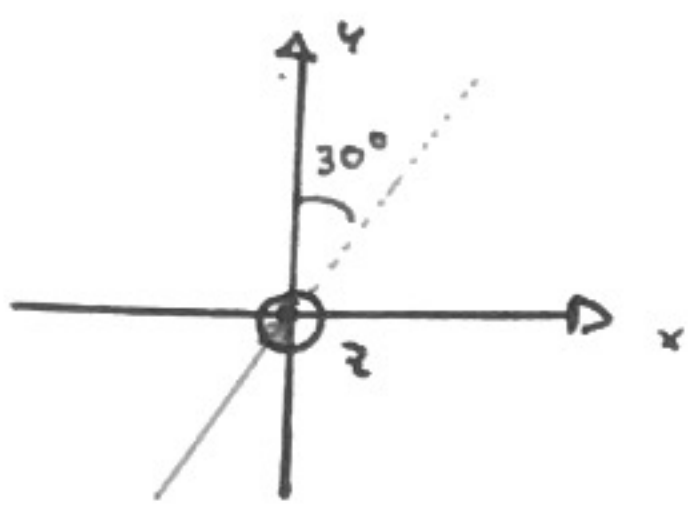


$$\vec{E}(0,0,t=0) = 2\hat{z} \text{ V/m}; \lambda = 13 \text{ cm} = 0.13 \text{ m}$$



$$a) \vec{E}(x,y,z,t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \hat{z} \text{ V/m}$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}; \text{ Si } \vec{r} = \vec{0} \text{ y } t=0 \rightarrow \boxed{E_0 = 2}$$

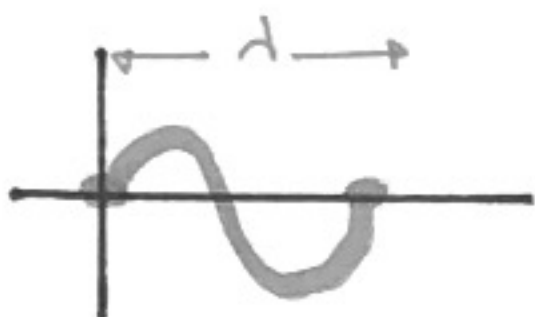
$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}};$$

↳ velocidad de propagación.

$$v_p = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1.5 \cdot 20}} = 5.48 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$\Gamma = \frac{\lambda}{v_p}; \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{v_p}$$

$$f = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{5.48 \cdot 10^7}{0.13} = 4.22 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$



$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 4.22 \cdot 10^8 = 2.65 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

$$\vec{k} = \cos 60^\circ \hat{x} + \cos 30^\circ \hat{y} = \frac{1}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y}$$

$$\vec{E}(x,y,t) = 2 \cdot \cos(2.65 \cdot 10^9 t - (\frac{1}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y}) \cdot \vec{r}) \hat{z} \text{ V/m}$$

↳ no hay z.

POLARIZACIÓN

$$\vec{E}(z,t) = \hat{E}_0 \hat{x} + \hat{E}_0 y \cos(\omega t - kz) \text{ V/m}$$

$$\hat{E}_0 x, \hat{E}_0 y \in \mathbb{C}$$

1. Polarización lineal

Siempre conviene hacer $z=0$

$$\cos(\omega t - kz) \rightarrow \cos(\omega t)$$

* $\hat{E}_{0x} \rightarrow$ lo tomamos como fase nula, el de referencia.

* $\hat{E}_{0y} \rightarrow$ sería el desfase de este complejo respecto de $\hat{E}_{0x}$

$$\text{Si } \hat{E}_{0x} = a_x; \hat{E}_{0y} = a_y e^{j\delta}$$

$$\vec{E}(z) = (a_x \hat{x} + a_y e^{j\delta} \hat{y}) e^{-jkz}$$

• Con $\delta = 0 \Rightarrow$ Polarización lineal en fase

• Con $\delta = \pi \Rightarrow$ Polarización lineal en oposición de fase.

32

31

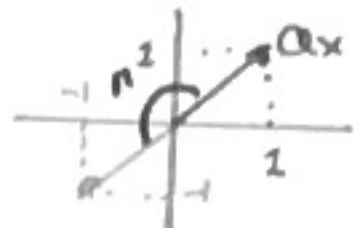
Examen

30

23

$$ej: a_x = 1+j$$

$$a_y = -1-j$$



→ a la línea se le llama polarización lineal

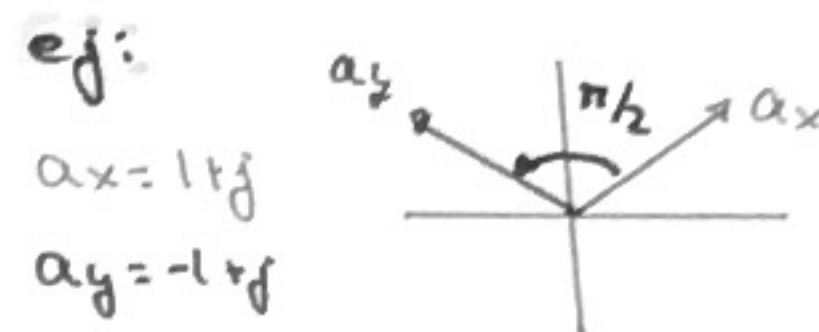
2. Polarización circular

* Se debe verificar:

$$1 |a_x| = |a_y|$$

$$2 \delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{polarización circular dextrógira (derecha)}$$

$$\delta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{polarización circular levógira (izquierda)}$$



3. Polarización elíptica

$$\text{Si } \delta \neq 0, \pm \frac{\pi}{2}, n\pi \Rightarrow \text{elíptica}$$

$$\text{Si } \delta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ pero } |a_x| \neq |a_y| \Rightarrow \text{elíptica}$$

ESEMPLOS

$$a) \vec{E} = (-\hat{x} - 2\sqrt{3}\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z})e^{-j0.04\pi(\sqrt{3}x-2y-3z)} \text{ V/m}$$

↳ dirección de propagación viene dada aquí.

$$\vec{E}(\vec{r}) = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z} e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}}; \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$a_x = -1; a_y = -2\sqrt{3}; a_z = \sqrt{3}$$

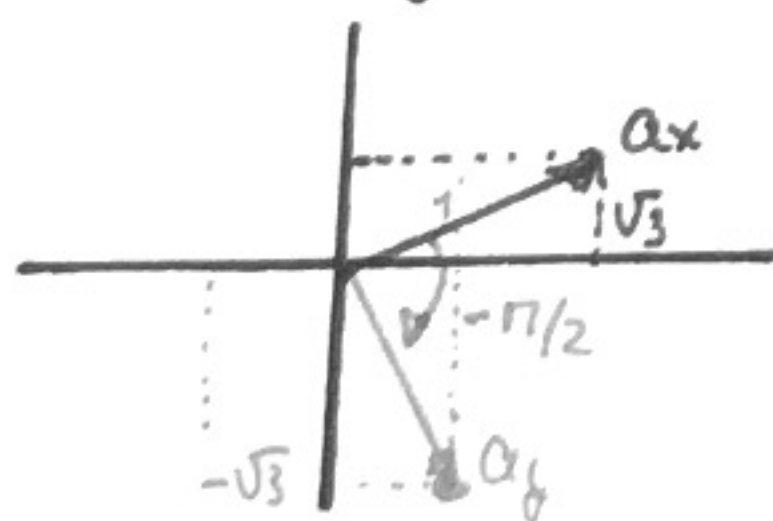


ES POLARIZACIÓN LINEAL

$$b) \vec{H} = [\sqrt{3} + j]\hat{x} + (1 - j\sqrt{3})\hat{y} e^{-j10\pi z} \text{ mA/m}$$

$$a_x = \sqrt{3} + j; a_y = 1 - j\sqrt{3}$$

$$|a_x| = \sqrt{3^2 + 1^2} = 2; |a_y| = 2$$



$$\varphi_x = \text{artg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6 [30^\circ]$$

$$\varphi_y = \text{artg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3} [-60^\circ]$$

