

Cinemática del Sólido

Consideraciones generales

Notación

Condición cinemática de sólido rígido

Grados de libertad

Campo de velocidades

Propiedades del campo de velocidades

Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento

Campo de aceleraciones

Casos particulares

Movimiento de traslación

Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo

Movimiento con un punto fijo

Movimientos planos

Sólidos en contacto. Rodadura y deslizamiento

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Consideraciones generales

Cinemá

✓ **Sólido Rígido:** Conjunto de partículas finito o infinito cuyas **distancias** **re** **mantienen constantes.**

Consideraciones:

- Las dimensiones y/u orientación del sólido influyen en el movimiento, contrario se podría estudiar como una *partícula*.
- Los sólidos reales sufren deformaciones, pero suelen ser muy pequeñas y en la Clásica se desprecian.
- Cuando un sólido S se encuentra en movimiento cada uno de sus puntos tiene, en general, una trayectoria, una velocidad y una aceleración distinta. También, el punto puede pertenecer a distintos sólidos. Por tanto, habrá que especificar:
 - El punto del sólido.
 - El movimiento concreto al que nos referimos para el mismo punto.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

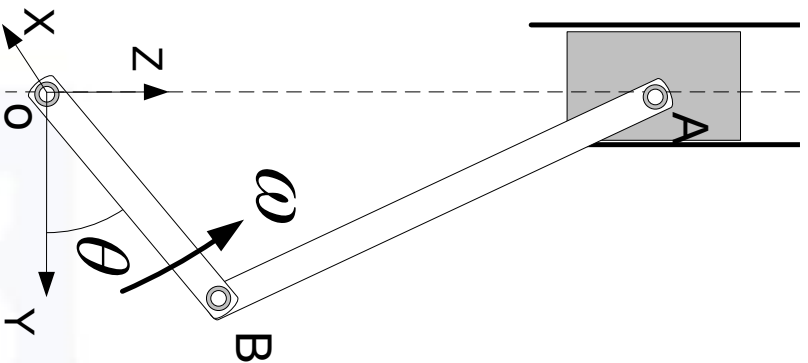
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Notación

Cinem

NOTACIÓN



\vec{v}_M
 \vec{v}_{21}
 Punto al que se refiere
 Sólido en el que sitúa el observador
 Sólido al que pertenece el punto M

- S_1 : suelo
- S_0 : coche
- S_2 : manivela OB
- S_3 : biela AB
- S_4 : émbolo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

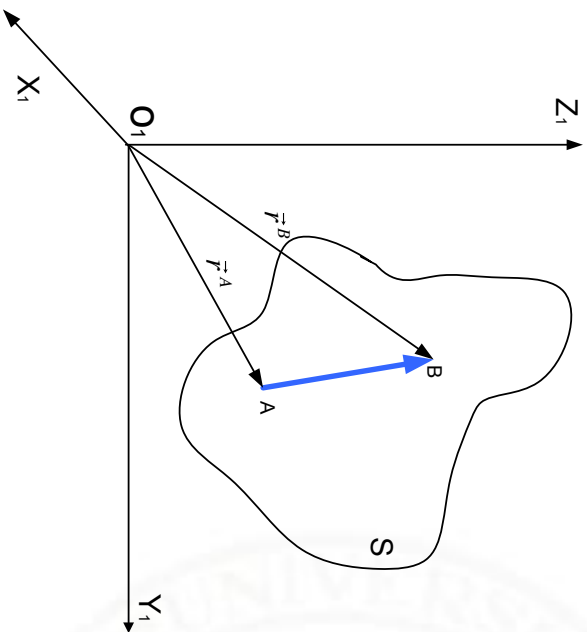
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Condición cinemática de sólido rígido

Cinem



¿Cómo influye la condición de **Sólido Rígido** en las velocidades de l



Por la definición de Sólido Rígido:

$$|\overline{AB}| = cte, \quad \forall A, B \in \text{Sólido}$$

$$|\overline{AB}|^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = cte, \quad \forall A, B \in \text{Sólido}$$

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \frac{d\overline{AB}}{dt} = 2 \frac{d\overline{AB}}{dt} \cdot \overline{AB} = 0$$

Y por tanto: $\frac{d\overline{AB}}{dt} \cdot \overline{AB} = 0$

Teniendo en cuenta que: $\overline{AB} = \vec{r}^B - \vec{r}^A$

$$\frac{d(\vec{r}^B - \vec{r}^A)}{dt} \cdot \overline{AB} = 0; \quad \frac{d\vec{r}^B}{dt} \cdot \overline{AB} = \frac{d\vec{r}^A}{dt} \cdot \overline{AB} \Rightarrow \vec{v}^B \cdot \overline{AB} = \vec{v}^A \cdot \overline{AB}$$

Se divide la expresión por el módulo de \overline{AB} :

$$\underbrace{\vec{v}^B \cdot \vec{u}_{\overline{AB}}}_{\text{Proy } \vec{v}^B \text{ sobre } \overline{AB}} = \underbrace{\vec{v}^A \cdot \vec{u}_{\overline{AB}}}_{\text{Proy } \vec{v}^A \text{ sobre } \overline{AB}}$$

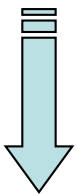
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

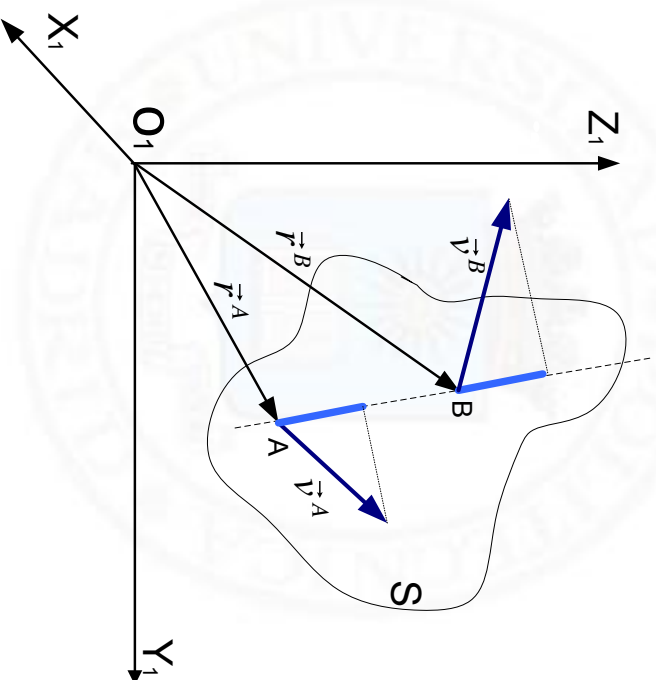
Condición cinemática de sólido rígido

Cinem



Las proyecciones de las velocidades de dos puntos A y B cualesquiera de la recta AB que los une es la misma (equiproyectividad).

$$\underbrace{\vec{v}^B \cdot \vec{u}_{AB}}_{\text{Proy}_{\vec{v}^B \text{ sobre } AB}} = \underbrace{\vec{v}^A \cdot \vec{u}_{AB}}_{\text{Proy}_{\vec{v}^A \text{ sobre } AB}}$$



- De este modo se garantiza que las distancias entre los puntos se mantienen constantes.
- A esta proyección de la velocidad se le denomina *velocidad de deslizamiento sobre la recta*.

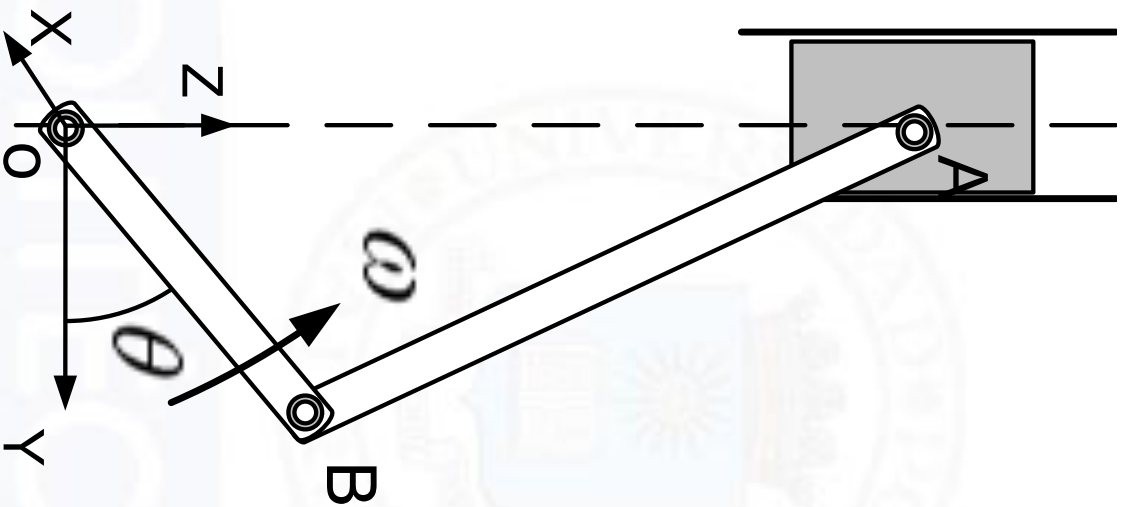
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Condición cinemática de sólido rígido

Cinem



$$\underbrace{\vec{v}_B \cdot \vec{n}_{AB}}_{\text{Proy}_{\vec{v}_B \text{ sobre } \vec{n}_{AB}}} = 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

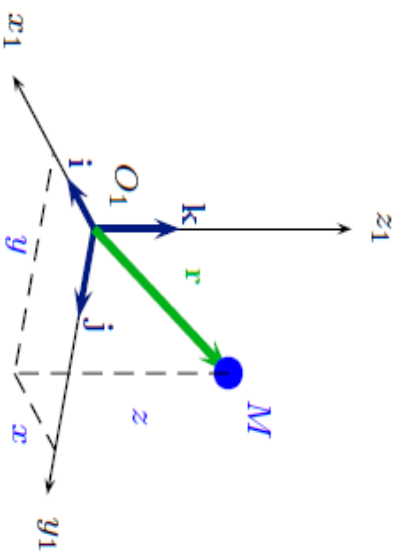
Grados de libertad

Cinemá

✓ *Grados de libertad*: Número de parámetros independientes necesarios para la configuración de un sistema.

