Tema 1: Relaciones de orden. Álgebras de Boole

Relaciones de orden. Retículos

1. En el conjunto $(\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R}$ se define la relación

$$(x, y)R(z, t) \text{ si y sólo si } x \leq z, \, \frac{y}{x} = \frac{t}{z}.$$

   a) Demuestra que es una relación de orden y estudia si es un orden total.

   b) Representa el conjunto de los elementos comparables con el elemento $(1, 1)$.

2. Determina el orden lexicográfico de las siguientes cadenas de bits: 001, 111, 010, 011, 000, 100 basado en el orden $0 \leq 1$. Dibuja el diagrama de Hasse de estas cadenas, con el orden producto.

3. Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos ordenados, con $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b\}$ donde las relaciones de orden vienen dadas por

$$\begin{aligned} R &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\} \\ S &= \{(a,a), (a,b), (b,b)\} \end{aligned}$$

   Halla $(A \times B, Prod)$ y $(A \times B, Lex)$.

4. Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos ordenados, con $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ y las relaciones

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\} \quad S = \{(a,a), (a,b), (b,b)\}$$

   Halla $(A \times B, Prod)$ y $(A \times B, \leq_{Lex})$.

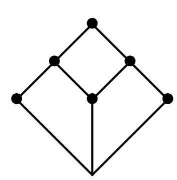
5. Sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Respecto al orden lexicográfico basado en el orden usual $\leq$:

   a) Encuentra todos los pares en $S \times S$ anteriores a $(2, 3)$.

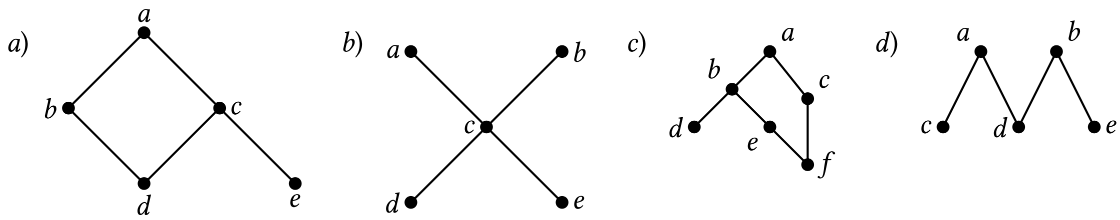
   b) Encuentra todos los pares en $S \times S$ posteriores a $(3, 1)$.

   c) Dibuja el diagrama de Hasse de $(S \times S, \leq_{Lex})$

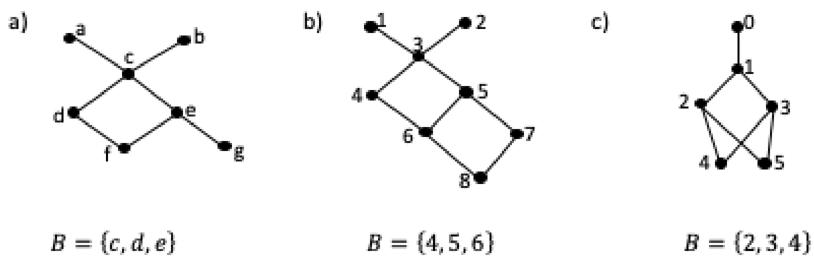
6. ¿Es un retículo distributivo el definido por el siguiente diagrama de Hasse?



7. Halla los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo (si los hay) para los siguientes conjuntos con el orden dado por el diagrama de Hasse:



8. Halla cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo (si los hay) del conjunto B en cada uno de los siguientes casos:



9. Representa el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados, y halla los elementos notables de los subconjuntos señalados:

   a) $(D_{60}, /)$, $A = \{2, 5, 6, 10, 12, 30\}$ y $B = \{2, 3, 6, 10, 15, 30\}$.

   b) $(D_{48}, /)$, $A = \{2, 4, 6, 12\}$ y $B = \{3, 6, 8, 16\}$.

   c) $(D_{40}, /)$, $A = \{4, 5, 10\}$ y $B = \{2, 4, 8, 20\}$.

10. Representa el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{168}, /)$. Si $A = \{4, 6, 12\}$, halla los elementos maximales de A, y las cotas superiores e inferiores, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de A en D_{168}.