ES POLARIZACIÓN CIRCULAR LEVÓGIRA

porque se cumple

$$\begin{cases} |a_x| = |a_y| \\ \text{diferencia de } 90^\circ \end{cases}$$

32

31

Examen

30

24

$$\vec{E} = [\sqrt{2}(2\sqrt{3}-j)[2-j] - \hat{z}(4+j2\sqrt{3})] e^{j\frac{\sqrt{2}(x+y)}{2}} \text{ V/m}$$

$$a_x = \sqrt{2}(2\sqrt{3}-j); a_y = -\sqrt{2}(2\sqrt{3}-j); a_z = -(4+j2\sqrt{3})$$

$\hookrightarrow 3^{\text{er}} \text{ cuadrante}$

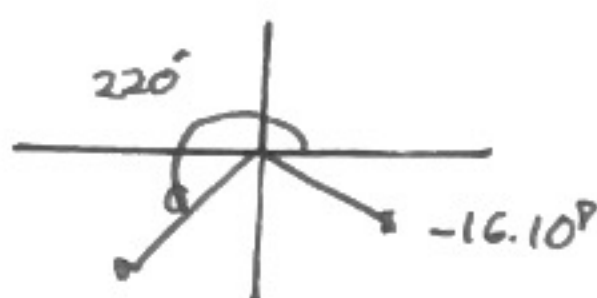
δ entre a_x y a_y es $\delta = \pi$ ya que $a_y = -a_x$

$$\varphi_x = \arctg\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\right) = -16.10^\circ$$

$$\varphi_z = \arctg\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) = 40.89^\circ + 180^\circ = 220.89^\circ$$

$\hookrightarrow 3^{\text{er}} \text{ cuadrante}$

δ entre a_z y $a_x = 203.9^\circ$



es POLARIZACIÓN ELÍPTICA

$$d) \vec{E} = (E_{10}\hat{y} - jE_{20}\hat{z}) \sin(\omega t - kz) \text{ V/m}$$

$$\forall E_{10}, E_{20} \in \mathbb{R}$$

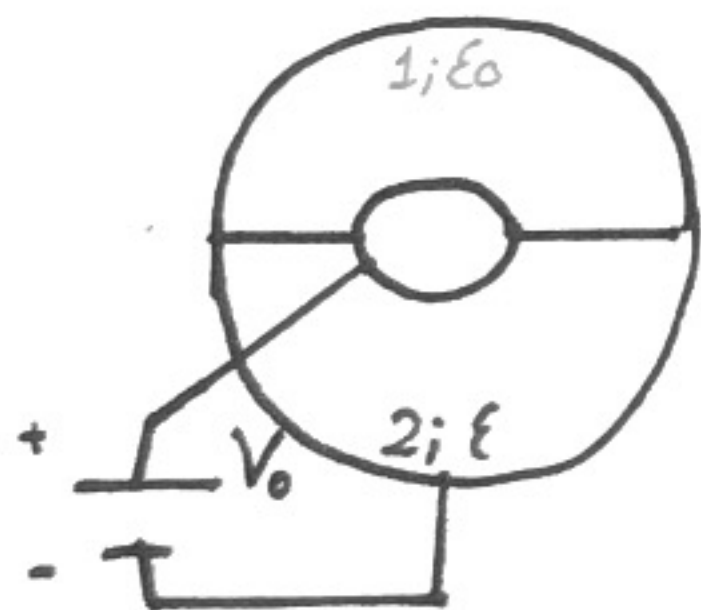
$$* a_y = E_{10} e^{j0}; a_z = -E_{20}j = -E_{20}e^{j\pi/2}$$

$\hookrightarrow \text{euler}$

El desfase δ es $\frac{\pi}{2}$ pero $E_{10} \neq E_{20}$

es POLARIZACIÓN ELÍPTICA

* Condensador esférico formado por:



Radio: a interno, b externo.

En la superficie esférica de radio a tenemos $+Q$

En la superficie esférica de radio b tenemos $-Q$

Calcula el vector de polarización $\vec{P}$ en el medio 2.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$* \text{T}^{\circ} \text{ Gauss para } \vec{D}: \oint_{\mathcal{S}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{S}_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int_{\mathcal{S}_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s}_2 = Q$$

* Debido a la simetría esférica del problema:

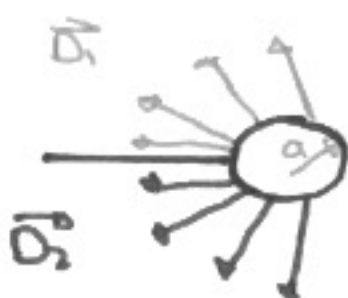
$\vec{D}_1 = D_1(r) \vec{u}_r$; $\vec{D}_2 = D_2(r) \vec{u}_r$; $\vec{D}_1$ y $\vec{D}_2$ también tienen sentido radial. Podemos sacar fuera de la integral tanto a D_1 como a D_2

$$D_1 \oint_{\mathcal{S}_1} \vec{u}_r \cdot d\vec{s}_1 + D_2 \oint_{\mathcal{S}_2} \vec{u}_r \cdot d\vec{s}_2 = Q$$

$$D_1 4\pi r^2 + D_2 4\pi r^2 = Q$$

25

$$\begin{array}{l} \textcircled{1}, \epsilon_0 \\ \rightarrow E_{T1} \quad \uparrow D_{N1} \\ \textcircled{2}, \epsilon \\ \rightarrow E_{T2} \quad \uparrow D_{N2} \end{array}$$

Condiciones de contorno $\begin{cases} E_{T1} = E_{T2} \\ D_{N1} = D_{N2} \end{cases}$ 

* En la superficie frontera entre los medios 1 y 2 los campos $\vec{D}_1$ y $\vec{D}_2$ son ambos tangentes a dicha superficie de separación.

Utilizamos como condición de contorno: $E_{T1} = E_{T2}$

$$\boxed{D = \epsilon E} \quad E_{T1} = \frac{D_1}{\epsilon_0}; E_{T2} = \frac{D_2}{\epsilon}$$

$$\boxed{\frac{D_1}{\epsilon_0} = \frac{D_2}{\epsilon}} \quad \boxed{D_1 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} D_2} \quad \text{y sustituimos en } \textcircled{2} \quad (D_1 + D_2) 2\pi r^2 = Q$$

