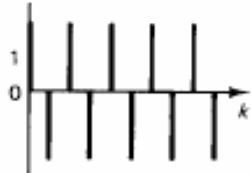
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# 6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Ubicación de los polos en el plano z: efecto sobre respuesta transitoria

$\frac{z}{z - \rho} = g(z)$			
Localización	Respuesta Temporal	Localización	Respuesta Temporal
			
			

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# 6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Ubicación de los polos en el plano z: efecto sobre respuesta transitoria

$$\frac{ze^{-\alpha T} \sin \omega T}{z^2 - 2e^{-\alpha T} z \cos \omega T + e^{-2\alpha T}} = g [e^{-\alpha k T} \sin \omega k T]$$

Localización	Respuesta Temporal	Localización	Respuesta Temporal

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

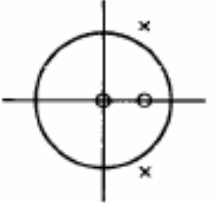
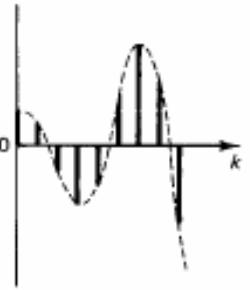
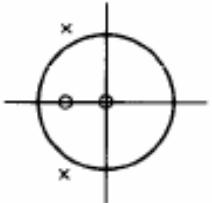
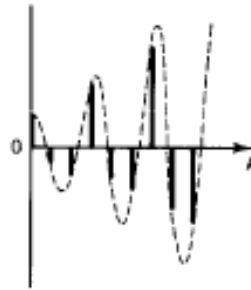
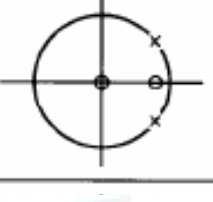
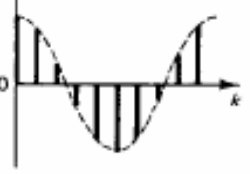
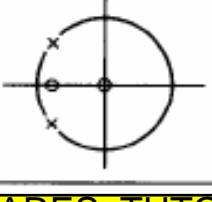
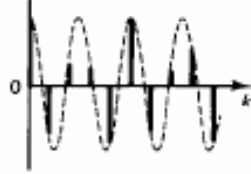
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# 6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Ubicación de los polos en el plano z: efecto sobre respuesta transitoria

$$\frac{z(z - e^{-\alpha T} \cos \omega T)}{z^2 - 2e^{-\alpha T} z \cos \omega T + e^{-2\alpha T}} = g[e^{-\alpha k T} \cos \omega k T]$$

Localización	Respuesta Temporal	Localización	Respuesta Temporal
			
			

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

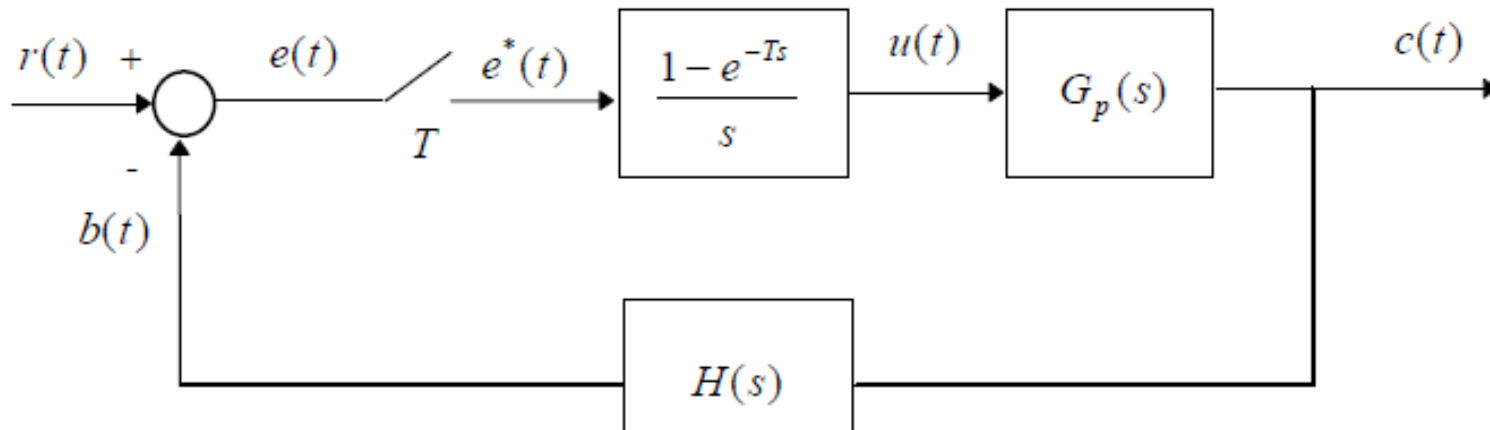
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

