TEMA 2: Electrodinámica y ecuaciones de Maxwell

Electrodinámica

* **Flujo de $\vec{B}$:** $\phi = \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$

* **Ley de Lenz-Faraday:**

1) $f.e.m = -\frac{d\phi}{dt}$

$[fem] = V$

2) Aparece una intensidad de corriente inducida que se opone a la variación del flujo.

3) Si se nos da el valor de la resistencia del circuito, R:

$I = V/R$ (Ley de Ohm)

Ecuaciones de Maxwell

* Ley de Faraday:

$fem = -\frac{d\phi}{dt} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} \; ; \; \phi = \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$

* Tª de Stokes: $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s}$

$\oint_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot \cancel{d\vec{s}} = -\frac{d}{dt}\left[\oint \vec{B} \cdot \cancel{d\vec{s}}\right]$

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow$ 1ª Ley de Maxwell.

* Ley de Ampére:

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

* $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$ [expresión que se cumple siempre]

Supondría: $\nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow$ FALSO

* Maxwell modifica la ley de Ampére:

$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \rightarrow$ 2ª Ley de Maxwell

* Ley de Gauss:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v} \rightarrow 3^{\circ} \text{ Ley de Maxwell}$$

* B es solenoidal:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \rightarrow 4^{\circ} \text{ Ley de Maxwel}$$

RESUMEN más cuatro leyes complementarias

① $\underbrace{\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}}_{\text{FORMATO DIFERENCIAL}} \Rightarrow \underbrace{\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{s}}_{\text{FORMATO INTEGRAL}}$

② $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}}_{I} + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$

③ $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \Rightarrow \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$

④ $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

COMPLEMENTARIAS!

⑤ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

⑥ $\vec{B} = \mu \vec{H}$

⑦ $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ [σ: conductividad eléctrica]

⑧ $\vec{J} = \rho_v \cdot \vec{v}$ [$\vec{v}$: velocidad]

T.2. Ejercicios y ejemplos

Ejemplo:

En una región del espacio no hay ni cargas ni corrientes. Existe $\vec{B} = (ax - bt)\,\hat{u}_z$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Se sabe que $\vec{E}$ tiene solo dirección según el eje OY

a) Calcular $\vec{E}$

b) Calcular f.em a lo largo de un cuadrado de lado L con dos lados paralelos a OX.

* $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$; $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$
* $\vec{B} = (ax - bt)\,\hat{u}_z \rightarrow B = B(x, t)$ no depende de las variables (y, z) ; $B_y = B_x = 0$

$\vec{B} = B_z(x, t)\,\hat{u}_z$

* $\vec{E} = E_y(x, y, z, t)\,\hat{u}_y \rightarrow E_x = E_z = 0$
* No existen cargas eléctricas: $\rho_v = 0$

No existen corrientes: $\vec{J} = \vec{0}$

o Ley de Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{-\partial}{\partial t}\left[(ax - bt)\,\hat{u}_z\right] = -(-b)\hat{u}_z = b\hat{u}_z$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\,\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\,\hat{z}$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}\,\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\,\hat{z} = b\hat{z} \quad \left| \quad \begin{array}{l} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = b \end{array} \right.$$

$E_y = E_y(x, y, z, t)$; como $\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_y = E_y(x, y, t)$

Como $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = b \Rightarrow E_y = bx + \underbrace{\varphi(y, t)}_{\text{no conocemos esta dependencia.}}$

* Ley de Gauss: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$; $[\rho_v = 0]$; $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \rightarrow$ consideramos que esta región es en el vacío

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = 0; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{0} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0}$$

Tenemos $E_y = bx + \varphi(y, t)$

$\dfrac{\partial E_y}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi(y, t)}{\partial y} = 0 \rightarrow$ al obtener 0 en esta derivada parcial, $\varphi(y, t)$ NO depende de la variable $y \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = \varphi(t)$