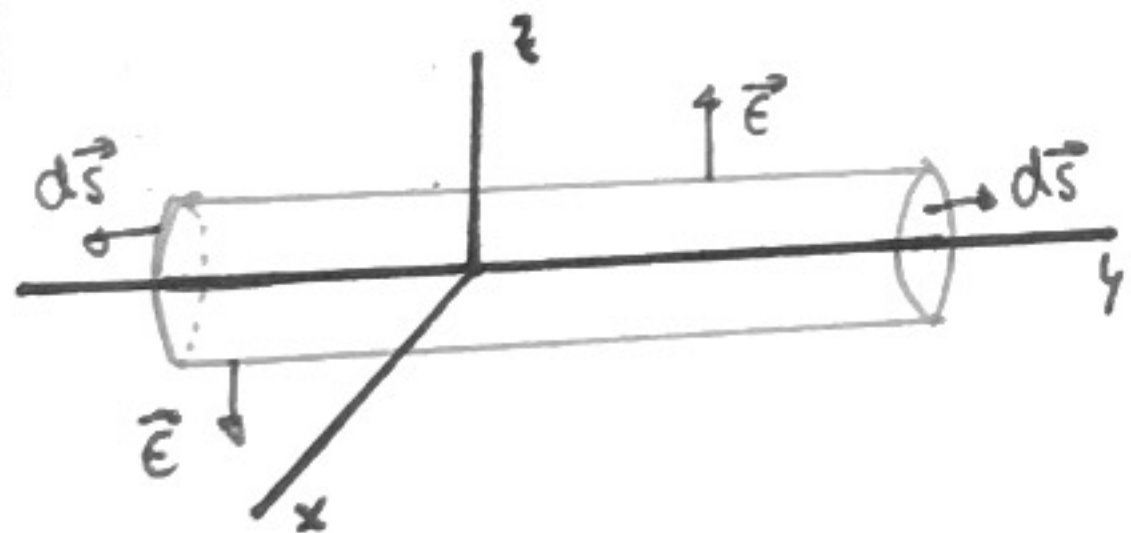
$$\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} D_2 + D_2 \right) 2\pi r^2 = Q; D_2 \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon} + 1 \right] 2\pi r^2 = Q$$

$$D_2 \left[\frac{\epsilon_0 + \epsilon}{\epsilon} \right] 2\pi r^2 = Q; \quad \boxed{D_2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \cdot \frac{Q}{2\pi r^2}}$$

$$D_2 = \epsilon_0 E_2 + P_2; D_2 = \epsilon E_2; \quad \boxed{E_2 = \frac{D_2}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{Q}{2\pi r^2}}$$

$$P_2 = D_2 - \epsilon_0 E_2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{Q}{2\pi r^2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{Q}{2\pi r^2}$$

$$P_2 = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{(\epsilon_0 + \epsilon)} \frac{Q}{2\pi r^2} \quad \text{C/m}^2$$

 $\boxed{E_2}$  $\rho_L: \text{C/m}$

* Para calcular el campo creado por un hilo infinito en un punto a distancia r , utilizamos un cilindro con radio de la base r y eje el hilo

$$\text{Teorema de Gauss } \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}; Q = \rho_L \cdot L$$

El campo eléctrico solo va tener flujo por la superficie lateral y no por las tapas.

$$E S_{\text{lateral}} = \frac{\rho_L \cdot L}{\epsilon_0}; S_{\text{lateral}} = 2\pi r \cdot L$$

$$E 2\pi r L = \frac{\rho_L \cdot L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_L}{\epsilon_0 2\pi r} \quad \text{V/m}$$

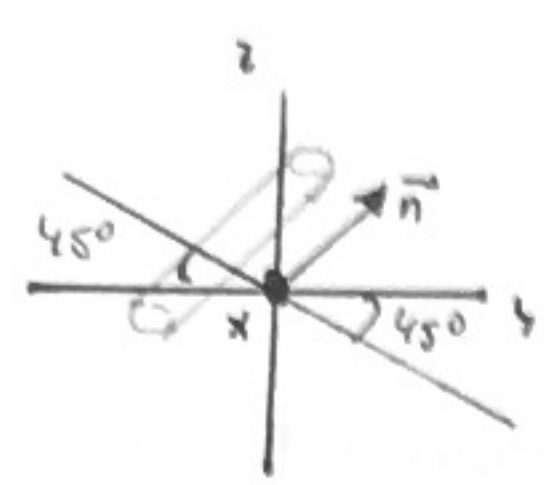
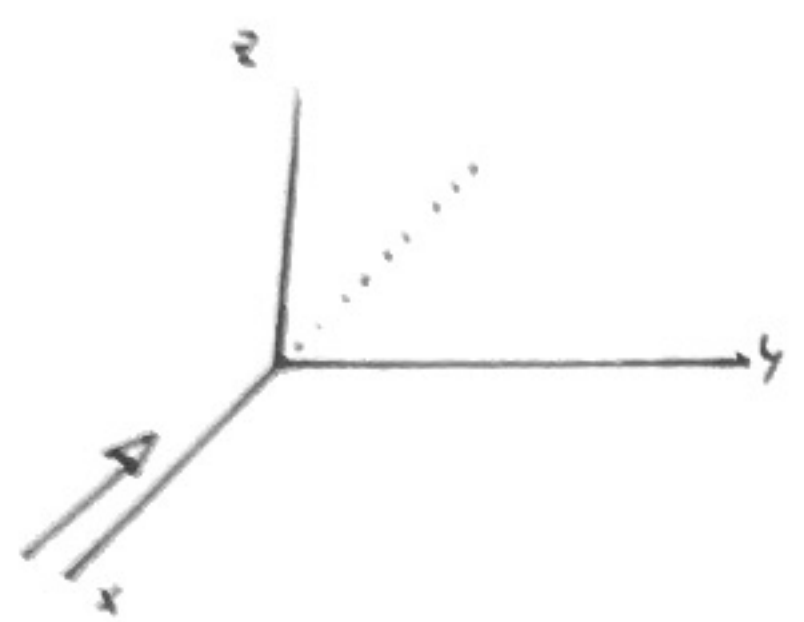
32

33

Examen

27

26



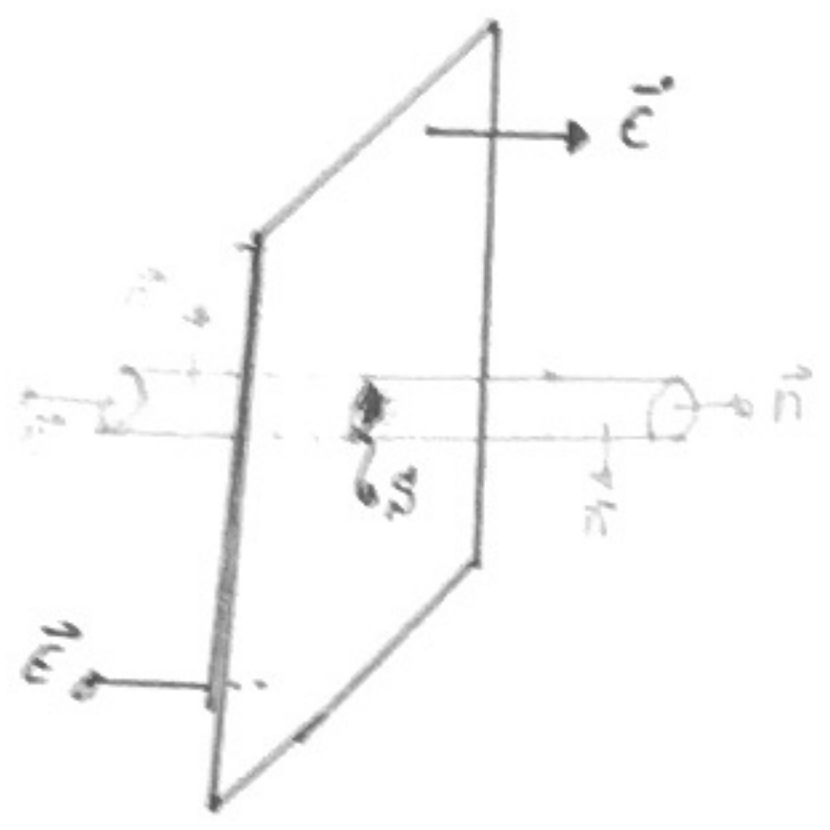
* Vamos a aplicar el T^o de Gauss al plano inclinado que es una superficie infinita cargada. Utilizaremos cilindros perpendiculares al plano.