## 6. Respuesta temporal - Respuesta permanente

- Considerando un sistema de control digital en lazo cerrado y suponiendo el sistema estable para poder obtener valores en régimen permanente, se va a estudiar el valor del error en régimen permanente  $e(kT)$  ante diferentes señales de referencia.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# 6. Respuesta temporal - Respuesta permanente

- Error en régimen permanente:

- El sistema viene dado por la función de transferencia en lazo cerrado:

$$e^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} ((1 - z^{-1}) \cdot E(z))$$

- La señal de error E(z) es:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

$$E(z) = R(z) - B(z) = R(z) - GH(z) \cdot E(z)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# 6. Respuesta temporal - Respuesta permanente

- Señal de referencia Escalón: Error de posición:

- Señal de referencia Rampa: 
$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{1 + GH(z)} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + GH(z)}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) \Rightarrow e_{ss}^* = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{1 + GH(z)} \cdot \frac{T \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(1 - z^{-1}) \cdot GH(z)}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# 6. Respuesta temporal – Respuesta permanente

- El tipo de sistema viene dado en función del número de polos  $N$  en  $z=1$  (integradores en GH). El valor de  $K_p$  y  $K_v$  depende del tipo de sistema.

- El significado físico de las constantes de error estático es el mismo que el visto en tiempo continuo, excepto que estas dan información solo en los instantes de muestreo.

$$GH(z) = \frac{1}{(z-1)^N} \cdot \frac{A(z)}{B(z)}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 7. Representación del lugar de las raíces

- Se aplica de la misma forma que en sistemas en tiempo continuo, salvando la diferente interpretación de la ubicación de los polos en el plano  $z$ .
- El parámetro de interés es la ganancia  $K$  ( $-\infty < K < +\infty$ )

$$1 + K \frac{(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_m)}{(z+p_1)(z+p_1)\cdots(z+p_n)} = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# 7. Representación del lugar de las raíces

- La ganancia en lazo abierto  $F(z)$  debe cumplir las condiciones de módulo y fase.

- Condición de módulo:  $|F(z)|=1$ 

$$\frac{\prod_{i=1}^m |z+z_i|}{\prod_{j=1}^n |z+p_j|} = \frac{1}{|K|}$$

- Condición de fase:
 
$$\sum_{i=1}^m \angle(z+z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(z+p_j) = \pm 180^\circ(2p+1)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

-p3



# 7. Representación del lugar de las raíces

## Reglas generales para el trazado ( $K > 0$ )

- 1) El trazado se inicia en los  $n$  polos ( $K=0$ ) y termina en los  $m$  ceros ( $K=\infty$ ). Un número de  $n-m$  ramas terminan asintóticamente en infinito.
- 2) Los tramos del eje real que pertenecen al lugar de las raíces son aquellos que quedan a la izquierda de un número impar de ceros+polos.
- 3) Asíntotas: ángulo de asíntota =  $180(2p+1)/(n-m)$ ,  $p=0,1,2,\dots,n-m$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# 7. Representación del lugar de las raíces

## Reglas generales para el trazado ( $K > 0$ )

- 4) Puntos de bifurcación (entre polos adyacentes) y confluencia (entre ceros adyacentes) son aquellos valores de  $z_0$  en los que se cumple:

$$dK / dz = 0 \rightarrow d[-B(z)/A(z)] / dz = 0$$

Si el valor de  $K$  correspondiente a la raíz  $z_0$  es positivo el punto es de bifurcación o de confluencia. Si  $K$  es negativo el punto no es ni de bifurcación ni de confluencia.

