

# Cinemática de la Partícula

## Repaso de conocimientos de 1º

Definiciones:

Objeto de la Cinemática

Movimiento

Sistema de referencia

Trayectoria, ley horaria y ecuaciones horarias

Velocidad, aceleración y hodógrafa

Sólido de referencia y sistema coordinado

Cambio de sistema coordinado

Derivadas en ejes móviles: Teorema de coriolis

## Otros sistemas de coordenadas

Cilíndricas

Polares

Esféricas

POLITÉCNICA

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- ✓ **Cinemática:** se ocupa del **movimiento**, sin entrar a considerar su causa

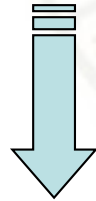


¿Qué es el movimiento?

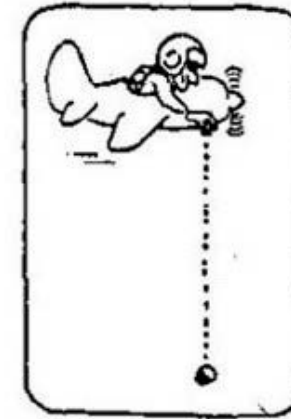
“El movimiento es el **cambio** de **posición** de respecto al **sistema de referencia**”



**El movimiento es un concepto relativo<sup>1</sup>**



Depende del  
**Sistema de Referencia**



<sup>1</sup><http://www.youtube.com/wat>  
<http://www.youtube.com/wat>

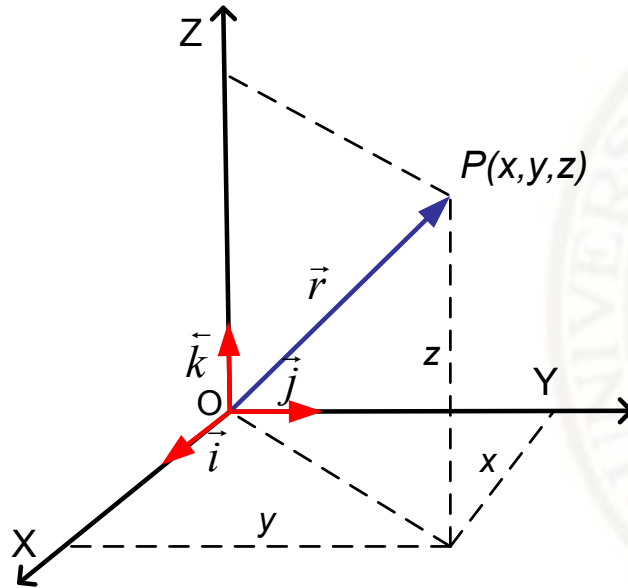


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

✓ **Sistema de referencia:** Triedro o referencia triortogonal orientada formado por:



$$S = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \equiv O_{xyz}$$

Unitarios:  $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

Ortogonales:  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

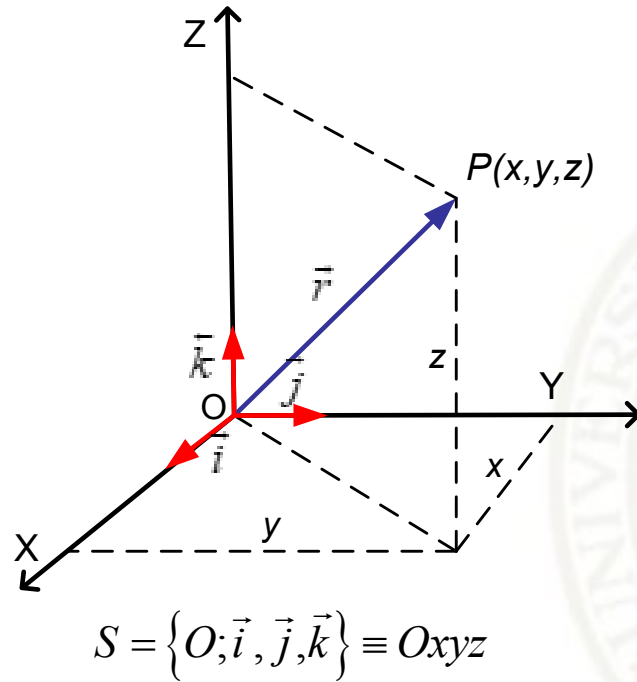
A derechas:  $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$

La **posición** de cada partícula  $P$  queda determinada por las tres **cartesianas**,  $(x, y, z)$ , del punto geométrico con el que coincide en el espacio. Éstas son las componentes del **vector de posición** (o *radiovector*) en la

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 ---  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70





✓ Se dirá que la partícula  $P$  está en reposo respecto de un sistema de referencia  $S$  si su posición no cambia con el tiempo

$$\vec{r} = cte$$

✓ Se dirá que la partícula  $P$  está en movimiento respecto del sistema de referencia  $S$  si su posición varía con el tiempo

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

✓ Para un *sistema de partículas*:

✓ Está en **reposo** respecto de un sistema de referencia  $S$  si, y sólo si, todas las partículas lo están.