* Solo tendremos flujo por las tapas, la superficie lateral es perpendicular al $\vec{E}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}; Q = \rho_s \cdot S$$

$$E \cdot 2S = \frac{\rho_s S}{\epsilon_0}; E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \text{ V/m}$$

hay dos tapas

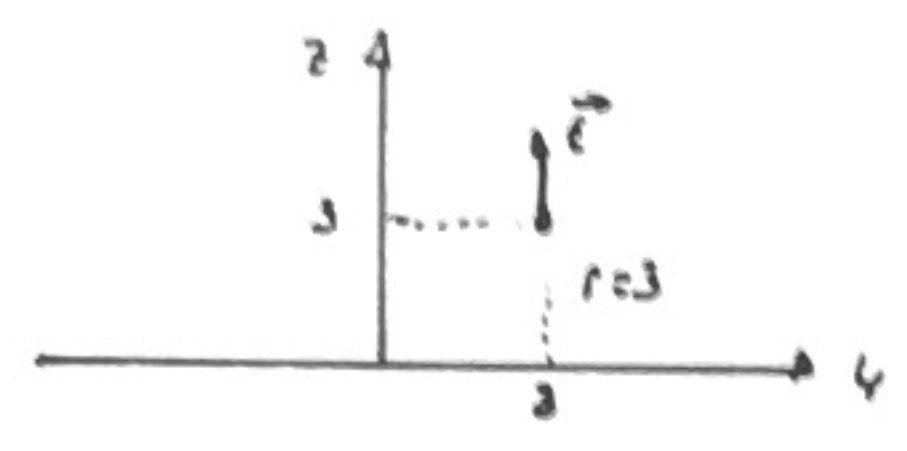


Campo en el (0,3,3)

* Campo creado por el hilo: $E = \frac{\rho_L}{\epsilon_0 2\pi r}$

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{\epsilon_0 2\pi} \hat{z}$$

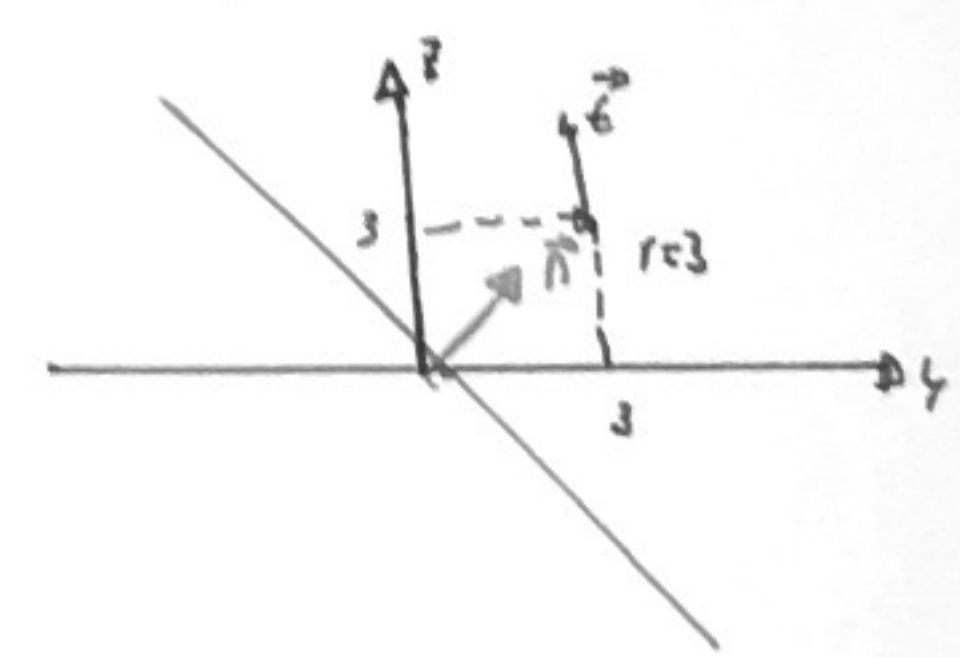
↳ r = distancia de ese punto al hilo en el eje y.



* Campo creado por el plano: $E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$ (no influye la distancia del pto al plano)

$$\vec{n} = \cos 45^\circ \hat{y} + \sin 45^\circ \hat{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{y} + \hat{z})$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{y} + \hat{z}) = \frac{\sqrt{2} \rho_s}{4\epsilon_0} (\hat{y} + \hat{z})$$



Campo total $\Rightarrow$ sumas los dos

Principio de superposición:

$$\vec{E}_r = \frac{\rho_L}{\epsilon_0 2\pi} \hat{z} + \frac{\sqrt{2} \rho_s}{4\epsilon_0} (\hat{y} + \hat{z})$$

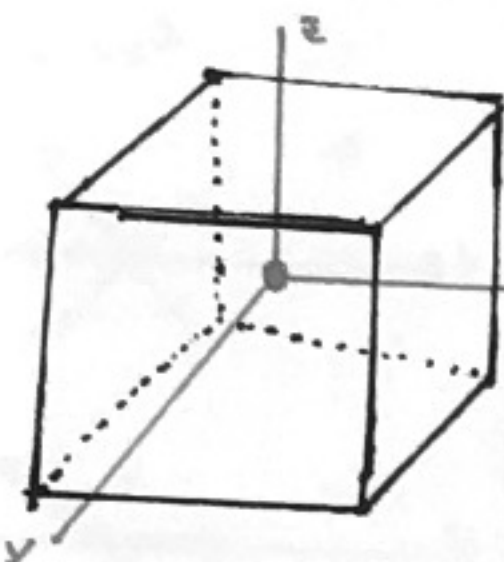
27

2

$$Q_1 = 4.3 \text{ C} \rightarrow (2, 3, 1); Q_2 = 2.2 \text{ C} \rightarrow (4, 5; 0, 0)$$

$$S_1: x = 5.2 \text{ con } \rho_{s1} = 4.7 \text{ C/m}^2$$

$$S_2: y = 3 \text{ con } \rho_{s2} = 3.7 \text{ C/m}^2$$



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{encerrada}}$$

Q_1 en el interior del cubo; Q_2 en el interior del cubo; S_1 está fuera del cubo; S_2 en el interior del cubo.

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_1 + Q_2 + \rho_{s1} \cdot S_1$$