Tenemos: $\varepsilon_y = bx + \varphi(t)$

* Ley de ámpere $\Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \underbrace{\vec{J}}_{\vec{0}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ | $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$[\vec{J} = \vec{0}]$

$$\nabla \times \frac{B}{\mu_0} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E}); \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}[(bx + \varphi(t))\hat{y}] = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}\hat{y}$$

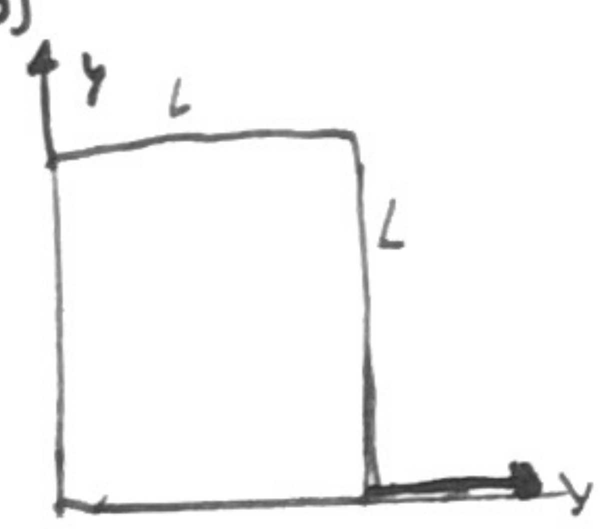
$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & ax-bt \end{vmatrix} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(ax-bt)}_{0}\hat{x} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(ax-bt)}_{a}\hat{y}$$

$$-a\hat{y} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\varphi(t)}{dt}\hat{y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi(t)}{t} = \frac{-a}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$\varphi(t) = \int \frac{-a}{\mu_0 \varepsilon_0} dt = \frac{-at}{\mu_0 \varepsilon_0} + K$$

$$\boxed{* \ \vec{E} = (bx - \frac{at}{\mu_0 \varepsilon_0} + K)\hat{y} \quad V/m}$$

b)



$\vec{B} = (ax - bt)\hat{z}$

$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$; $d\vec{s}$ es perpendicular a la superficie

$d\vec{s} = ds\,\hat{z}$

$$\phi = \int_S (ax - bt)\, d\beta = \int_0^L \int_0^L (ax-bt)\,dx\,dy$$

$$\phi = \int_0^L \left[a\frac{x^2}{2} - btx\right]_0^L dy = \int_0^L \left(a\frac{L^2}{2} - btL\right)dy = \left[a\frac{L^2}{2}y - btLy\right]_0^L = \left(a\frac{L^3}{3} - btL^2\right) wb$$

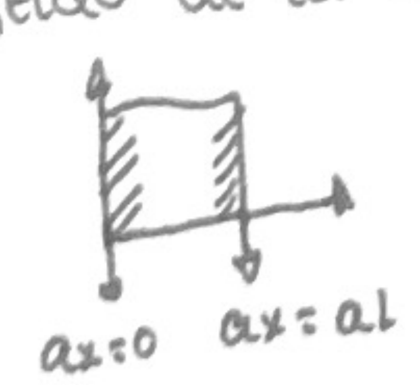
$$fem = -\frac{d\phi}{dt}; \ fem = \frac{-d}{dt}\left(a\frac{L^3}{3} - btL^2\right)$$

$$\boxed{fem = bL^2 V}$$

* Calculamos el sentido de la corriente inducida:

* $\vec{B} = (ax - bt)\hat{z}$

$\uparrow t \Rightarrow |\vec{B}| \downarrow$



• Como el ϕ decrece con el tiempo se induce una I que la compensa

Ejercicio examen 19·6·18   CLÁSICO INDUCCIÓN MAGNÉTICA

$fem = -\frac{d\phi}{dt}$; $\phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$

Calcular la fem en ambos casos.

a) situada P en $y = 8cm$; $x = a\,cm$

$\vec{B} = 4\cos(10^6 t)\,\hat{z}\ \frac{mWb}{m^2}$

$\phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$; $\vec{dS} = dS\,\hat{z}$; $\phi = \int_S B\,dS = \iint_S B\,dx\,dy$