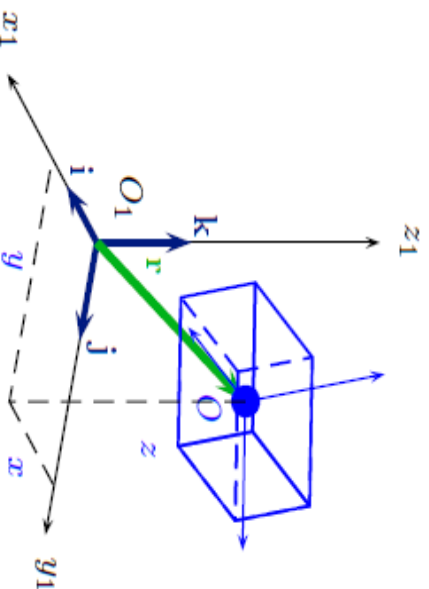
Para sistema libres (sin ligaduras)

Partícula



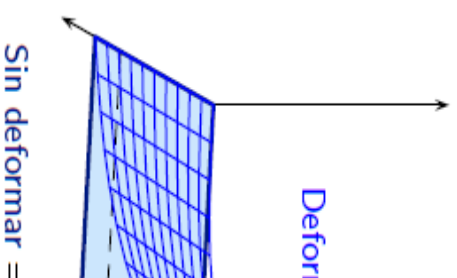
GDL: 3

Sólido rígido



GDL: 6
(Mov. Plano: 3)

Sólido de



GDL

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Campo de velocidades

Cinemá

- **Ecuación del campo de velocidades** del sólido:

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{21}^O + \vec{\omega}_{21} \wedge \overrightarrow{OM}$$

- Expresión que permite calcular, en un instante dado, las velocidades de puntos del sólido en función de $(\vec{v}_{21}^O, \vec{\omega}_{21}) \equiv$ (Se denomina *screw* ó *hélice*)
- El punto M y el origen O son arbitrarios. En consecuencia la ecuación se para *cualquier pareja de puntos (A,B)* del sólido:

$$\vec{v}_{21}^A = \vec{v}_{21}^B + \vec{\omega}_{21} \wedge \overrightarrow{BA}$$

- La velocidad angular $\vec{\omega}_{21}$ es *única*, es la misma para todos los puntos de

El movimiento general del sólido se puede interpretar en cada instante como un movimiento de traslación y rotación. La que todos los puntos del sólido tienen la velocidad correspondiente al punto elegido, \vec{v}_{21}^O , más una **rotación alrededor de un eje que pasa por dicho punto c angular del sólido** $\vec{\omega}_{21}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

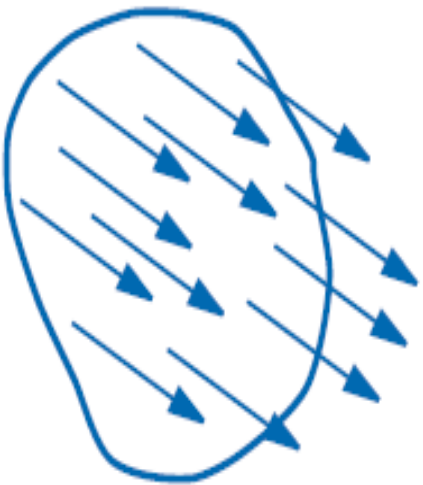
...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

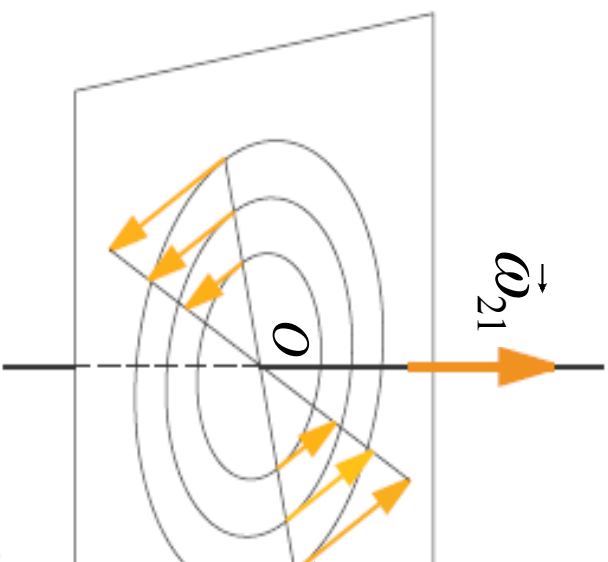
Estructura instantánea del Campo de aceleraciones

Cinem

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{21}^O + \vec{\omega}_{21} \wedge \overrightarrow{OM}$$



$$\vec{v}_{21}^O$$



$$\vec{\omega}_{21} \wedge \overrightarrow{OM}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

POLITÉCNICA

Cartagena99

POLITÉCNICA



Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Propiedades del campo de velocidades

Cinem

- **Equiprojectividad:** Las proyecciones de las velocidades de dos puntos A y del sólido sobre la recta AB que los une es la misma.

$$\vec{v}^B = \vec{v}^A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

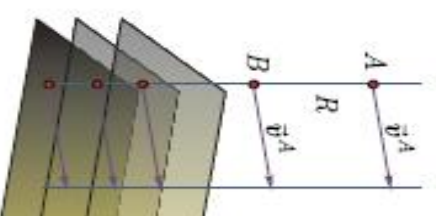
$$\vec{v}^B \cdot \vec{u}_{AB} = \vec{v}^A \cdot \vec{u}_{AB} + (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{u}_{AB}$$

Coincide con la condición cinemática de s

- **Bidimensionalidad:** En cada instante, todos los puntos situados sobre una l la velocidad angular del sólido tienen la misma velocidad.

$$\vec{v}^B = \vec{v}^A + (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}) \parallel \Rightarrow \vec{v}^B = \vec{v}^A$$

Por tanto, basta con determinar el campo de velocidades en un único plano Π perpendicular a $\vec{\omega}_{21}$ ya que se repite en todos los planos paralelos a Π .



- Si en un instante concreto la velocidad angular es nula, todos los puntos tienen la misma velocidad. Un caso particular es el movimiento de traslación velocidad.

$$\vec{v}^B = \vec{v}^A + (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \vec{v}^B = \vec{v}^A$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento

Cinem

- **Eirmd:** lugar geométrico de los puntos del sólido cuya velocidad es paralela angular del sólido.

Si P es un punto que pertenece al *eirmd*, su velocidad es paralela a $\vec{\omega}_{21}$ Y se verifica:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}^P = \vec{0} = \vec{\omega} \wedge (\vec{v}^0 + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}^0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP})$$

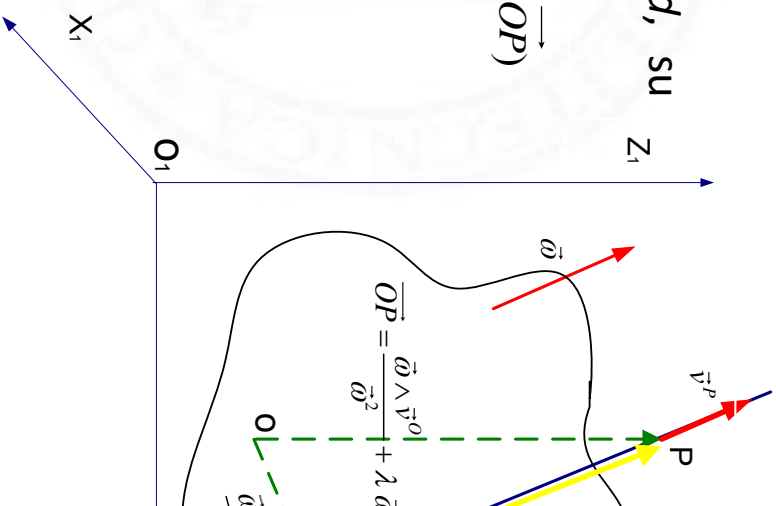
$$\vec{0} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}^0 + \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{OP}) - \vec{\omega}^2 \vec{OP}$$

$$\vec{OP} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}^0}{\vec{\omega}^2} + \underbrace{\left(\frac{\vec{\omega} \cdot \vec{OP}}{\vec{\omega}^2} \right)}_{\lambda} \vec{\omega} \Rightarrow$$

Ecuación vectorial del *eirmd*

$$\vec{OP} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}^0}{\vec{\omega}^2} + \lambda \vec{\omega}$$

Otro procedimiento equivalente de encontrar la ecuación del *eirmd* es imp componentes de los vectores paralelos $\vec{\omega}_{21}$ Y \vec{v}_{21}^0 sean proporcionales.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

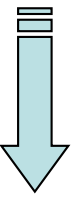
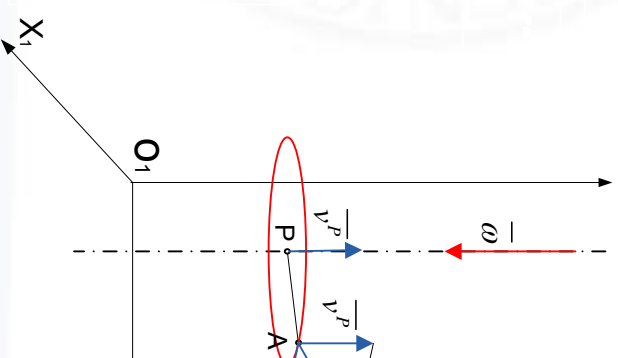
Eirmd: propiedades

Cinem

- El **eirmd** tienen las siguientes propiedades que derivan del campo de velocidades:
 - Todos sus puntos tienen la misma velocidad, ya que es una recta velocidad angular $\vec{\omega}_{21}$
 - La velocidad de sus puntos es *mínima*.

$$\text{Si } \begin{cases} A \notin \text{eirmd} \\ P \in \text{eirmd} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}^A = \vec{v}^P + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overline{PA}}_{\text{perpendicular } \vec{\omega}} \\ \underbrace{\vec{v}^P}_{\text{paralelo } \vec{\omega}} \end{array} \right.$$

$|\vec{v}^A|$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son $|\vec{\omega} \wedge \overline{PA}|$ y $|\vec{v}^P|$, por lo tanto $|\vec{v}^A| > |\vec{v}^P|$.