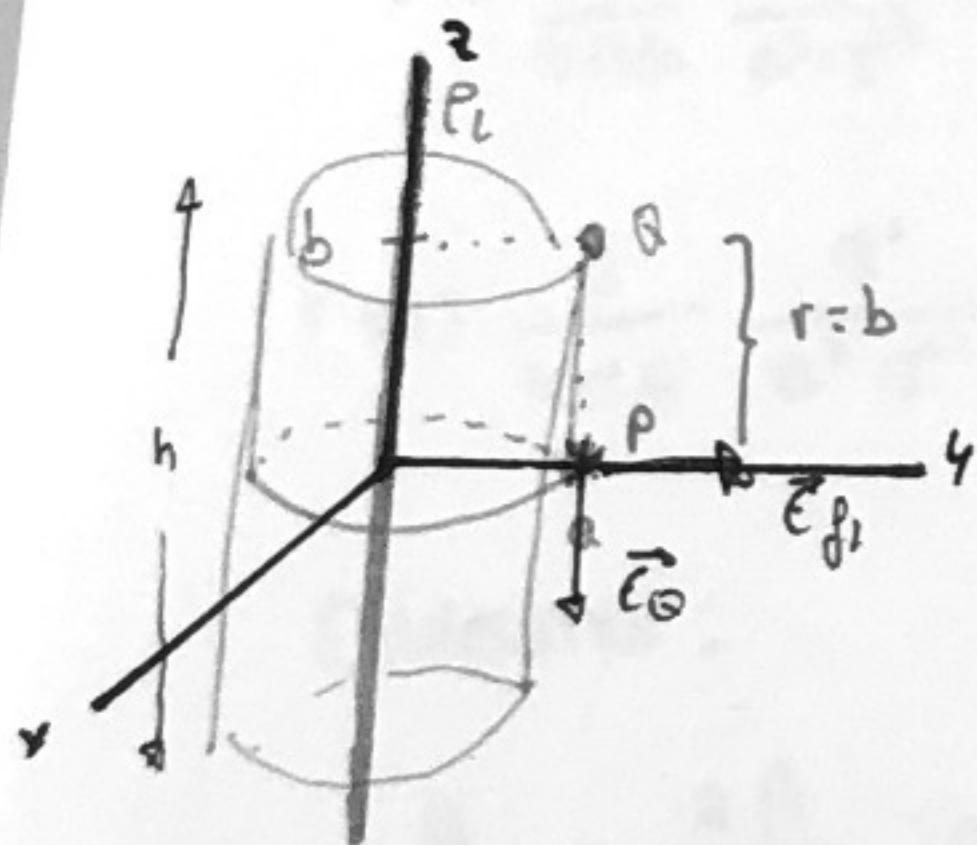
$$S_1 = 10 \times 10 = 100 \text{ m}^2$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4.3 + 2.2 + 3.7 \cdot 100 = 6.4 + 370 = 376.4 \text{ C}$$

Examen 10/07/20 L

Línea infinita con $\rho_L > 0$ [C/m]carga puntual $Q > 0$ colocada en $(0, a, b)$

[a > 0, b > 0]

a) $\vec{E}$ (P(0, a, 0))

* Principio de superposición

$$1) \vec{E}_Q = -E_Q \vec{r} \text{ N/C};$$

$$E_Q = K_e \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b^2}$$

$$\vec{E}_Q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b^2} \vec{r} \text{ N/C ó V/m}$$

$$2) \vec{E}_{\rho_L}: \text{T}^a \text{ Gauss: } \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}; Q = \rho_L \cdot h$$

Solo hay flujo por la superficie lateral.

$$E 2\pi a h = \frac{\rho_L h}{\epsilon_0}; E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}$$

↳ distancia del
pto al hilo

$$E_{fL} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 a};$$

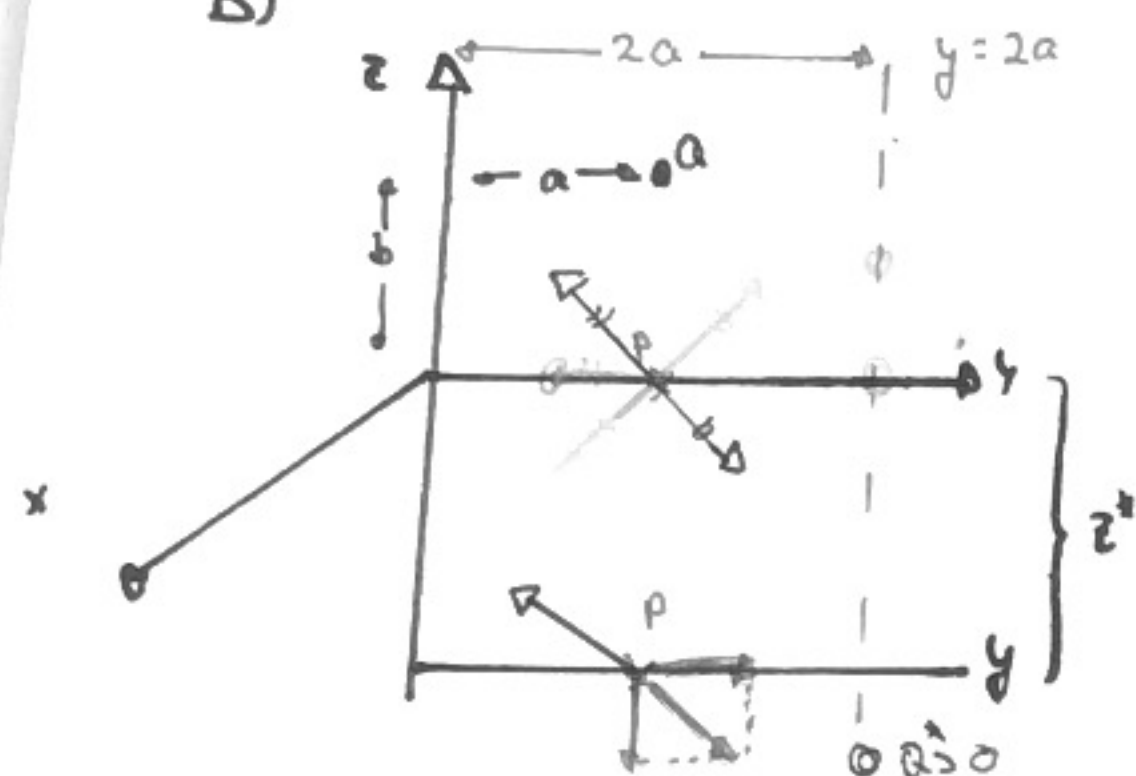
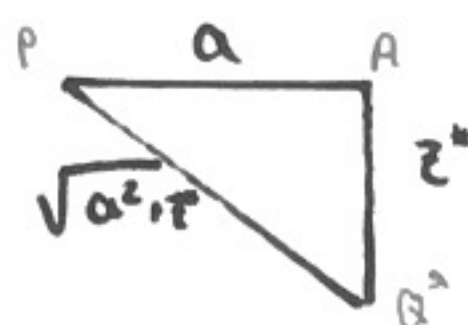
$$\vec{E}_{fL} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{i} \text{ N/C}$$

② $\vec{H} = 2\vec{z} \cos(10^3 t - 2y + \frac{2\pi}{5}) \text{ A/m}$
 $\vec{z}$ $\rightarrow$ dirección de propagación (14)

28

a) $\vec{E}_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \vec{j} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b^2} \vec{k} \text{ N/C}$

b)

 $Q^y (0, 2a, z^y)$ Campo creado por Q^y en P:

$$\vec{E}_{Q^y} = -\vec{E}_1$$

$$\vec{E}_{Q^y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^y}{a^2 + z^y^2} \left[-\cos\alpha \vec{j} + \sin\alpha \vec{k} \right] \text{ N/C}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^y^2}} ; \sin\alpha = \frac{z^y}{\sqrt{a^2 + z^y^2}}$$

$$(v) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^y}{a^2 + z^y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^y^2}} = \frac{-\rho_L}{2\pi\epsilon_0 a} \quad \text{Eje } y$$

$$(vi) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^y}{a^2 + z^y^2} \cdot \frac{z^y}{\sqrt{a^2 + z^y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b^2} \quad \text{Eje } z$$