✓ Está en **movimiento** respecto de un sistema de referencia  $S$  si al menos una de las partículas lo está.

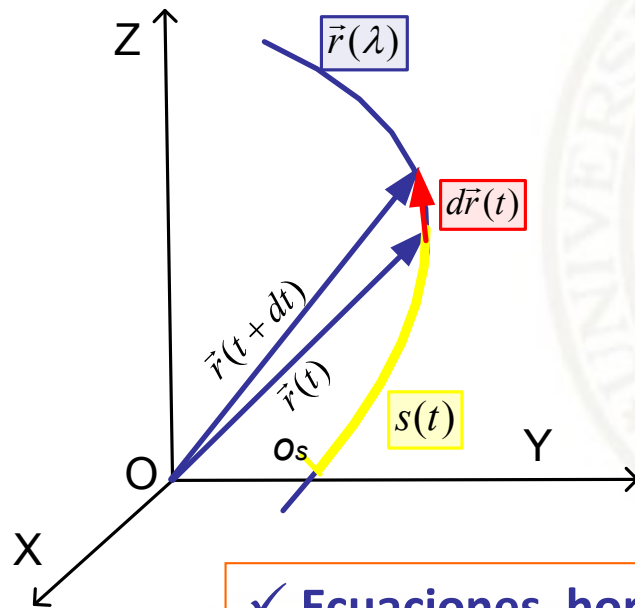
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



✓ Para **definir el movimiento** es necesario conocer no solamente las posiciones que ha ocupado el móvil sino cómo las ha ido ocupando con el tiempo, es decir, la posición del móvil en cada instante.



✓ **Trayectoria:** lugar geométrico de las posiciones ocupadas por la partícula en un intervalo de tiempo:

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$$

✓ **Ley horaria:** forma en que el móvil describe la trayectoria:

$$s = s(t)$$

✓ **Ecuaciones horarias:** Ecuaciones paramétricas de la trayectoria, tomando como parámetro el tiempo:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

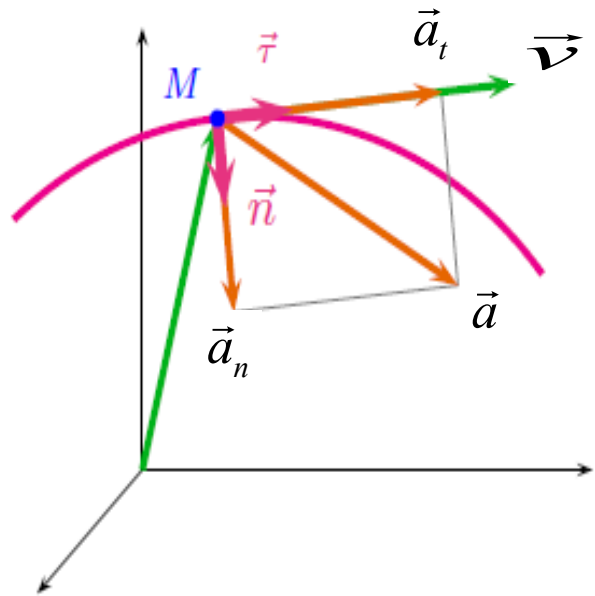
$$\text{o de forma condensada: } \vec{r} = \vec{r}(t)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70





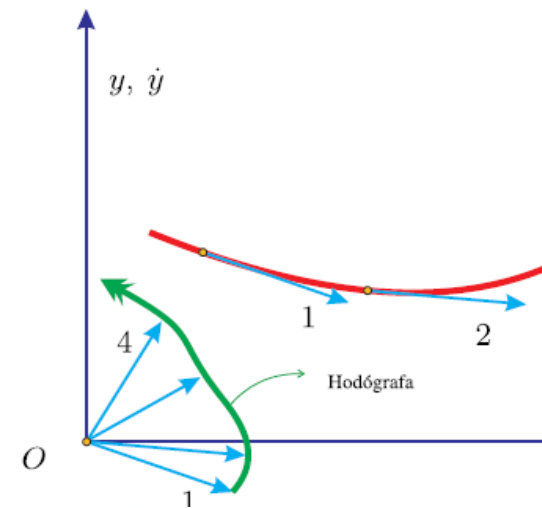
✓ **Velocidad:**

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

✓ **Aceleración:**

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} =$$

✓ **Hodógrafa:** curva descrita por el extremo de un vector equipolente al vector velocidad, llevado al origen