Se denomina **velocidad de mínimo deslizamiento**.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo: propiedades

Cinemática

- La **velocidad de mínimo deslizamiento**:
- Es la mínima del campo de velocidades.
- Es igual a la proyección de la velocidad de cualquier punto A del sólido de $\vec{\omega}_{21}$ (equiproyectividad en $\vec{\omega}_{21}$)

$$\vec{v}^A = \vec{v}^P + \vec{\omega} \wedge \overline{PA}$$

$$\underbrace{\vec{v}^A \cdot \vec{n}_{\vec{\omega}}}_{\text{proyección de } \vec{v}^A \text{ sobre } \vec{\omega}} = \underbrace{\vec{v}^P \cdot \vec{n}_{\vec{\omega}}}_{|\vec{v}^P|} + \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \overline{PA}) \cdot \vec{n}_{\vec{\omega}}}_{\text{perpendiculares}} = 0$$

con

$$\vec{n}_{\vec{\omega}} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

La **velocidad de mínimo deslizamiento** siempre se puede calcular con



$$\vec{v}_{\text{mínimo deslizam.}} = \vec{v}^P = (\vec{v}^A \cdot \vec{n}_{\vec{\omega}}) \vec{n}_{\vec{\omega}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Eirmd: movimiento helicoidal

Cinem

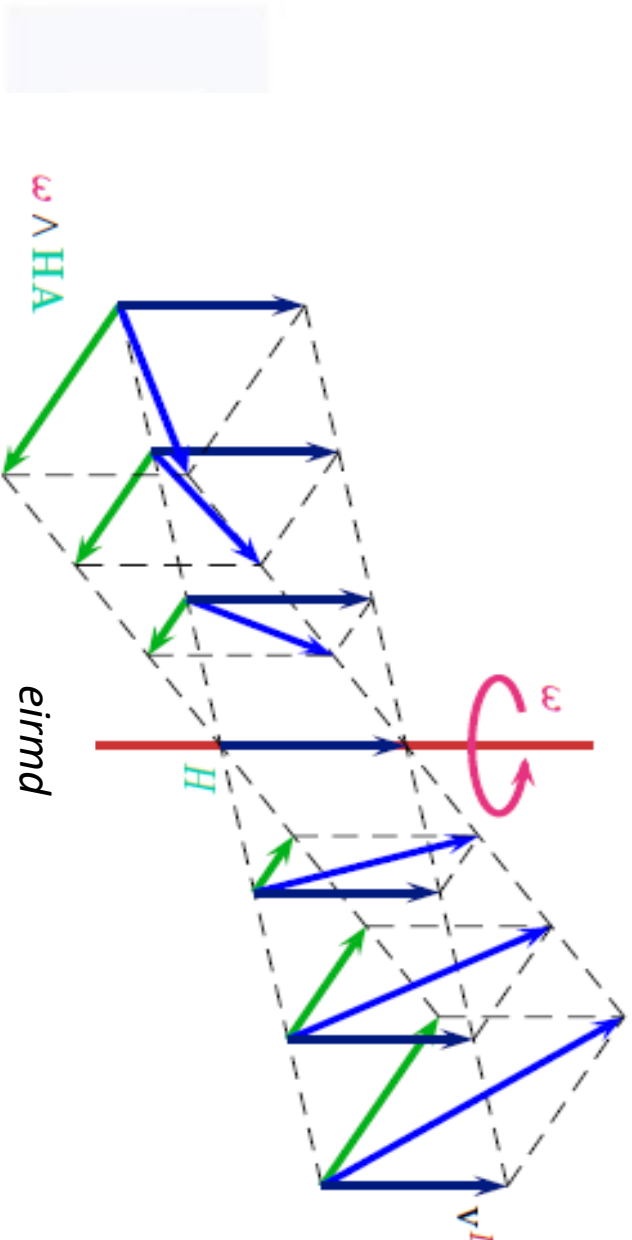
- **Movimiento helicoidal equivalente:** Se toma un punto H del eirmd para campo de velocidades:

$$\vec{v}_{21}^A = \vec{v}_{21}^H + \underbrace{\vec{\omega}_{21} \wedge \overline{HA}}_{\perp \overline{HA}} = \text{Deslizamiento} + \text{Rotación pura}$$

- Translación** en la dirección del eirmd ($\vec{\omega}_{21}$) con la velocidad de mínimo deslizamiento
- Rotación** alrededor del eirmd con $\vec{\omega}_{21}$

⇒

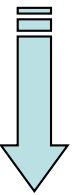
Movimiento helicoidal



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- ✓ En cada instante existe un *ÚNICO* eirmd. Todos los puntos de dicho eje tienen la misma velocidad que:
- ✓ Es paralela a la velocidad angular
- ✓ Su módulo es mínimo



Estas propiedades permiten situar el eirmd sin necesidad de determinarlos analíticamente

- *Un punto de velocidad nula* (o mínima, o paralela a $\vec{\omega}_{21}$), el eirmd está situado en la recta que une dicho punto con el eje de rotación.
- Dos o más puntos de velocidad nula (o mínima, o paralela a $\vec{\omega}_{21}$), eirmd está situado en la recta que une dichos puntos con el eje de rotación.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

POLITÉCNICA

Cartagena99

Campo de aceleraciones

Cinemática

- Se deriva el campo de velocidades

$$\vec{a}_{21}^M = \frac{d\vec{v}_{21}^M}{dt} = \frac{d\vec{v}_{21}^O}{dt} + \frac{d(\vec{\omega}_{21} \wedge \vec{OM})}{dt} = \vec{a}_{21}^O + \frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega}_{21} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

- Ecuación del campo de aceleraciones del sólido:**

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{21}^O + \vec{\alpha}_{21} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega}_{21} \wedge (\vec{\omega}_{21} \wedge \vec{OM})$$

- $\vec{\alpha}_{21} = \dot{\vec{\omega}}_{21}$ es el vector aceleración angular del sólido S_2 respecto de S_1 .
- Los dos primeros términos tienen una estructura similar a la de velocidades (eje $\parallel \vec{\alpha}_{21}$); el tercero (eje $\parallel \vec{\omega}_{21}$) rompe la estructura por aceleración centrípeta. Los vectores $\vec{\omega}_{21}$ y $\vec{\alpha}_{21}$ tienen en general distintas y variables con el tiempo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

POLITÉCNICA



Cartagena99

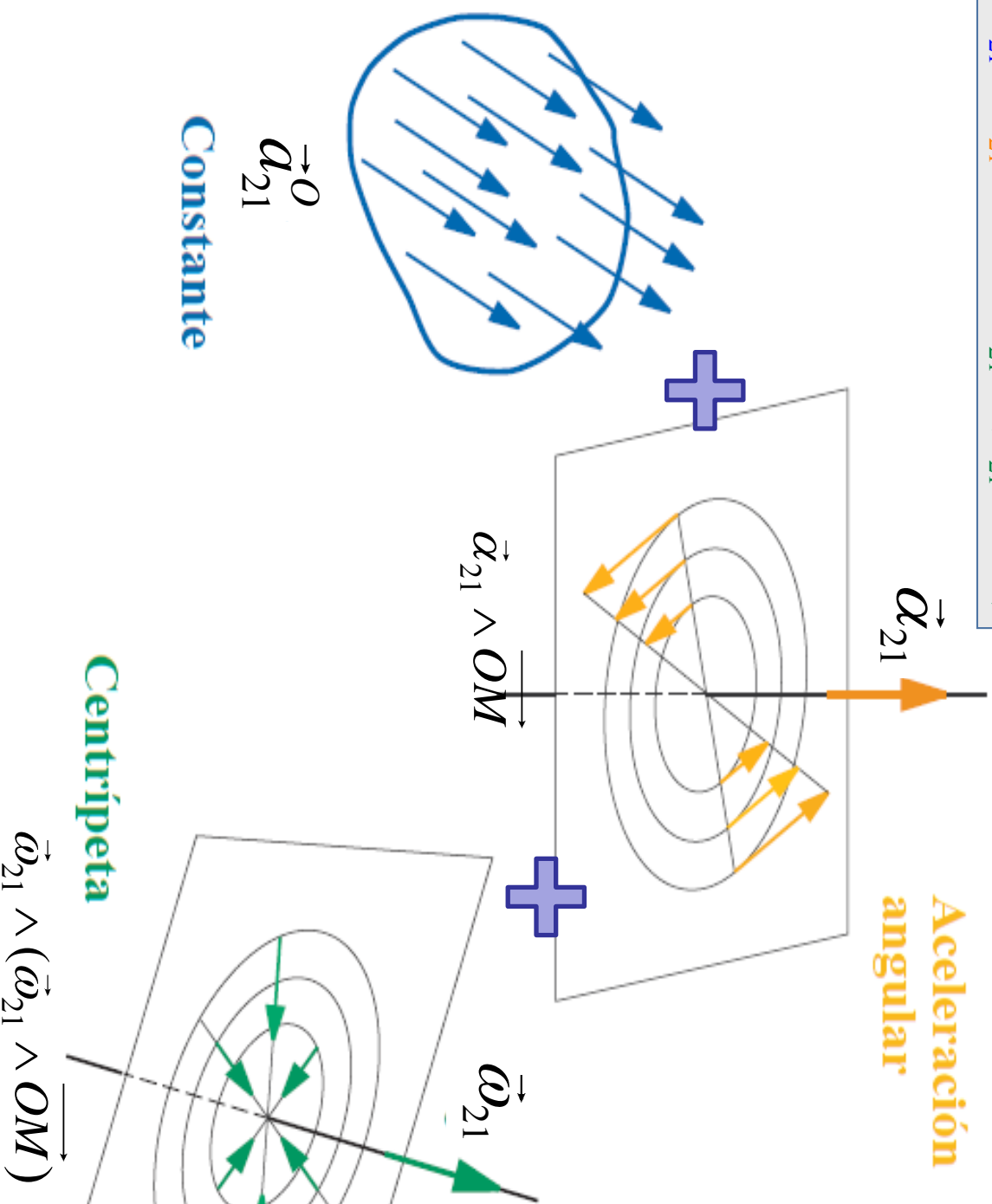
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Estructura instantánea del Campo de aceleraciones

Cinem

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{21}^O + \vec{\alpha}_{21} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{21} \wedge (\vec{\omega}_{21} \wedge \overrightarrow{OM})$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