Dividimos:

$$\frac{a}{z^y} = \frac{2\rho_L}{Q/b^2} ; a \frac{Q}{b^2} = 2 \frac{\rho_L}{a} z^y$$

$$z^y = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \frac{Q}{\rho_L}$$

$$(*) \Rightarrow Q^y = \frac{2\rho_L}{a^2} (a^2 + z^y^2)^{3/4}$$

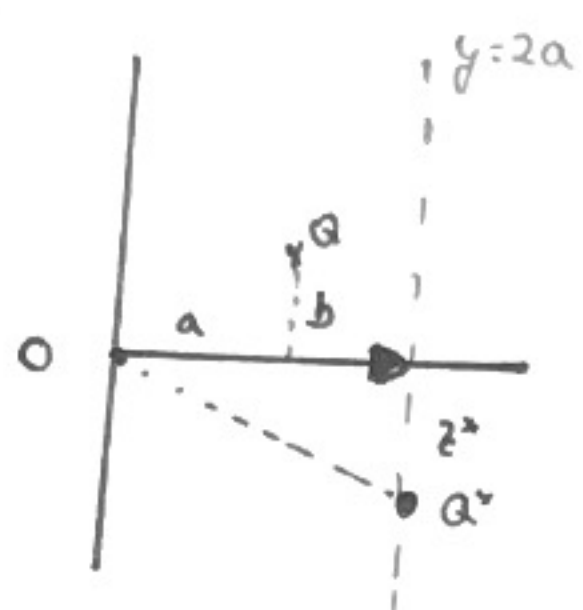
$$\textcircled{2} \vec{H} = 2\vec{e} \cos(10^3 t - \frac{2\pi}{5} y) \text{ A/m}$$

$\vec{e}$ $\uparrow$ $\vec{H}$

dirección de propagación $(\vec{e})$

29

c)



radio $\Rightarrow c = \max\{b, 2a\}$

$$2a > b$$

$$d(Q, 0) = \sqrt{(2a)^2 + z^2} > 2a$$

$$c = 2a$$

Q no está dentro de la esfera

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_r}{\epsilon_0}; Q_r = Q + \rho_l 4a; \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q + 4a\rho_l}{\epsilon_0}$$

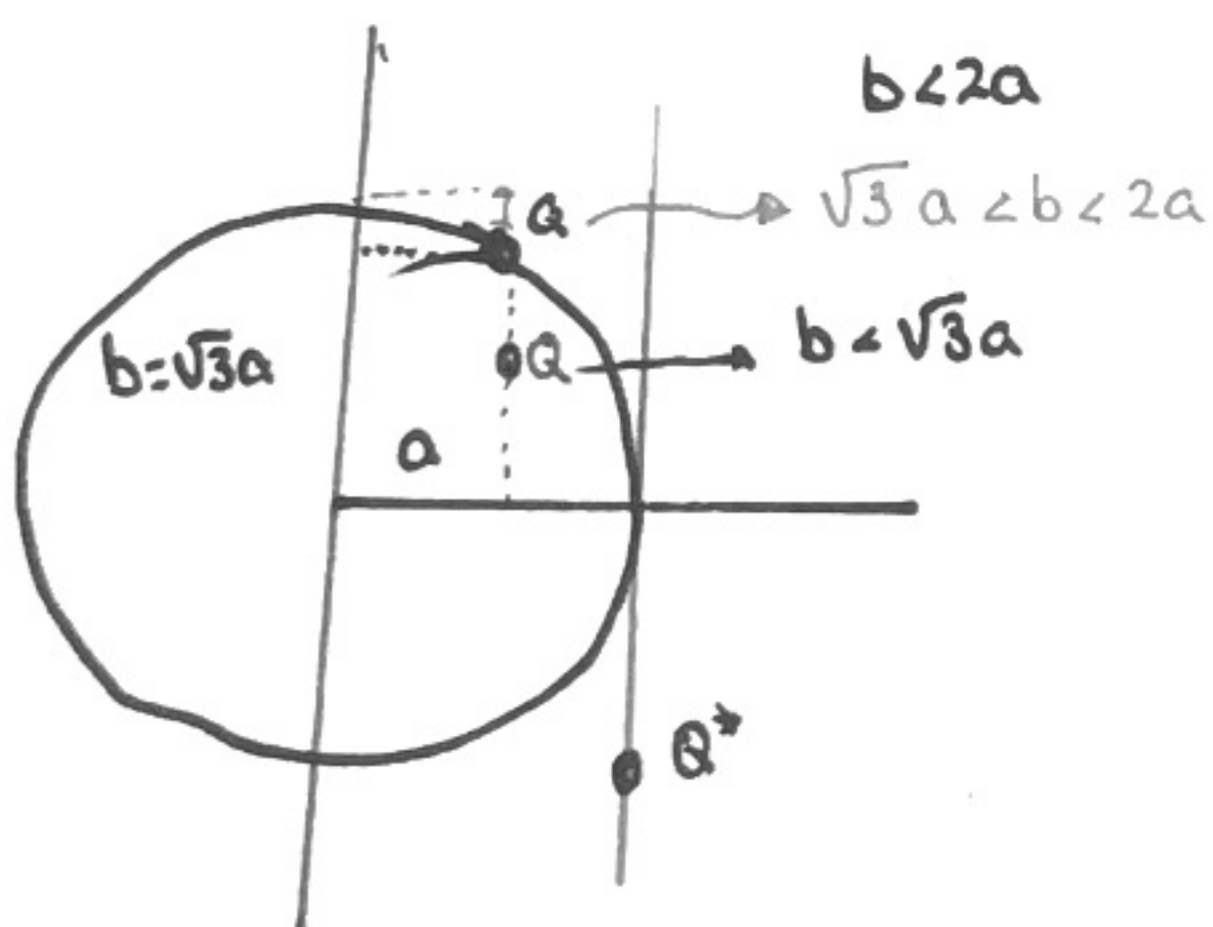
Para que Q esté dentro de la esfera

$$d(Q, 0) < 2a; \sqrt{a^2 + b^2} < 2a; a^2 + b^2 < 4a^2$$

$$b^2 < 3a^2; \boxed{b < \sqrt{3}a}$$

Pero si se cumple: $\sqrt{3}a < b < 2a$ entonces la esfera que tomamos tiene radio $c = 2a$, pero Q no está dentro de ella.

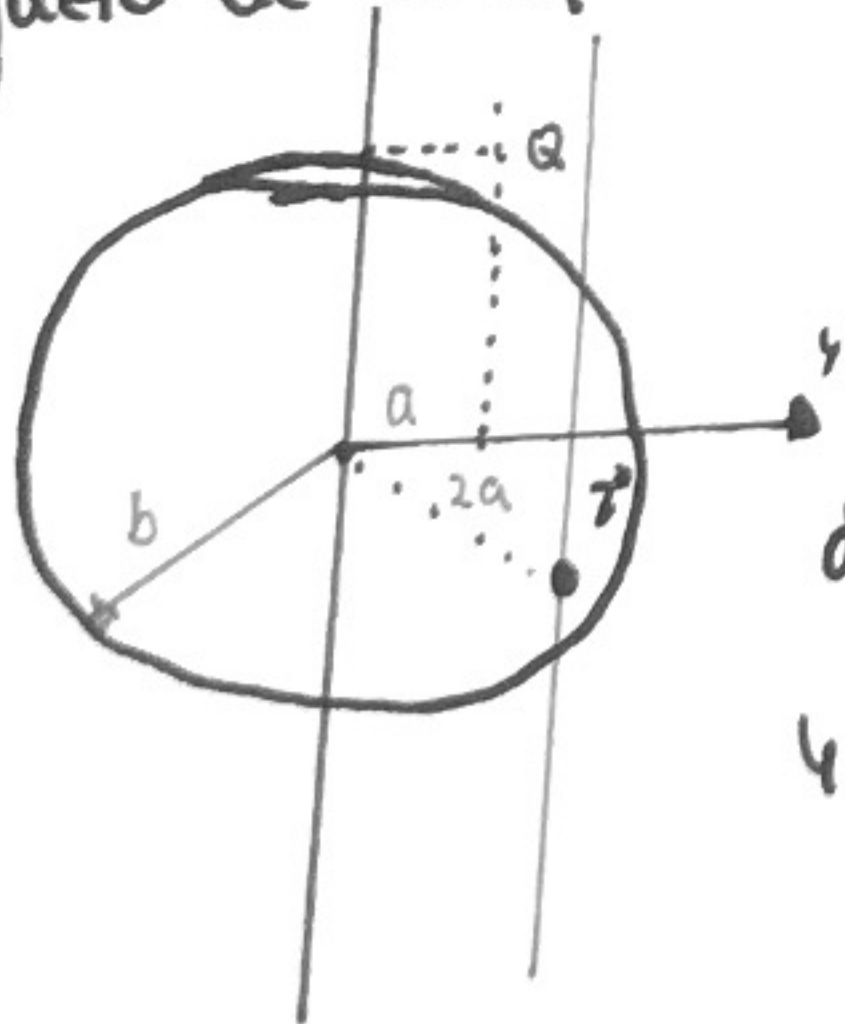
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{4a\rho_l}{\epsilon_0}$$