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

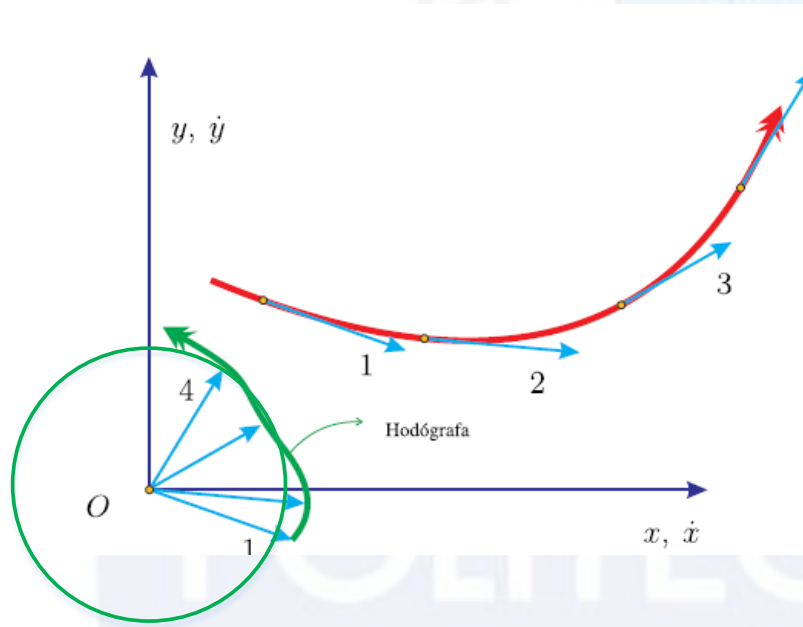
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70





Si la hodógrafa del movimiento de una partícula es una circunferencia con el origen, sabemos que :

1. El vector velocidad es constante
2. El vector aceleración es constante
3. La aceleración tangencial es nula
4. Ninguna de las anteriores es correcta



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

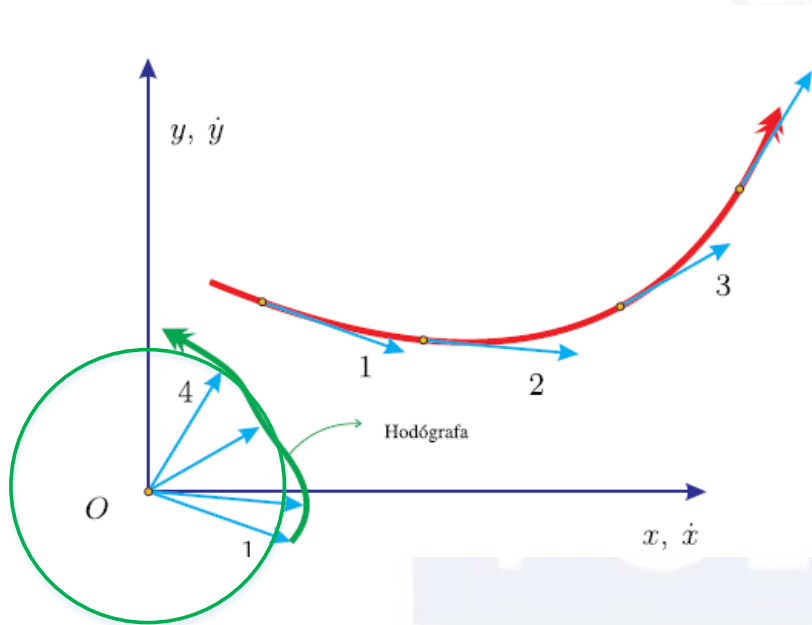
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Si la hodógrafa del movimiento de una partícula es una circunferencia con el origen, sabemos que :

1. El vector velocidad es constante
2. El vector aceleración es nulo
- ➔ 3. La aceleración tangencial es nula
4. Ninguna de las anteriores es correcta



1. No, es constante solo en  $m$  (radio de la circunferencia) en dirección
2. No, porque la velocidad no es constante, cambia su dirección
3. Sí, el módulo de la velocidad es constante
4. Ninguna de las anteriores

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70







Un satélite describe una trayectoria curvilínea con una velocidad y aceleración conocidas en cualquier instante. La **aceleración normal** vendrá dada por

1.  $\vec{a}_n = \vec{a} \cdot \vec{n}$
2.  $\vec{a}_n = (\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{n}$
3.  $\vec{a}_n = (\vec{a}_t \cdot \vec{n}) \vec{n}$
4. Ninguna de las anteriores es correcta