POLITÉCNICA



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cinemática del Sólido

Consideraciones generales

Notación

Condición cinemática de sólido rígido

Grados de libertad

Campo de velocidades

Propiedades del campo de velocidades

Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento

Campo de aceleraciones

Casos particulares

Movimiento de traslación

Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo

Movimiento con un punto fijo

Movimientos planos

POLITÉCNICA

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

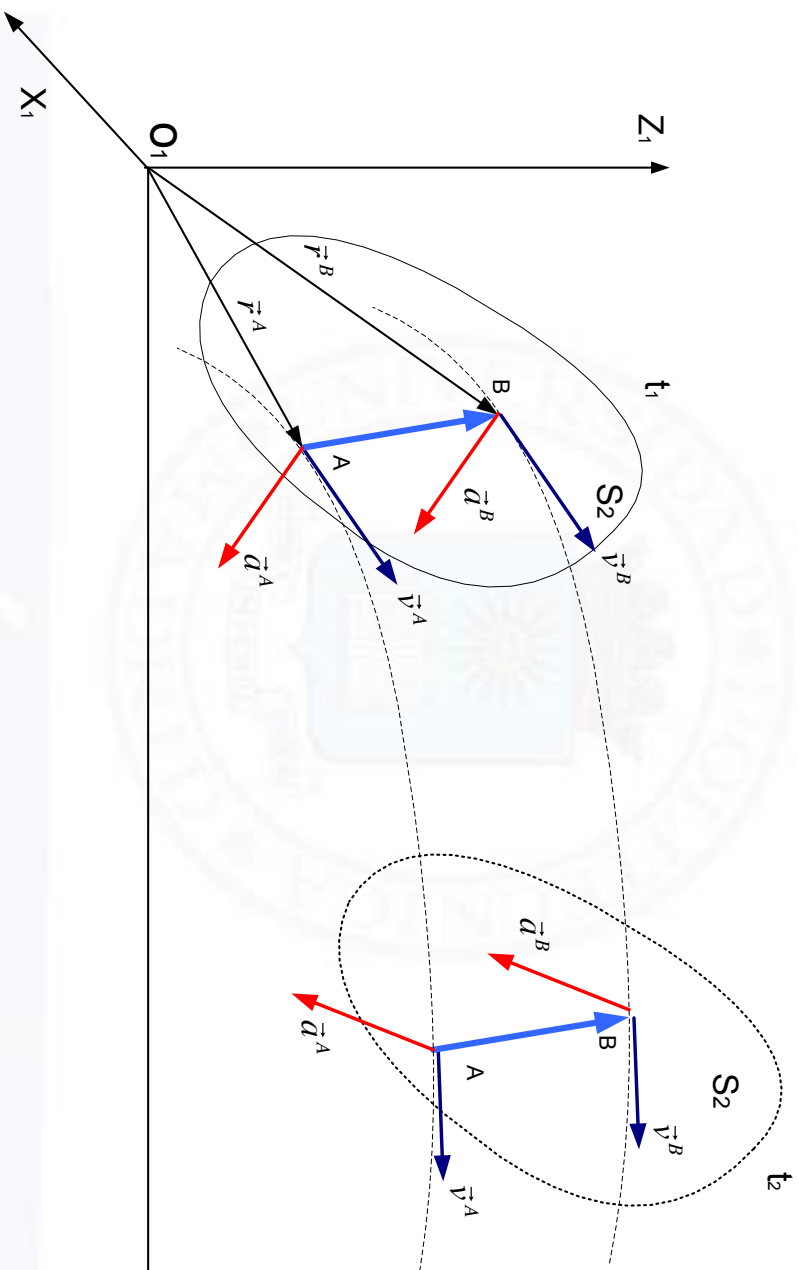
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Movimiento de traslación

Cinem

- Movimiento de traslación:** Un sólido tiene un movimiento de traslación cuando el segmento rectilíneo del sólido conserva su dirección durante el movimiento



$$\overline{AB} = cte, \quad \forall A, B \in \text{Sólido}$$

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} = 0; \quad \frac{d(\vec{r}^B - \vec{r}^A)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{21}^B = \vec{v}_{21}^A$$

$$\vec{a}_{21}^B = \vec{a}_{21}^A$$

En cada instante
puntos se mu

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

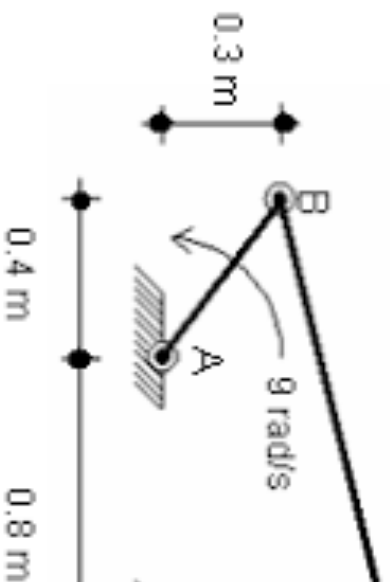
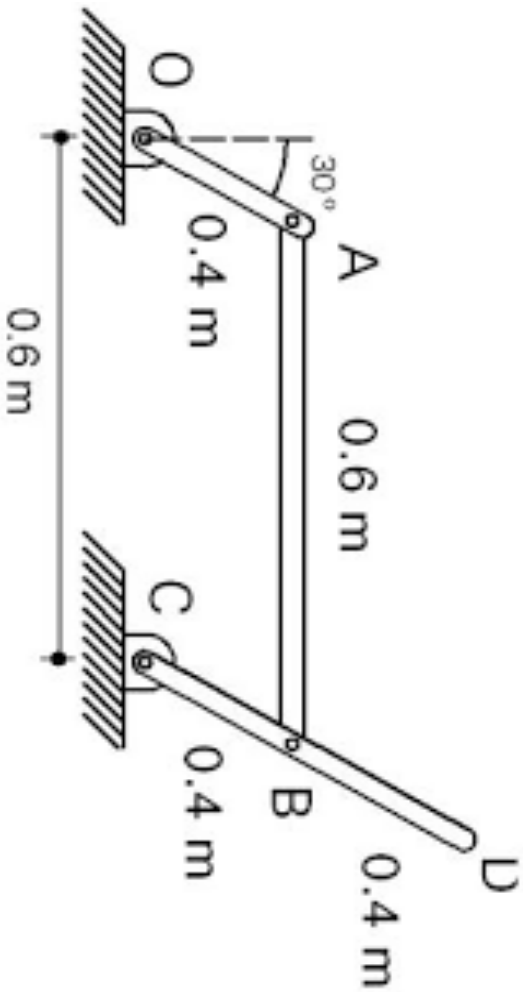
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Movimiento de traslación

Cinem



¿Algún elemento de estos mecanismos tiene un movim
traslación?



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

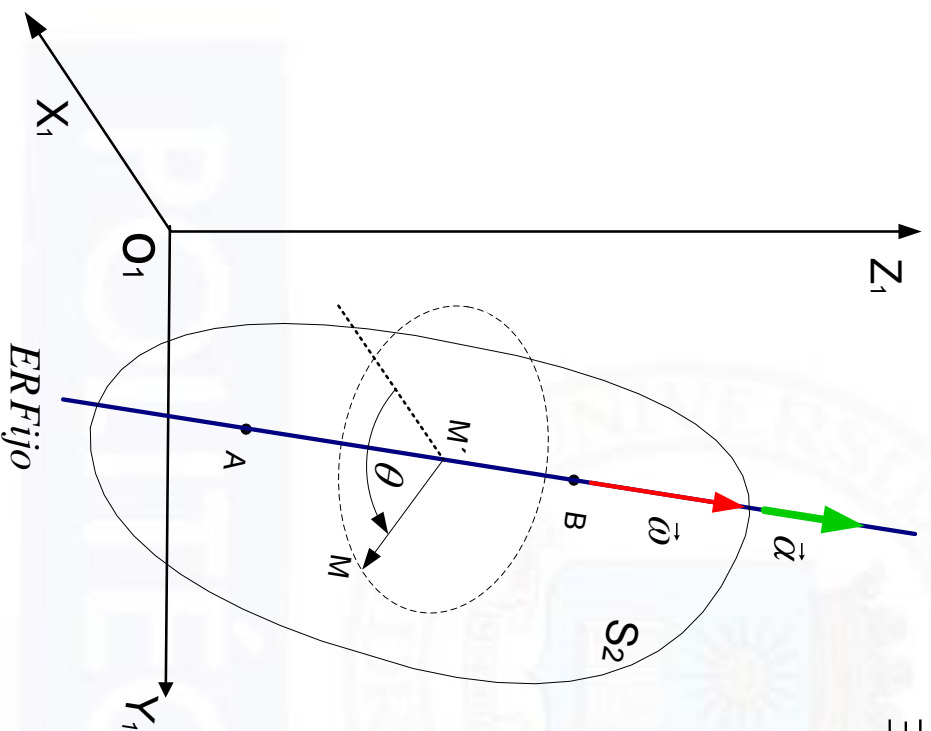
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

POLITÉ

Movimiento de rotación alrededor eje fijo

Cinem

- **Rotación alrededor de un eje fijo:** dos puntos del sólido (A y B) permanecer del sistema de referencia del movimiento. Debido a la condición de inflexo sólido, todos los puntos situados sobre la recta que une A y B, también son f



$$\exists \text{ recta} \in \text{Sólido} \rightarrow \vec{v}_{21}^A = \vec{a}_{21}^A =$$