11. Sea D_{72} el conjunto de todos los divisores de 72, y / la relación de divisibilidad a/b si y sólo si 'a divide a b' .

    a) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{72}, /)$.

    b) Sea $B = \{9, 12, 36\}$. Encuentra cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo, si existen, en B.

    c) Encuentra, si existe, el complementario de 9 y el de 18 en $(D_{72}, /)$.

    d) Razona si $(D_{72}, /)$ es un álgebra de Boole.

12. Halla, si los hay, los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo para los siguientes conjuntos ordenados, donde / denota la relación de divisibilidad:

$$(\mathcal{P}(X), \subseteq); \quad ((0,1), \leq); \quad ((0,1), \geq); \quad (\mathbb{N}, /); \quad (\mathbb{N} \setminus \{1\}, /).$$

13. En cada uno de los casos siguientes señala si el conjunto X tiene o no una cota inferior en $\mathbb{Z}$, y si tiene alguna halla su ínfimo si existe.

    a) $X = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 16\}$;

b) $X = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2y \text{ para algún } y \in \mathbb{Z}\}$;

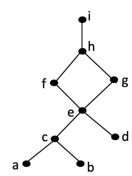
c) $X = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 100x\}$.

14. En $(\mathbb{N}, /) \times (\mathbb{N}, /)$ se considera el orden lexicográfico. Determina, si existen, las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del conjunto $A = \{(2, 1), (3, 4)\}$.

15. En $\mathbb{R}^2$ se considera la relación de orden $(x, y) \leq (x', y')$ si y sólo si $x \leq x'$ e $y \leq y'$. Halla los elementos maximales y minimales, supremo e ínfimo de $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

16. Se considera en $D_{48} \times \mathbb{N}$ el orden lexicográfico correspondiente a tomar el orden divisibilidad en el primer factor y el orden usual en el segundo factor. Sea $S = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (6, 3), (6, 1), (4, 2)\}$. Halla, si existen, las cotas superiores e inferiores, elementos maximales y minimales, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de S.

17. Dado el orden parcial del siguiente diagrama de Hasse,



obtén un orden total que lo contenga. ¿Cuántos pueden obtenerse?

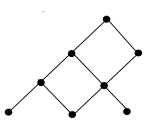
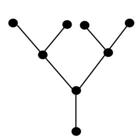
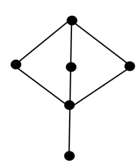
18. Sea $T = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ la lista de tareas para realizar un trabajo, de las que se sabe que unas preceden a otras de la siguiente forma:

$$f \leq a, \quad f \leq d, \quad c \leq f, \quad e \leq c, \quad b \leq f, \quad e \leq g, \quad g \leq f.$$

Halla el orden parcial. ¿Qué tareas pueden realizarse independientemente? Construye un orden si el trabajo lo realiza sólo una persona.

19. En $(D_{10}, /) \times (D_{18}, /)$ se considera el orden lexicográfico. Halla las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo, si existen, del subconjunto $S = \{(2, 2), (2, 3)\}$. Dibuja el diagrama de Hasse. Se define la aplicación $f : D_{10} \times D_{18} \longrightarrow D_{180}$ por $f(a, b) = ab$. ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva?

20. Estudia cuáles de los siguientes conjuntos ordenados son retículos.

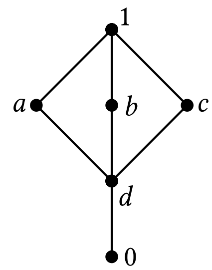
(a)  (b)  (c) 

21. Obtén los diagramas de Hasse de todos los retículos, salvo isomorfismos, de uno, dos, tres, cuatro y cinco elementos.

22. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. ¿Tiene $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ algún elemento maximal? ¿Tiene algún elemento minimal? ¿Es $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

23. Sea $E(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ que tienen un número par de elementos. En $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ se consideran los elementos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$. Encontrar cuatro cotas superiores para $\{A, B\}$. ¿Tiene $\{A, B\}$ supremo en $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$? ¿Es $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

24. Estudia si en el siguiente retículo se verifica la igualdad $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$



25. Encuentra el complementario de cada elemento en $(D_{42}, /)$, $(D_{45}, /)$ y $(D_{105}, /)$. ¿Son álgebras de Boole estos retículos?