POLITÉCNICA



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

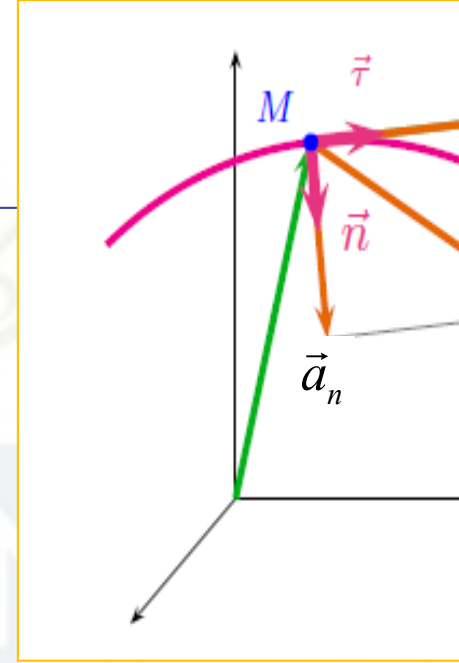
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Un satélite describe una trayectoria curvilínea con una velocidad y aceleración conocidas en cualquier instante. La **aceleración normal** vendrá dada por

1.  $\vec{a}_n = \vec{a} \cdot \vec{n}$
- ➔ 2.  $\vec{a}_n = (\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{n}$
3.  $\vec{a}_n = (\vec{a}_t \cdot \vec{n}) \vec{n}$
4. Ninguna de las anteriores es correcta



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

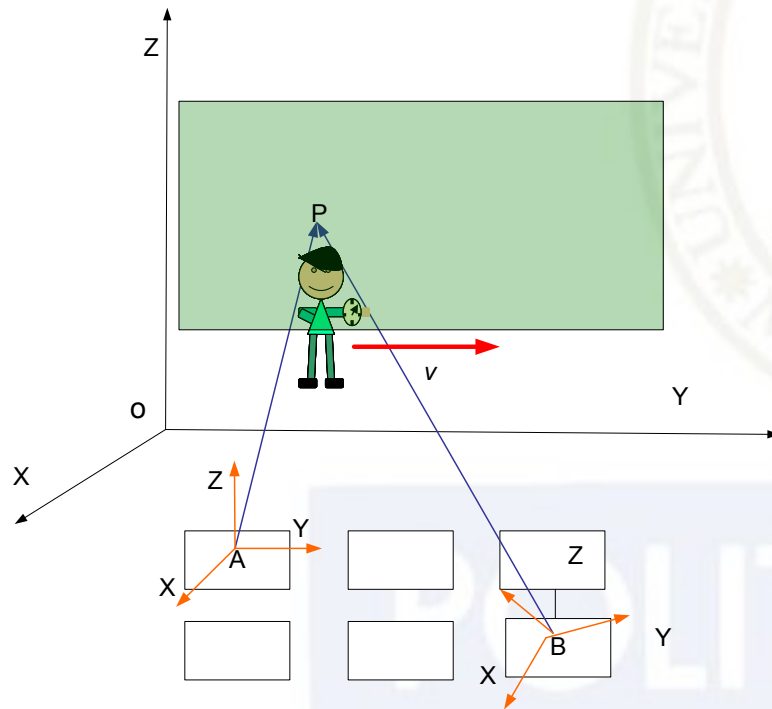
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



✓ **Sólido de referencia:** sólido ideal (distancias entre los puntos constantes) que ocupa todo el espacio en el que se mueve una partícula

✓ En un *sólido de referencia* dado hay muchos *sistemas de referencia* diferentes



¿ La velocidad del profesor, del alumno A y del alumno B es la misma?

Cartagena99

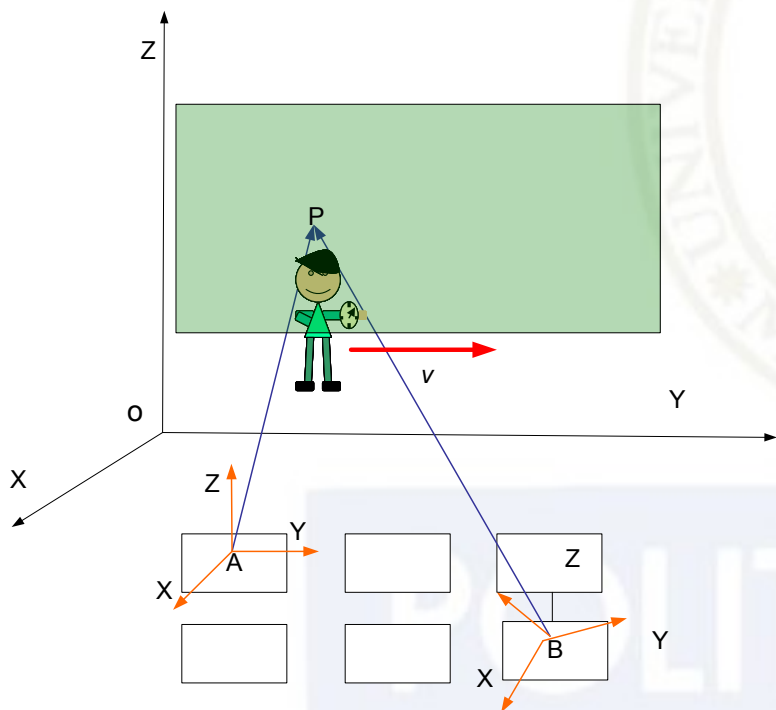
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