$$\vec{\omega}_{21} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}$$

$$\vec{\alpha}_{21} = \frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

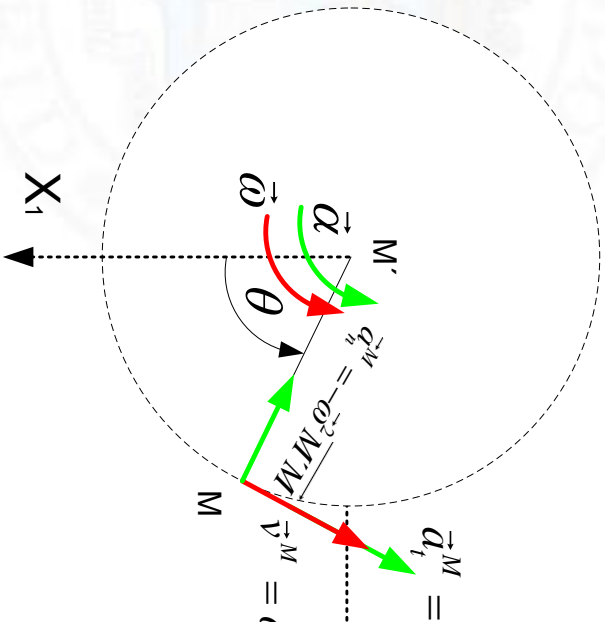
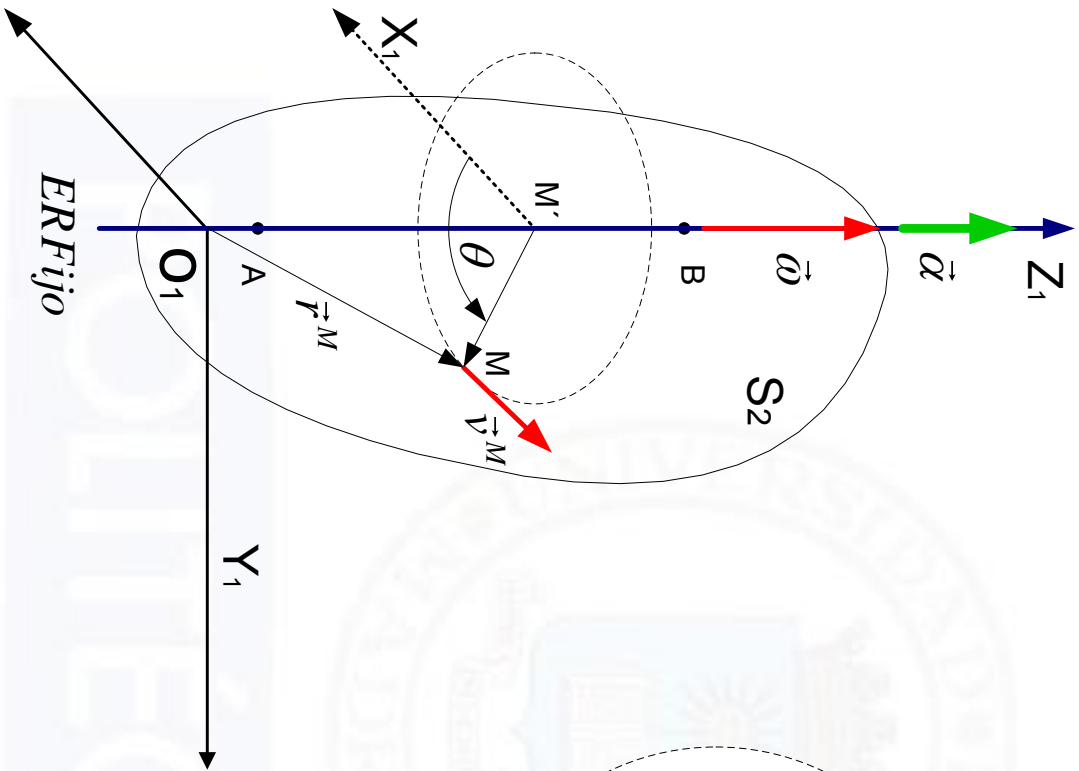
...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Movimiento de rotación alrededor eje fijo

Cinem

- Equivale a un *movimiento plano*. El campo de velocidades y aceleraciones



$$\vec{v}_{21}^M = \vec{\omega}_{21} \wedge \overline{M'M}$$

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{\alpha}_{21} \wedge \overline{M'M} -$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



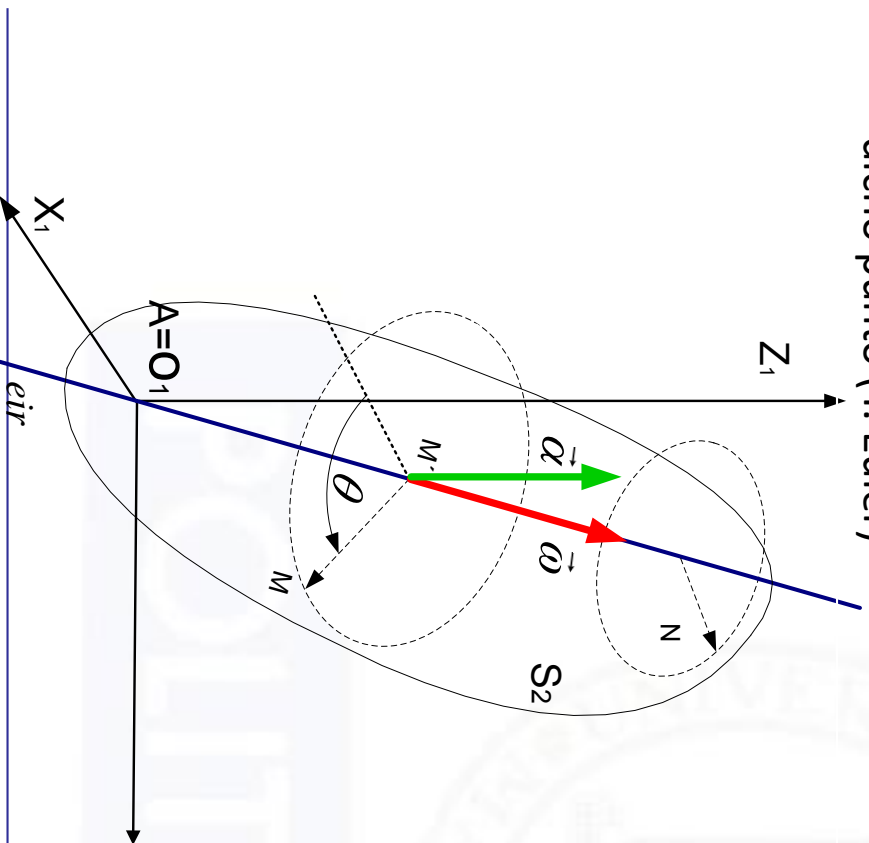
Movimiento con un punto fijo

Cinem

- **Movimiento con un punto fijo:** un punto del sólido (A) permanece fijo en un sistema de referencia del movimiento.

$$\exists \text{ punto } A \in \text{Sólido} \rightarrow \vec{v}_{21}^A = \vec{a}_{21}^A = \vec{0}$$

- Cualquier movimiento finito del cuerpo en torno a un punto fijo equivale al movimiento de un cuerpo alrededor de un eje particular (paralelo a la velocidad angular) dicho punto (T. Euler)



- \vec{a}_{21} no tiene la misma dirección y magnitud que la velocidad angular ya que la orientación de un instante a otro varía con el tiempo.
- Como $\vec{a}_{21} = \frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt}$ su dirección y magnitud varían con el tiempo.

- Los puntos de dicho eje cumplen:
 - Velocidad nula
 - Aceleración distinta de cero
 - Solo el punto A fijo tiene aceleración nula a lo largo del eje.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Movimiento con un punto fijo

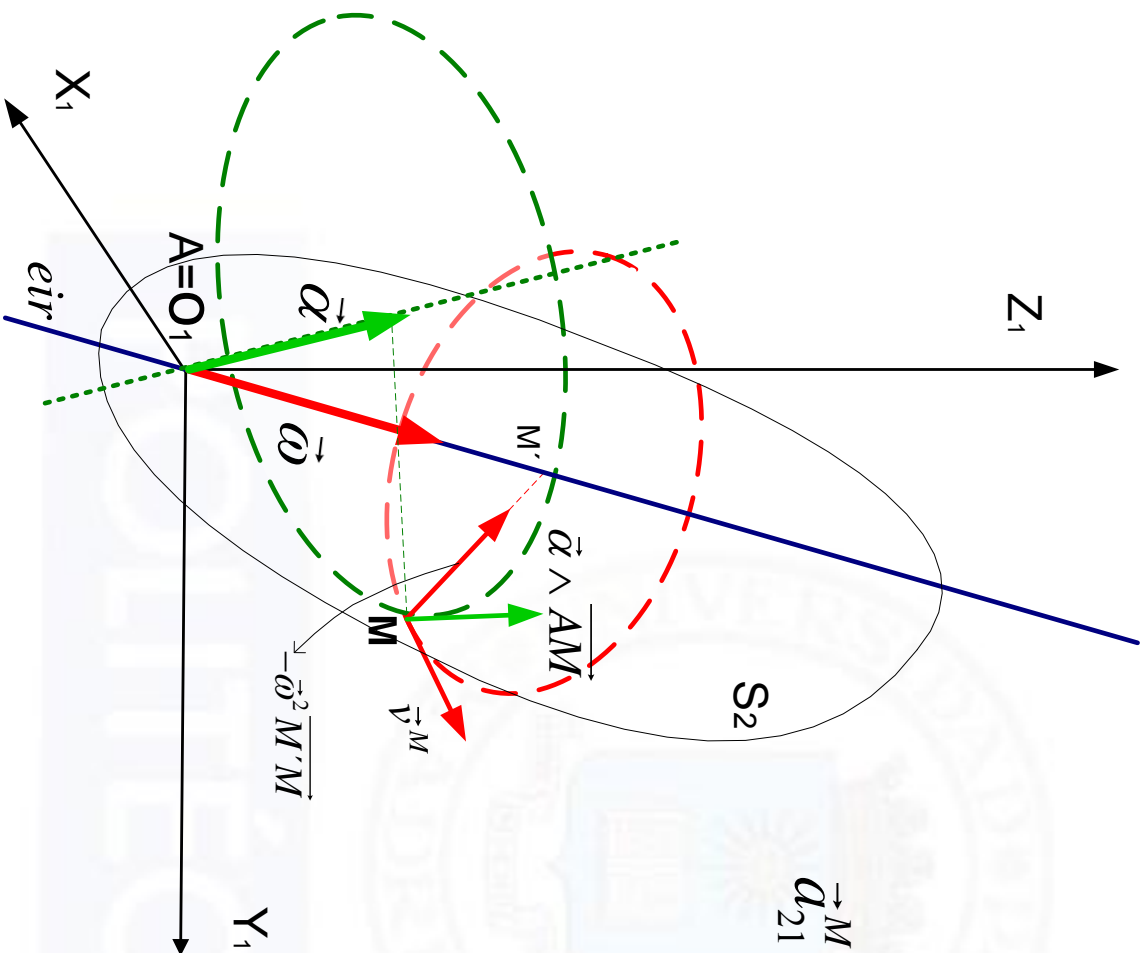
Cinem

- El campo de velocidades y aceleraciones es:

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{\omega}_{21} \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{\alpha}_{21} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\omega}_{21} \wedge (\vec{\omega}_{21} \wedge \overrightarrow{AM})$$

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{\alpha}_{21} \wedge \overrightarrow{AM} - \vec{\omega}_{21}^2 \overrightarrow{AM}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