Si $b > 2a \Rightarrow$ radio esfera: $\boxed{c = b}$

$$d(Q, 0) = \sqrt{a^2 + b^2} > b$$

fuera de la esfera



debemos comprobar si Q está dentro de la esfera de radio b .

$$d(Q, 0) = \sqrt{(2a)^2 + z^2} = b$$

$$4a^2 + z^2 = b^2; z^2 = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \frac{Q}{\rho_l}$$

32

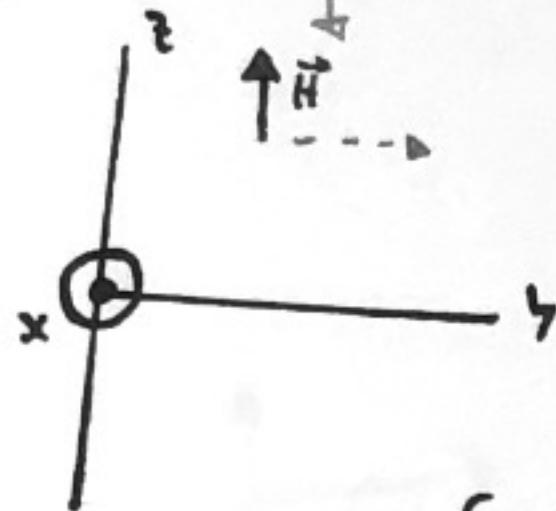
31

Examen 20

30

$$\textcircled{2} \vec{H} = 2\vec{e} \cos(10^8 t - \frac{2y}{3}) \text{ A/m}$$

dirección de propagación (14)



$$\angle \vec{S} = \frac{E_0^2}{2\eta} \cos \theta \hat{s}$$

Desfase inicial
 $t=0; y=0$

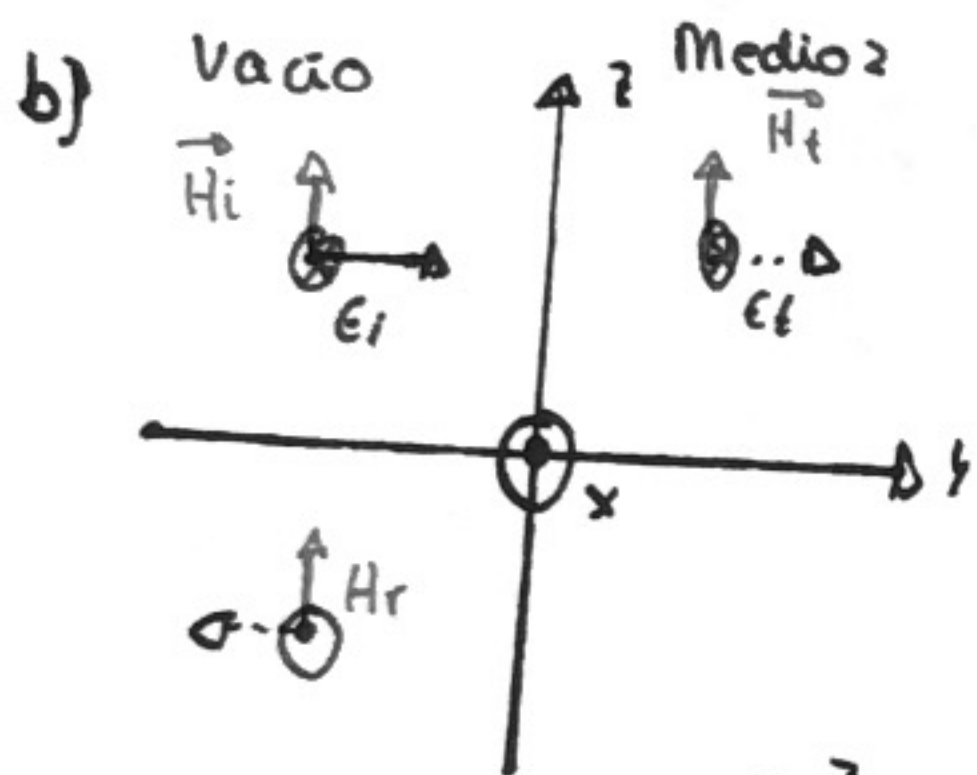
$$E_0 = H_0 \eta$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{H_0^2 \eta}{2\eta} \cos \theta \hat{s} \frac{\omega}{m^2}$$

$\eta = \eta_0 = 120\pi$ ya que se propaga en el vacío

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{2^2 \cdot 120\pi}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \hat{s} = 233.7 \hat{s} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}$$