- 5) Cortes con el eje imaginario: haciendo  $z = jv$ ,  $1 + F(jv) = 0$ , e igualando a cero las partes real e imaginaria se obtienen los valores

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# 7. Representación del lugar de las raíces

## Reglas generales para el trazado ( $K>0$ )

- 6) Cortes con la circunferencia de radio unidad: criterio de Jury.
- 7) Determinación del valor de  $K$  para un punto concreto del lugar de las raíces: aplicación de las condiciones de módulo y fase.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# 7. Representación del lugar de las raíces

## Reglas generales para el trazado ( $K < 0$ )

Condición de fase:  $\angle F(z) = 0$  ó  $\angle F(z) = \pm 360^\circ p$  con  $p=0, 1, 2, \dots$

$$\sum_{i=1}^m \angle(z+z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(z+p_j) = \pm 360^\circ p$$

- 1) El trazado se inicia en los ceros y termina en los polos.
- 2) Los tramos del eje real que pertenecen al lugar de las raíces son aquellos que quedan a la izquierda de un número par de ceros+polos.
- 3) Asíntotas: ángulo de asíntota =  $180(2p)/(n-m)$ ,  $p=0,1,2,\dots,n-m$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# 7. Representación del lugar de las raíces

## Reglas generales para el trazado ( $K < 0$ )

- 4) Puntos de bifurcación (entre polos adyacentes) y confluencia (entre ceros adyacentes) son aquellos valores de  $z_0$  en los que se cumple:

$$dK / dz = 0 \rightarrow d[-B(z)/A(z)] / dz = 0$$

Si el valor de  $K$  correspondiente a la raíz  $z_0$  es negativo se trata del punto buscado. Si  $K$  es positivo el punto no es ni de bifurcación ni de confluencia.

- 5) Cortes con el eje imaginario: haciendo  $z = jv$ ,  $1 + F(jv) = 0$ , e igualando a cero las partes real e imaginaria se obtienen los valores

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# 7. Representación del lugar de las raíces

## Ejemplo: trazado del lugar de las raíces para $K > 0$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

- Ganancia en lazo abierto para  $T=1s$ .

$$F(z) = GH(z) = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

Ecuación característica:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# 7. Representación del lugar de las raíces

- Ceros:  $z_1=0, z_2=\infty$     Polos:  $p_1=1, p_2=0.368$
- Tramos del eje real pertenecientes al lugar de las raíces:  
 $0.368 < z < 1$     y     $z < 0$
- Asíntota:  $180^\circ$     Centroide:  $1.368$
- Puntos de bifurcación y de confluencia:

$$K = - \frac{(z-1)(z-0.368)}{0.632 z} \qquad \frac{dK}{dz} = - \frac{0.632z^2 - 0.632 \cdot 0.368}{0.632z^2} = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# 7. Representación del lugar de las raíces

- Cortes con el eje imaginario:

$$z = jv$$
$$1 + GH(z) = 0 \implies -v^2 - (1.368 - 0.632K)jv + 0.368 = 0$$
$$v = \pm 0.606 \quad K = 2.164$$

- Cortes con circunferencia de radio unidad: único corte en  $z = -1$

$$F(-1) = GH(-1) = -1 \rightarrow 4.32$$

Cartagena99

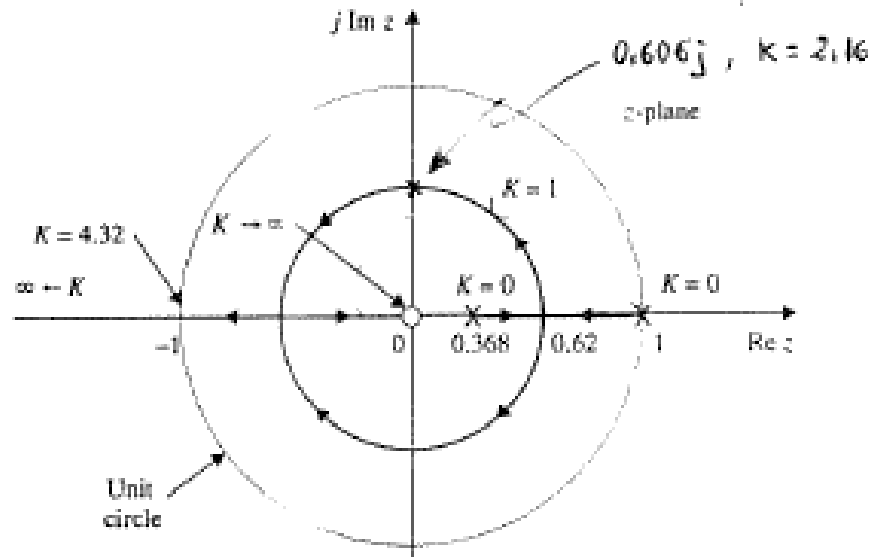
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# 7. Representación del lugar de las raíces

- Representación gráfica:



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70