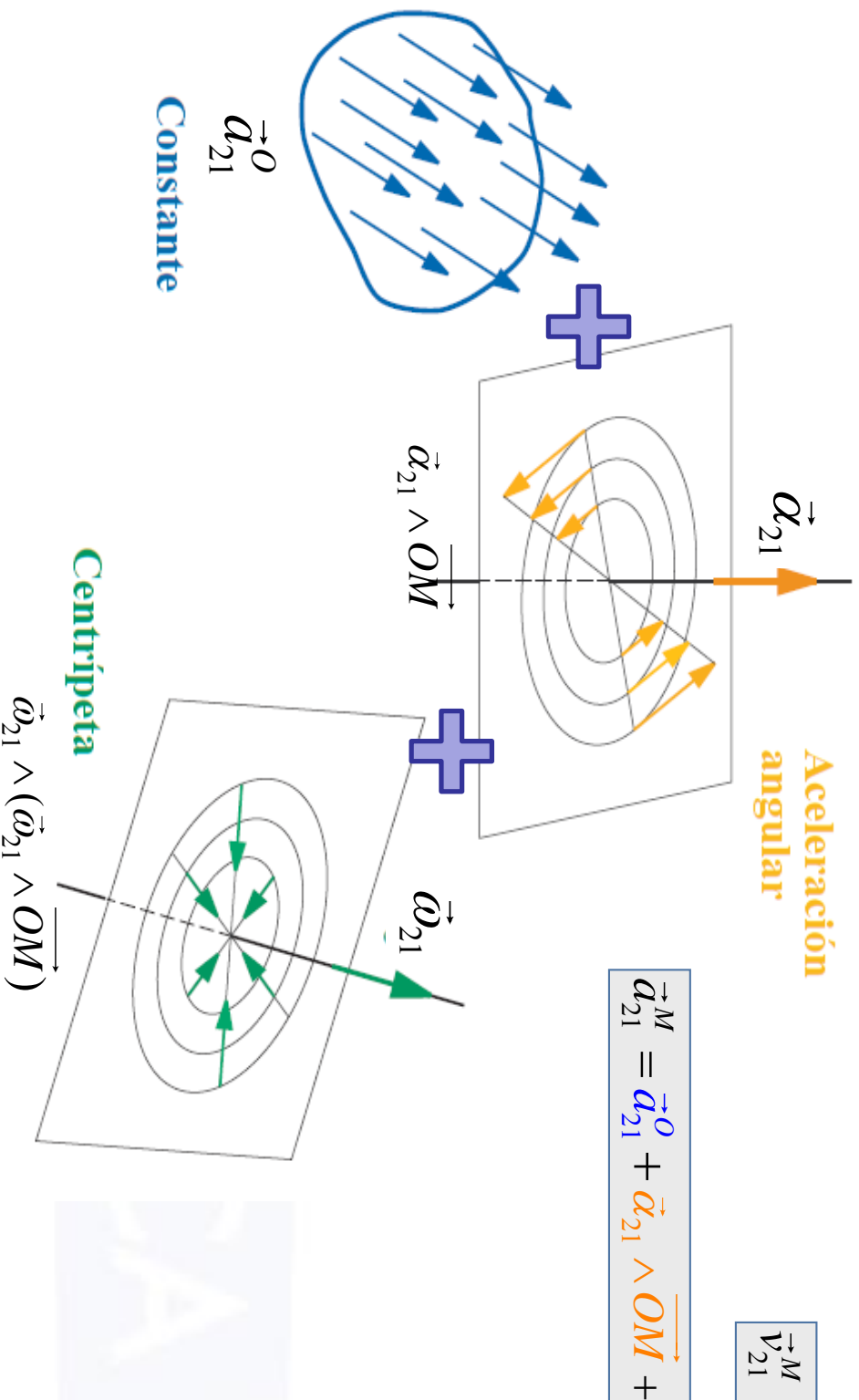
...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Movimiento general

Cinem

El movimiento general del sólido se puede interpretar en cada instante como un movimiento de traslación de la velocidad correspondiente al punto elegido, \vec{v}_{21}^O , más una **rotación alrededor de un eje que pasa por dicho punto angular del sólido** $\vec{\omega}_{21}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

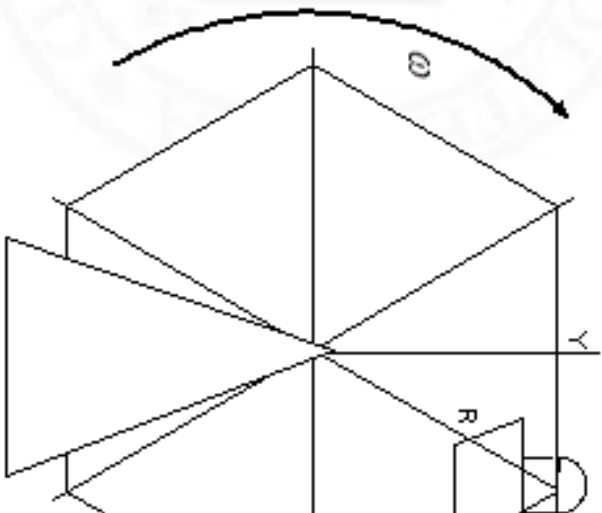
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Cinem

Sea la cabina (S_2) de una noria como la representada en la Figura 1. Sea R el radio de la estructura la velocidad angular de ésta, que es constante. Se considera que las cestas no oscilan respecto a la estructura de la noria. Entonces, la velocidad del punto A de la cabina respecto del suelo pa representado será:

- $\vec{v}_{21}^{-A} = \vec{0}$
- $\vec{v}_{21}^{-A} = \omega R \vec{j}$
- $\vec{v}_{21}^{-A} = -\omega R \vec{j}$
- $\vec{v}_{21}^{-A} = -\omega^2 R \vec{i}$
- Con los datos facilitados no se puede calcular



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

POLITÉCNICA

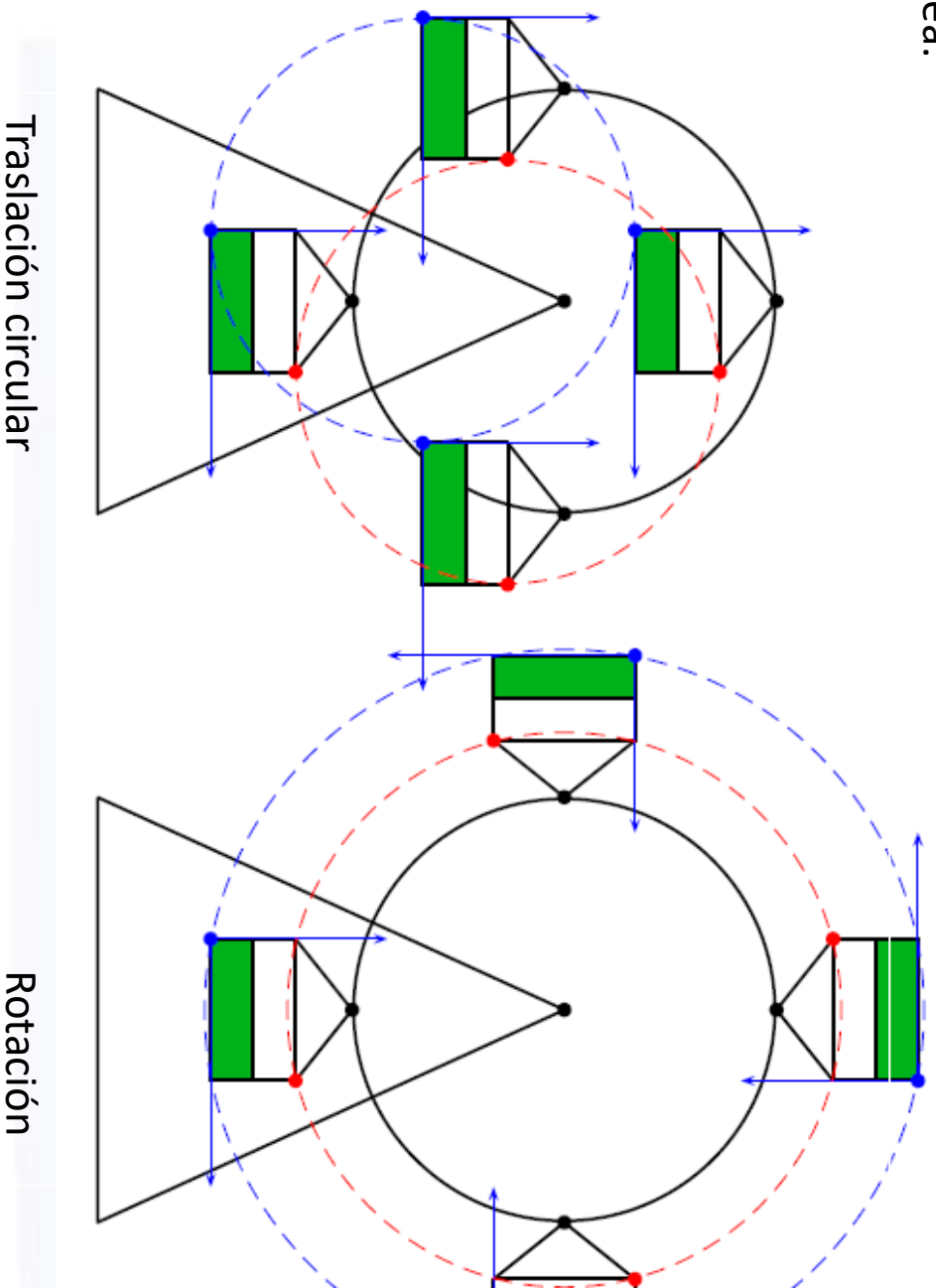
Cartagena99

Movimiento de traslación

Cinem

La traslación puede ser de dos tipos:

- Rectilínea
- Curvilínea:



Traslación circular

Rotación

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

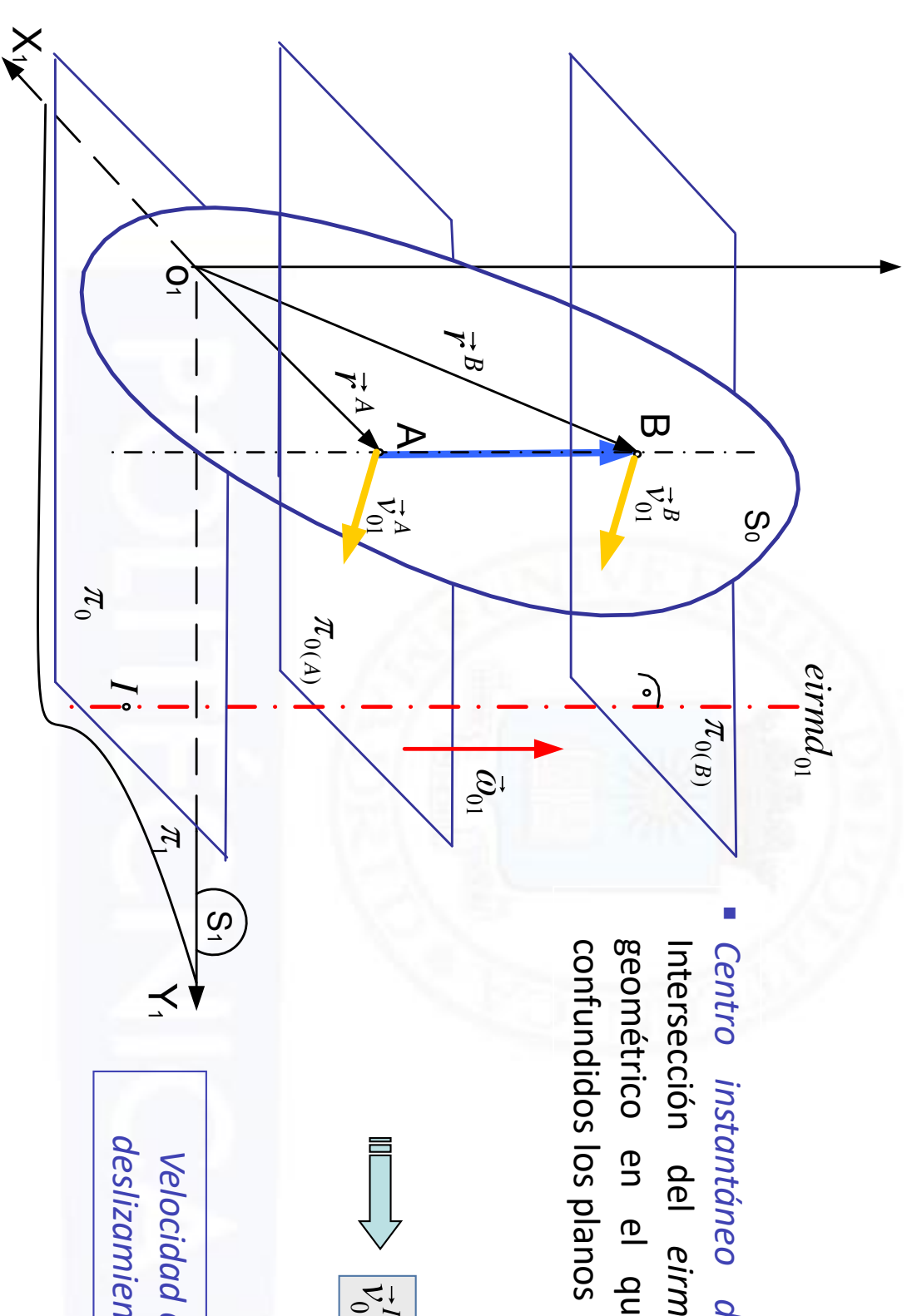
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Movimiento plano

Cinem

- **Movimiento plano:** las velocidades de todos los puntos del sólido móvil S_0 son paralelas a un mismo plano fijo π_1 del sistema de referencia.

- **Centro instantáneo de rotación (CIR):** Intersección del $eirm$ con el plano π_1 . En este punto confundidos los planos



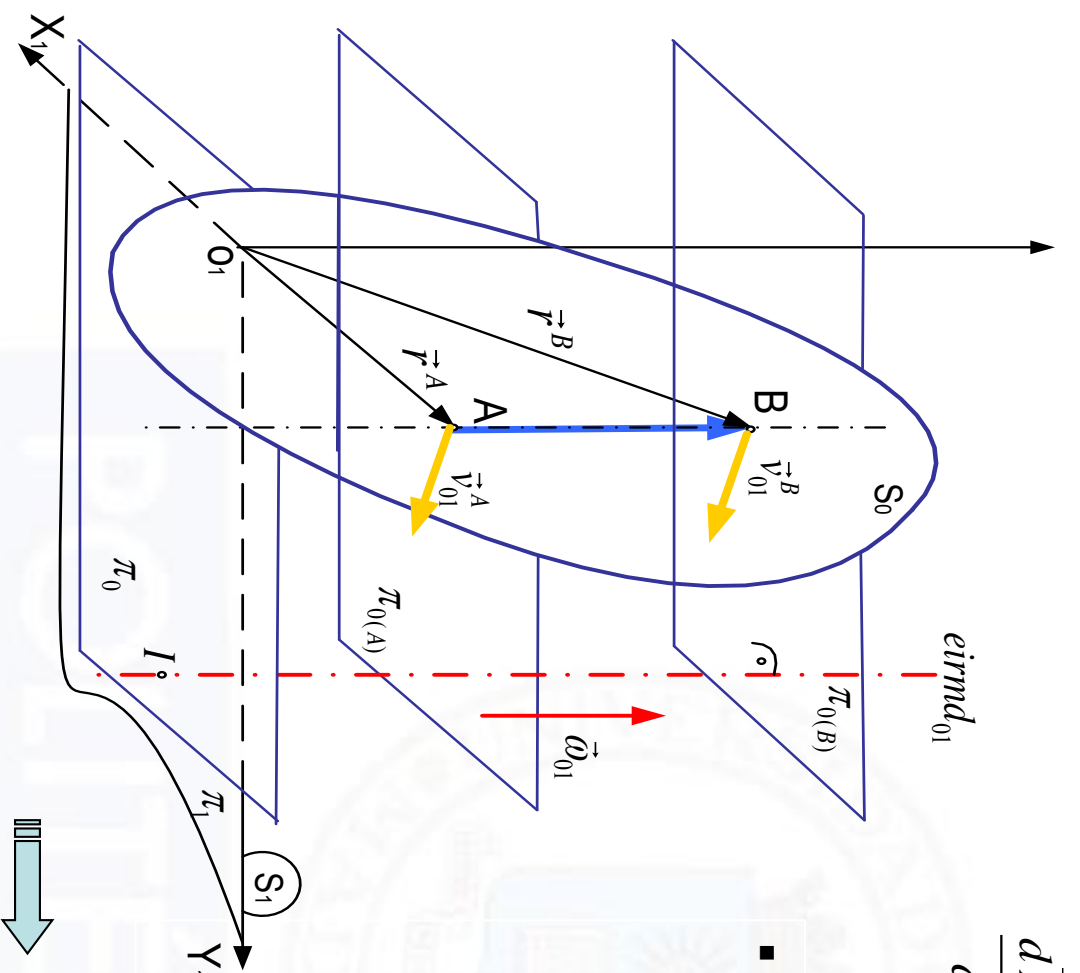
Velocidad de deslizamiento

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Movimiento plano

Cinem



$$\left. \frac{d\overline{AB}}{dt} \right)_{S_1} = 0 = \frac{d\vec{r}^B - d\vec{r}^A}{dt} \Bigg)_{S_1} = \vec{v}_{01}^B - \vec{v}_{01}^A$$

$$\vec{v}_{01}^B - \vec{v}_{01}^A = 0; \quad \vec{v}_{01}^B = \vec{v}_{01}^A \Rightarrow$$

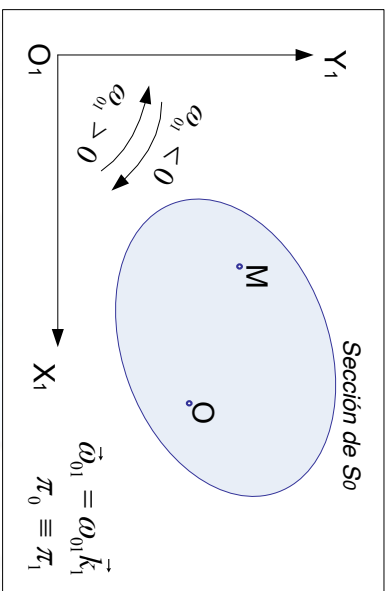
- Las velocidades de los puntos sobre una recta perpendicular son iguales, y por tanto trayectorias y sus aceleraciones
- **El movimiento –trayectoria aceleraciones- se repite en el plano de referencia.**

Campo bidimensional de velocidades y aceleraciones

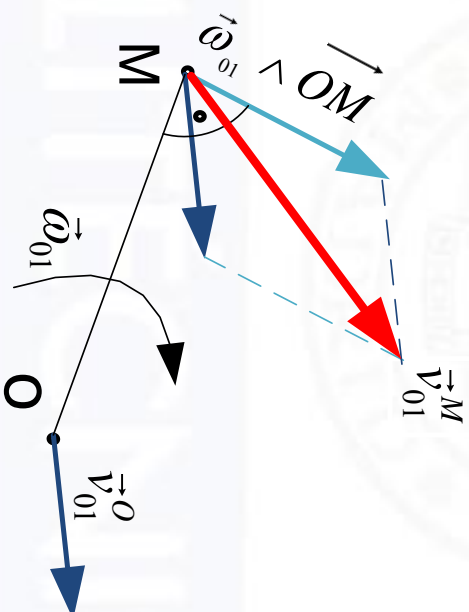
Movimiento plano

Cinem

- *Campo de velocidades, estructura bidimensional*



$$\vec{v}_{01}^M = \vec{v}_{01}^O + \vec{\omega}_{01} \wedge \overline{OM}$$



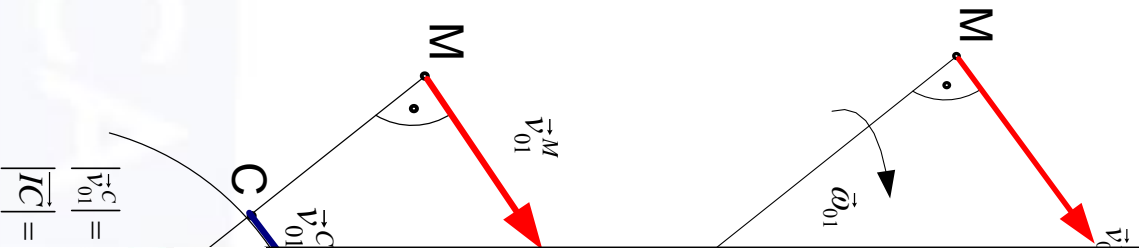
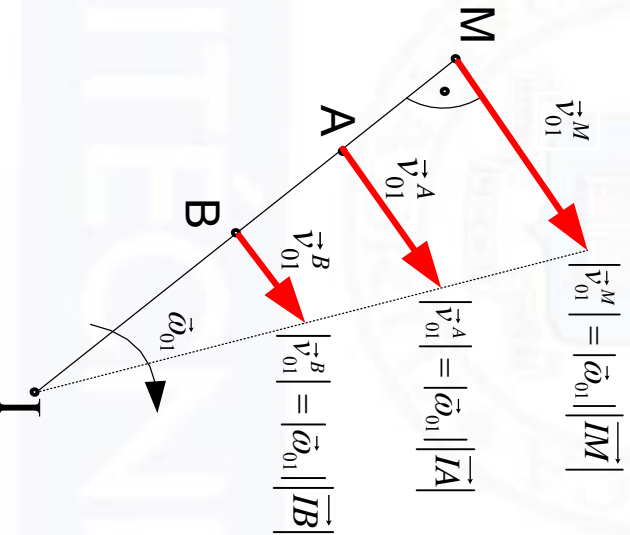
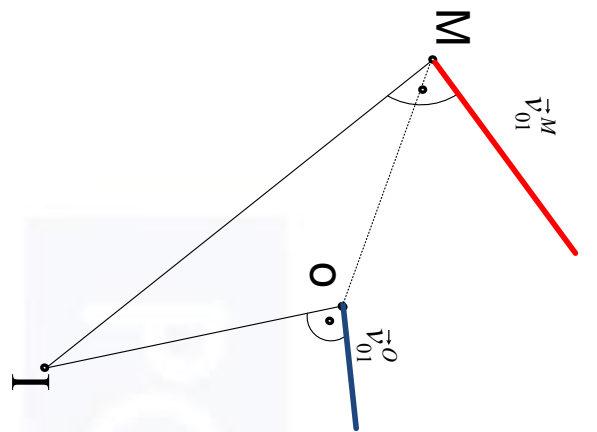
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Movimiento plano