Incidencia normal

$$E_{or} = \Gamma E_{oi}; E_{or} = \tau E_{oi}$$

$$P_i = \frac{E_{oi}^2}{2\eta_0}; P_r = \frac{E_{or}^2}{2\eta}$$

$$\Gamma = \frac{E_{or}}{E_{oi}}$$

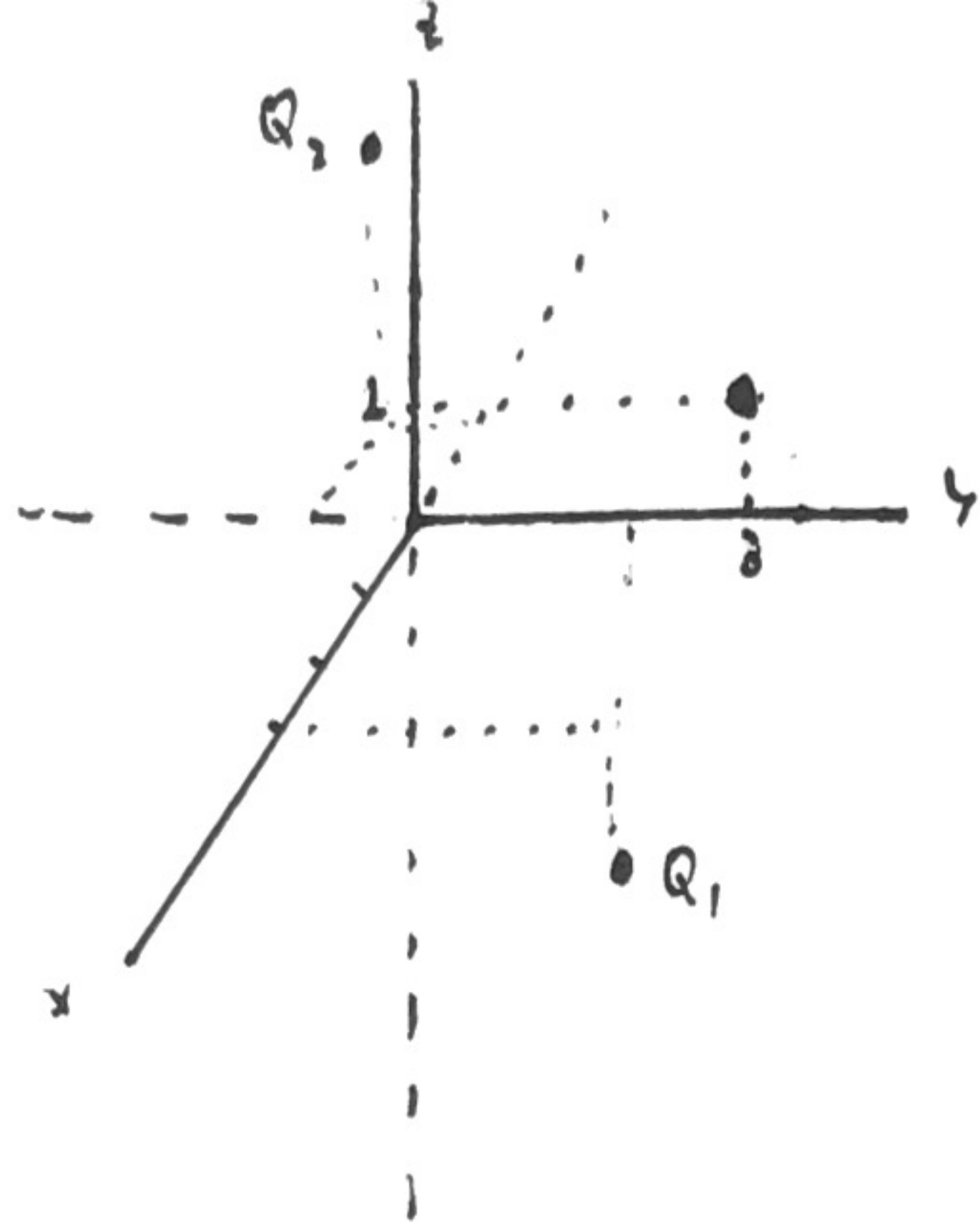
$$P_r = 0.5 P_i \Rightarrow \frac{E_{or}^2}{2\eta_0} = 0.5 \frac{E_{oi}^2}{2\eta_0}; \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)^2 = 0.5$$

$$\Gamma^2 = 0.5$$

$$\Gamma = 0.7071 \quad \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_0}{\eta_2 + \eta_0}$$

$$0.7071(\eta_2 + 120\pi) = \eta_2 - 120\pi \Rightarrow 0.7071 \cdot 120\pi + 120\pi = (1 - 0.7071)\eta_2$$

$$\eta_2 = \frac{120\pi (0.7071 + 1)}{1 - 0.7071} = 2.197, 21 \Omega$$



$$Q_2 = -2mc [-2, -1, 4]$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{r}_1 = 3\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$$

$$\vec{r}_2 = -\hat{x} - \hat{y} + 4\hat{z}$$

$$\vec{r} = 3\hat{y} + \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\vec{E}_1 : \vec{r} - \vec{r}_1 = -3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z} ; |\vec{r} - \vec{r}_1| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

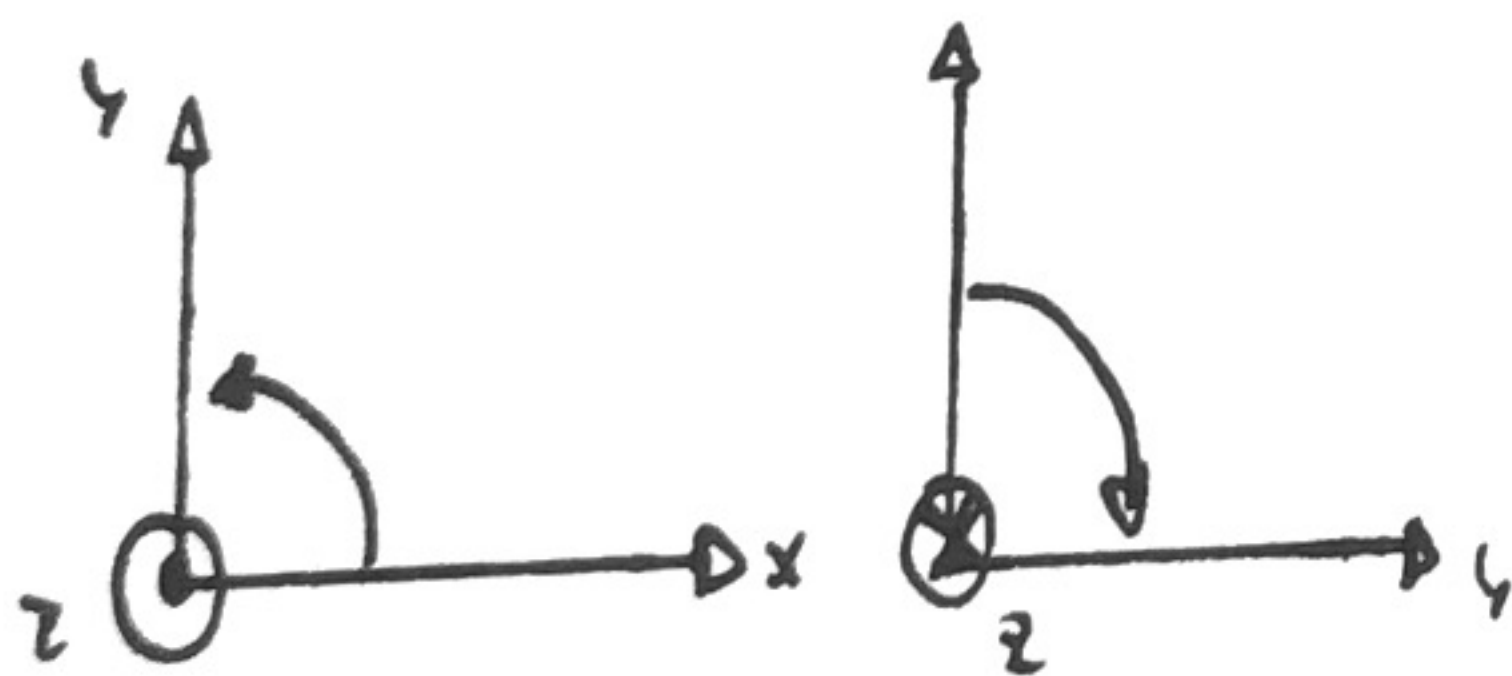
$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{10^{-3}}{(\sqrt{14})^3} (-3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z})$$

$$\vec{E}_1 = \frac{10^{-3}}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{14})^3} \cdot \frac{(-3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z})}{\sqrt{14}}$$

0.643 · 10⁶ ↳ unitario ↳ (-0.8x̂ + 0.27ŷ + 0.53ẑ)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

UNITARIO



$\vec{E} \times \vec{H}$ → dirección de propagación

SIEMPRE

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \vec{H} &= \vec{K} \\ \vec{H} \times \vec{K} &= \vec{E} \\ \vec{K} \times \vec{E} &= \vec{H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H} \times \vec{E} &= -\vec{K} \\ \vec{K} \times \vec{H} &= -\vec{E} \\ \vec{E} \times \vec{K} &= -\vec{H} \end{aligned}$$