✓ **Sólido de referencia:** sólido ideal (distancias entre los puntos constantes) que ocupa todo el espacio en el que se mueve una partícula

✓ En un *sólido de referencia* dado hay muchos *sistemas de referencia* diferentes



¿ La velocidad del profesor, del alumno A y del alumno B es la misma?

$$\vec{AP} \neq \vec{BP}$$

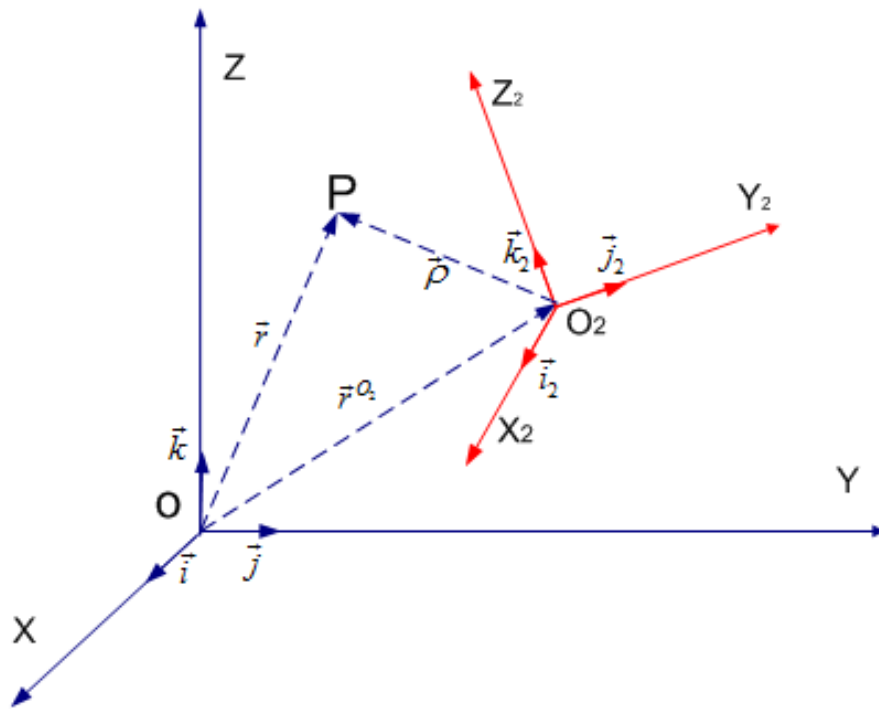
$$\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$$

$$\vec{v}^{P/A} = \frac{d\vec{AP}}{dt} = \frac{d\vec{AB}}{dt} + \frac{d\vec{BP}}{dt}$$

=0

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 ---  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70





Punto  $P$  del espacio y dos referencias cartesianas rectas

$$S = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

$$S_2 = \{O_2; \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2\}$$



¿Qué relación existe entre las coordenadas  $(x, y, z)$  del mismo punto  $P$ ?

Se necesitan los siguientes datos:

1. Las coordenadas del punto  $O_2$  en el sistema de referencia  $S$

$$\overrightarrow{OO_2} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



## Cambio de sistema coordenado

Cinemática

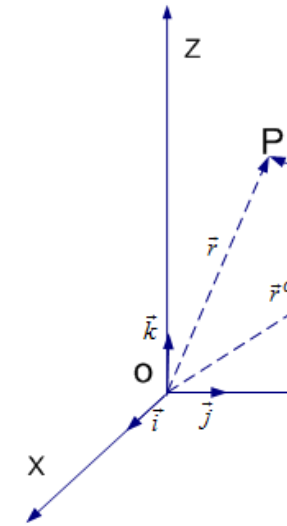
2. Las coordenadas de los versores en la referencia S

$$\left. \begin{aligned} \vec{i}_2 &= q_1^1 \vec{i} + q_1^2 \vec{j} + q_1^3 \vec{k} \\ \vec{j}_2 &= q_2^1 \vec{i} + q_2^2 \vec{j} + q_2^3 \vec{k} \\ \vec{k}_2 &= q_3^1 \vec{i} + q_3^2 \vec{j} + q_3^3 \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \end{bmatrix} Q$$