26. Se considera el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$ y la relación de orden de divisibilidad.

    a) Representa el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(A, /)$.

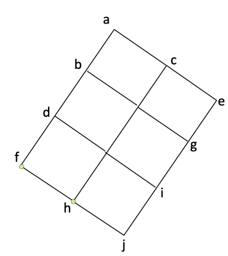
    b) ¿Es $(A, /)$ un retículo?

    c) Obtén, si existen, las cotas inferiores, cotas superiores, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, elementos minimales y maximales del subconjunto $B = \{2, 3, 4, 6, 12, 180\}$.

27. (Examen Enero 2016)

    a) Sea D_{63} el conjunto de todos los divisores de 63, y / la relación de divisibilidad dada por a/b si y sólo si "a divide a b". Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{63}, /)$.

    b) Considera el conjunto ordenado A de la figura.



    I) Obtén las cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo del conjunto $B = \{b, c, d\}$.

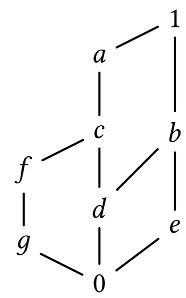
    II) ¿Es A un retículo?

    III) Sea A' el conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse es el mismo que el de A, pero eliminando las aristas que van de b a g y de d a i. ¿Es A' un retículo?

    IV) ¿Es A' complementario? En caso de que no lo sea, da un elemento que no tenga complementario y otro que sí lo tenga, indicando un complementario.

    V) ¿Es A' distributivo?

28. (Examen Noviembre 2016) Considera el conjunto ordenado A del dibujo.



a) Sea $B = \{a, d, f\}$, encuentra todos los elementos notables de B (cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay).

b) Encuentra, si existen, todos los elementos complementarios de b y c.

c) Razona si A es un álgebra de Boole.

29. (Examen noviembre 2016) Sean $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ y $(Y, \leq)$ dos conjuntos ordenados, con $X = \{a, b\}$, $Y = \{0, 1\}$, y donde $\mathcal{P}(X)$ es el subconjunto de las partes de X.

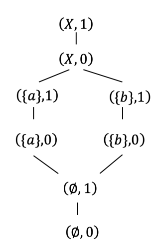
a) Calcula el cardinal del producto cartesiano $\mathcal{P}(X) \times Y$.

b) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(\mathcal{P}(X) \times Y, \leq_{\text{Lex}})$, donde $\leq_{\text{Lex}}$ es la relación "orden lexicográfico".

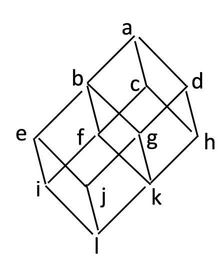
c) El conjunto producto es

$$\mathcal{P}(X) \times Y = \{(\emptyset, 0), (\emptyset, 1), (\{a\}, 0), (\{a\}, 1), (\{b\}, 0), (\{b\}, 1), (X, 0), (X, 1)\}$$

y el diagrama de Hasse es



30. (Examen noviembre 2012) Dado el conjunto ordenado $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ cuyo diagrama de Hasse es el de la figura y el subconjunto $B = \{b, e, f, k\}$.



a) Hallar las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de B en A.

b) Hallar los elementos maximales y minimales, máximo y mínimo de B.

c) Hallar $\inf\{f, g\}$ y $\sup\{f, g\}$. ¿Es A un retículo?

31. (Examen enero 2017) Sea D_{270} el conjunto de los divisores positivos de 270. Se pide:

a) Sabiendo que una relación en D_{270} es un subconjunto del producto cartesiano $D_{270} \times D_{270}$, ¿cuál es el cardinal del conjunto de todas las relaciones distintas en D_{270}?

b) Dibuja el diagrama de Hasse de D_{270} con la relación de orden de divisibilidad.

c) Encuentra todos los elementos de D_{270} que tienen complementario. Razona si D_{270} es álgebra de Boole.

d) Sea el conjunto $C = D_{270} \setminus \{45, 54\}$ con la relación de orden de divisibilidad. Calcula si existe el $\sup\{6, 27\}$ en C. Razona si C es un retículo.