Utilizando el C.I.R.

$$\vec{v}_{01}^M = \vec{v}_{01}^I + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{IM} = \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{IM}$$



Cinem

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Movimiento plano

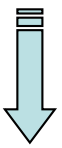
Cinem

■ Campo de aceleraciones

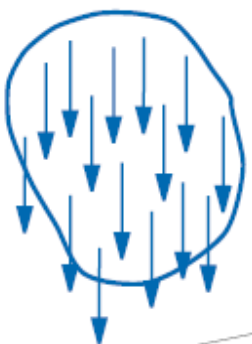
$$\vec{a}_{01}^M = \vec{a}_{01}^O + \vec{\alpha}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM})$$

Desarrollando el doble producto vectorial

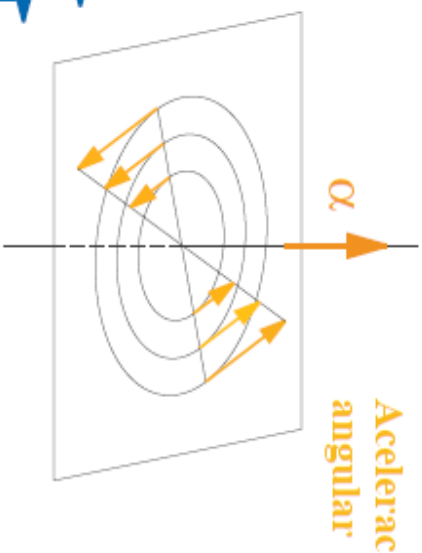
$$\vec{a}_{01}^M = \vec{a}_{01}^O + \vec{\alpha}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \wedge \underbrace{(\vec{\omega}_{01} \cdot \overrightarrow{OM})}_{=0 (\perp)} - \vec{\omega}_{01}^2 \overrightarrow{OM}$$



$$\vec{a}_{01}^M = \vec{a}_{01}^O + \vec{\alpha}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} - \vec{\omega}_{01}^2 \overrightarrow{OM}$$

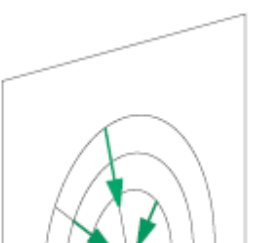


\vec{a}_{21}^O
Constante



Aceleracion
angular

Centrípeta



ω

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

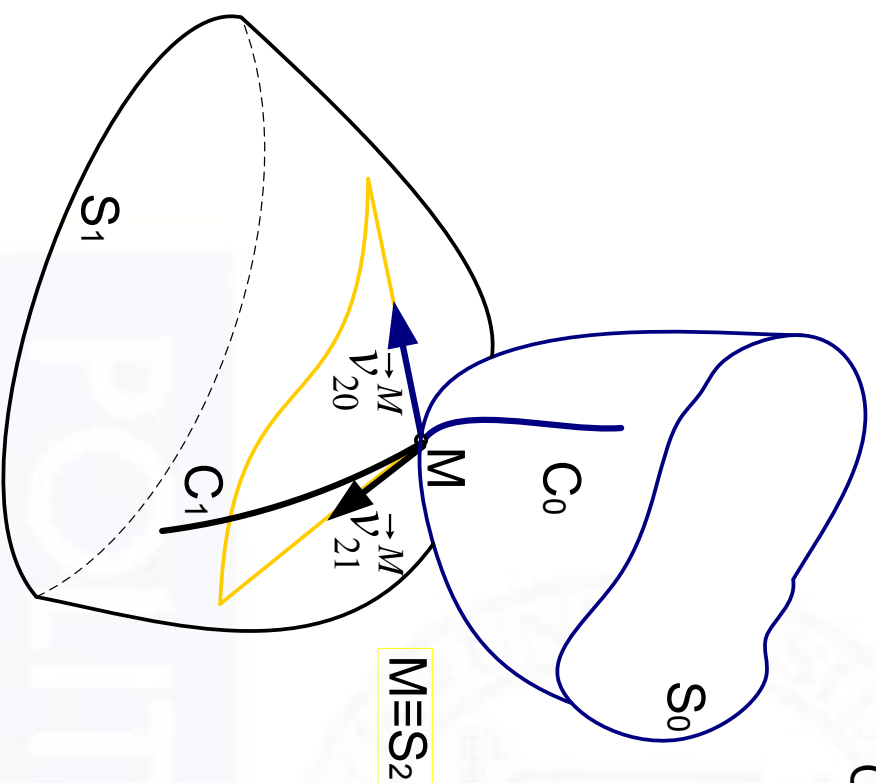
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Sólidos en contacto. Rodadura y deslizamiento

Cinemática

- **Sólidos en contacto:** Se consideran dos sólidos S_0 y S_1 que manteniendo en contacto sus superficies exteriores de forma que en ambas admitan el mismo plano tangente en el punto de contacto M



Condición cinemática

$$\vec{v}_M^1 = \vec{v}_{O1}^M + \vec{v}_M^1 \Rightarrow \vec{v}_{O1}^M =$$

- **Velocidad de deslizamiento** contenida en el plano tangente
- Velocidad angular del sólido tiene dos componentes:
 - **Pivotamiento** (ω_p): plano tangente común
 - **Rodadura** (ω_r): plano tangente común

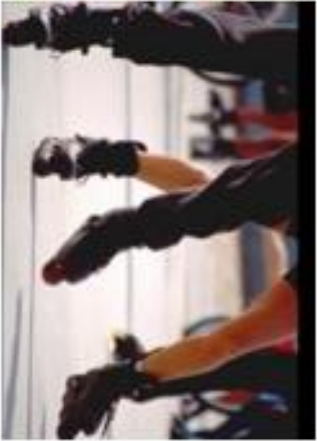
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sólidos en contacto. Rodadura y deslizamiento

Cinem



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sólidos en contacto. Rodadura y deslizamiento

Cinem

Si la velocidad de deslizamiento es nula se dice que los sólidos ruedan *deslizarse*, aunque, por simplicidad, habitualmente se emplea que *rueda* dando por sobreentendido que con ello no se excluye el pivotamiento.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Sólidos en contacto. Rodadura y deslizamiento

Cinem

Si la velocidad de deslizamiento es nula se dice que los sólidos ruedan. Si la velocidad de deslizamiento es distinta de cero se dice que los sólidos deslizar, aunque, por simplicidad, habitualmente se emplea que rueda dando por sobreentendido que con ello no se excluye el pivotamiento.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

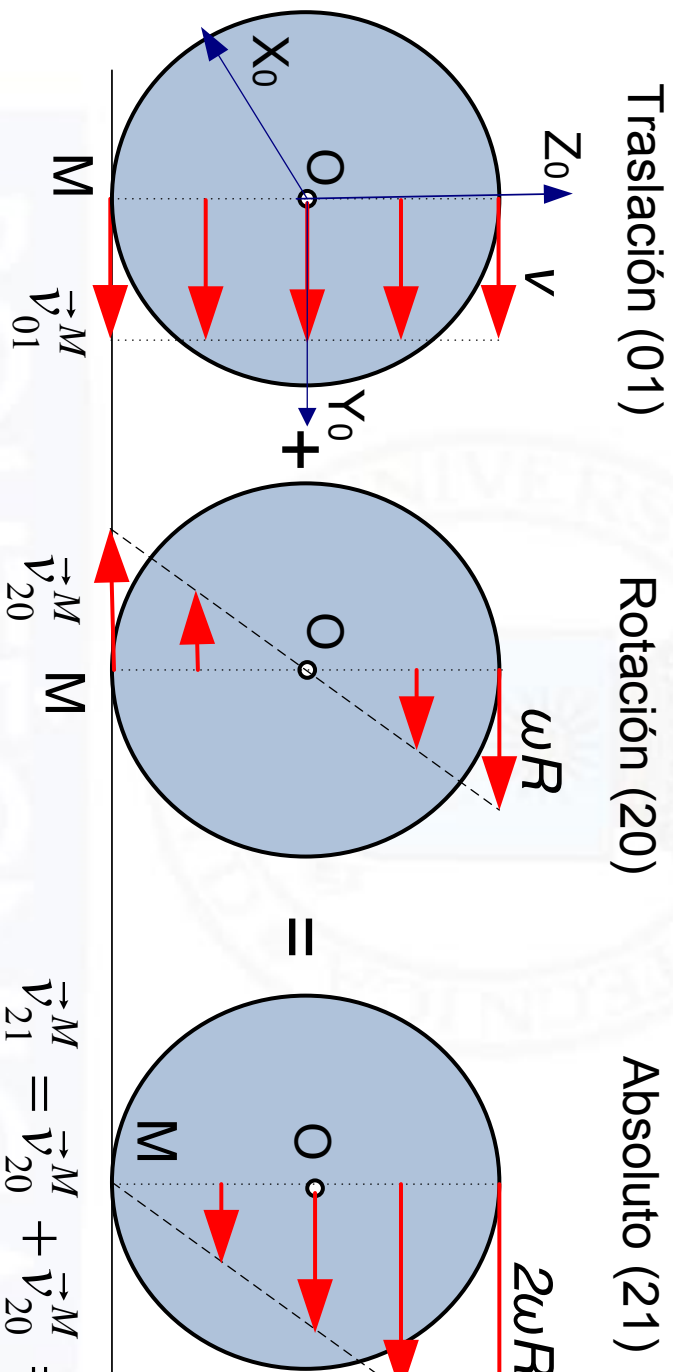
Sólidos en contacto. Rodadura y deslizamiento

Cinemática



¿Cómo rueda sin deslizar?

Se considera un disco de radio R que se desplaza en línea recta rodando con velocidad angular ω



https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Fisica_II/index.html
(Animación en página 143)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

POLITÉCNICA



Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**