Donde la matriz  $Q$  es la *matriz de cambio de base* entre las bases  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  y  $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$

$$Q = \begin{pmatrix} q_1^1 & q_1^2 & q_1^3 \\ q_2^1 & q_2^2 & q_2^3 \\ q_3^1 & q_3^2 & q_3^3 \end{pmatrix}$$

Ambas bases son *ortonormales* y  $Q$  es *ortogonal*, esto es, satisface la relación:  $Q^T \cdot Q = I \Leftrightarrow Q^{-1} = Q^T$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

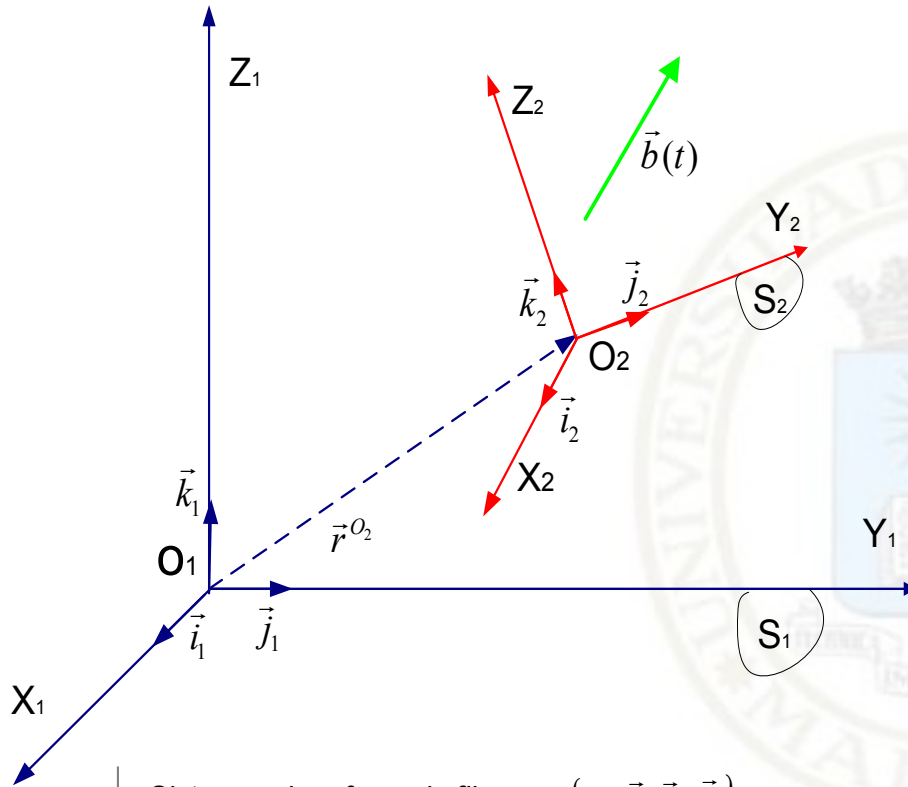
De la ecuación vectorial

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2P} \quad (\vec{r} = \vec{r}^{O_2} + \vec{\rho}) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$



## Teorema de Coriolis

Cinemática



Sistemas de referencia fijo  $S_1 = \{O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\}$

y móvil  $S_2 = \{O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2\}$

$\vec{\omega}_{S_2/S_1}$

$$\left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right)_{S_1} = \left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right)_{S_2} + \vec{\omega}_{S_2/S_1} \wedge \vec{b}$$

Casos particulares:

- Si los sistemas  $S_1$  y  $S_2$  son pa...

$$\left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right)_{S_1} = \left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right)_{S_2}$$

- Si la función vectorial  $\vec{b}(t)$  es sistema móvil  $S_2$ :

$$\left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right)_{S_1} = \vec{\omega}_{S_2/S_1} \wedge \vec{b}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

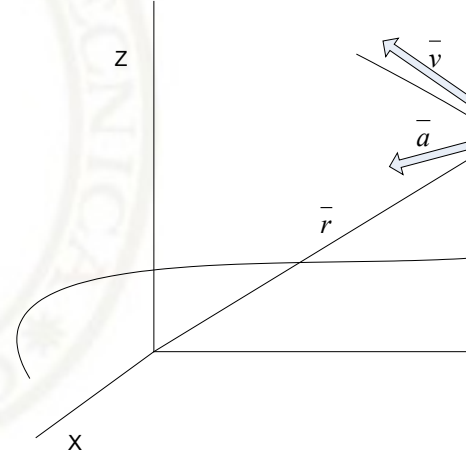
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



### Problema 3

Un avión describe una trayectoria curvilínea en el espacio. En la posición representada en el diagrama, el avión tiene una velocidad  $\vec{v} = v(-\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$  y una aceleración  $\vec{a} = a(-\vec{j} + \vec{k})$ . Determine en este instante:

- Componente tangencial de la aceleración del avión.
- Componente normal de la aceleración del avión.
- Vectores unitarios  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$  y  $\vec{b}$  del triedro intrínseco.



**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Cinemática de la Partícula

## Repaso de conocimientos de 1º

Definiciones:

Objeto de la Cinemática

Movimiento

Sistema de referencia

Trayectoria, ley horaria y ecuaciones horarias

Velocidad, aceleración y hodógrafa

Sólido de referencia y sistema coordinado

Cambio de sistema coordinado

Derivadas en ejes móviles: Teorema de coriolis

## Otros sistemas de coordenadas

Cilíndricas

Polares

Esféricas

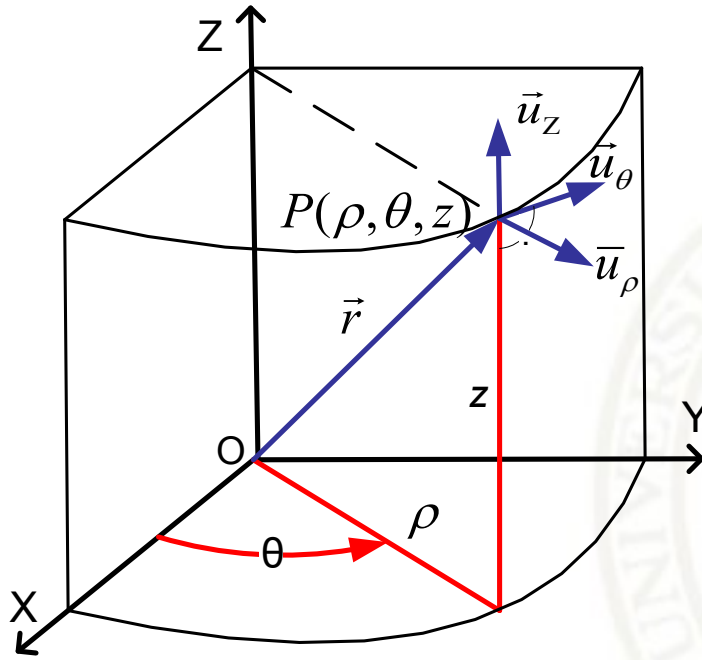
POLITÉCNICA

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



- $\rho$  : radio o coordenada radial (  $0 \leq \rho < \infty$  )
- $\vartheta$  : azimut o longitud (  $0 \leq \theta < 2\pi$  )
- $z$  : altura (  $-\infty < z < \infty$  )

✓ **Vector de posición:**  $\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$

✓ **Velocidad:**  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$

✓ **Aceleración:**  $\vec{a} = ( \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 ) \vec{u}_\rho + ( 2 \dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} ) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$



✓ Cuando  $z=0 \rightarrow$  **coordenadas polares**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Coordenadas Esféricas

- $r$  : radio o distancia al origen ( $0 \leq r < \infty$ )
- $\vartheta$  : azimut o longitud ( $0 \leq \theta < 2\pi$ )
- $\varphi$  : latitud ( $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ )

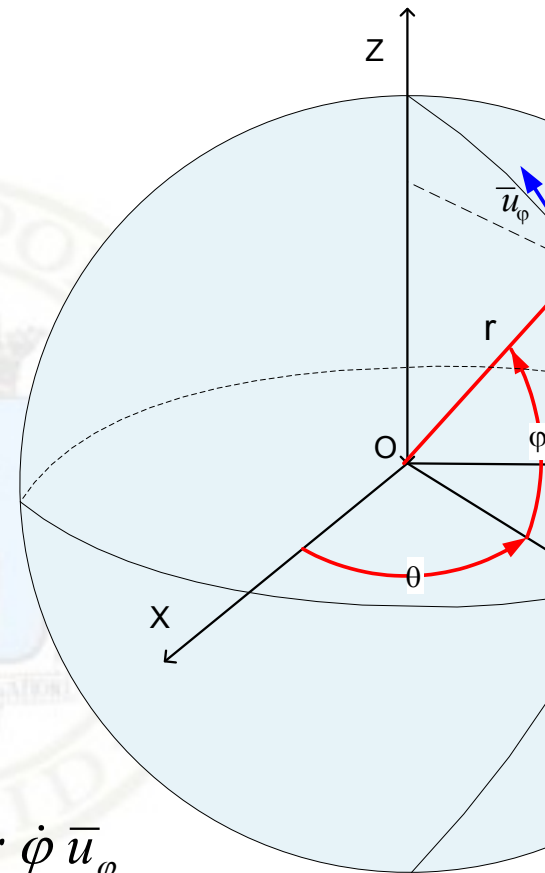
✓ **Vector de posición:**  $\vec{r} = r \vec{u}_r$

✓ **Velocidad:**  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{u}_\theta + r \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$

✓ **Aceleración:**

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi - r \dot{\varphi}^2) \vec{u}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} \cos \varphi + r \ddot{\theta} \cos \varphi - 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi) \vec{u}_\theta + (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \dot{\theta}^2 \cos \varphi \sin \varphi + r \ddot{\varphi}) \vec{u}_\varphi$$

Cinemática



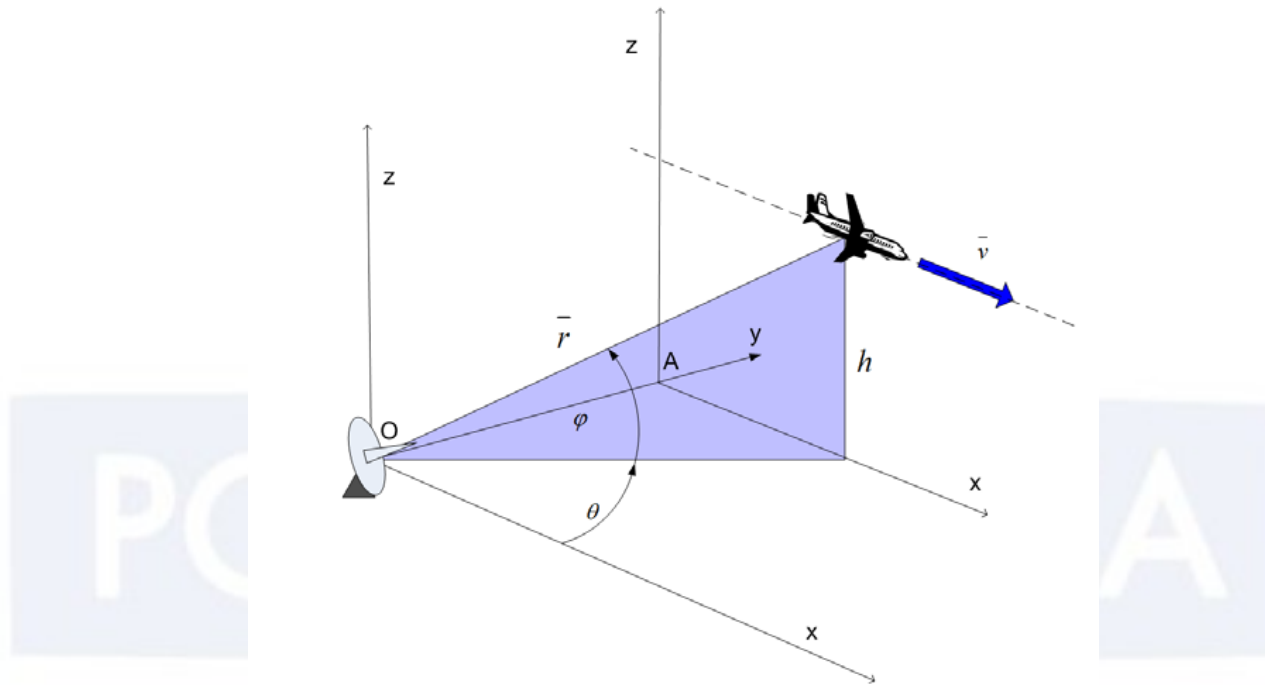
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



7. Un avión vuela horizontalmente con velocidad  $\vec{v}$  a una altura  $h$  respecto del punto O, en el halla situada una antena siguiendo su trayectoria rectilinea y uniforme. En el instante inicial ( $t_0$ ) avión sobrevuela la posición A. Sabiendo que la distancia del punto A al punto O es  $d$ , determina
- 7.1. Posición del avión indicando sus coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ .
  - 7.2. Velocidad del avión en el sistema de coordenadas esféricas centrado en la antena.
  - 7.3. Si a partir de un determinado instante comienza a variar su velocidad,  $v(t)$ , siguiendo la trayectoria, obtener su aceleración en el sistema de coordenadas esféricas centrado en la an



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