$\phi = B \iint_S dx\,dy = B\,[x]_0^a\,[y]_0^{8\cdot10^{-2}}$

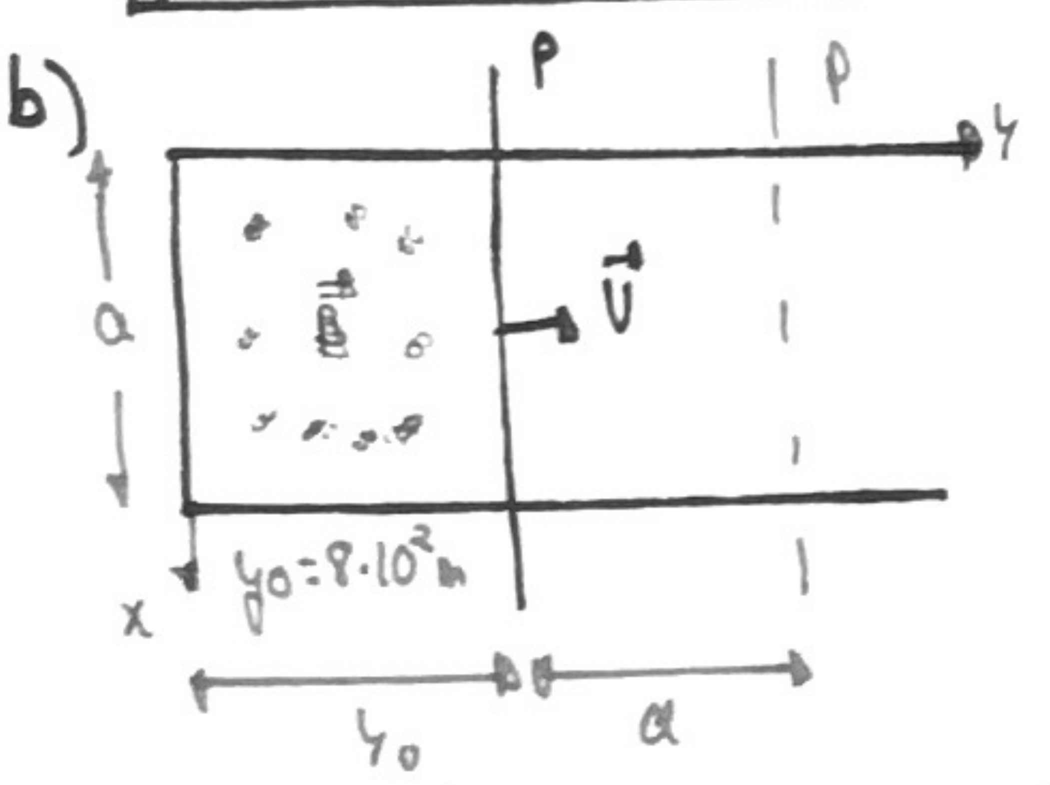
$\phi(t) = 4\cos(10^6 t)\,8 \cdot a \cdot 10^{-4}\ mWb$

$\phi(t) = 32a\cos(10^6 t)\,8 \cdot a \cdot 10^{-4}\ mWb$

$fem = \frac{-d}{dt}(\phi(t)) = 32a\,sen(10^6 t)\,10^{-4} \cdot 10^6\ mV$

$\boxed{fem = 32a\,sen(10^6 t)\,10^2\ mV}$

b)



$\vec{B} = 4\hat{z}\ \frac{mWb}{m^2}$

$\vec{v} = 20\hat{y}\ \frac{m}{s}$

$\vec{dS} = dx\,dy\,\hat{z}\ m^2$

$\phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dt} = \iint_S 4\,dx\,dy = 4\iint_S dx\,dy$

- Limites de x: $0 \leq x \leq a$
- Limites de y: $0 \leq y \leq y_0 + d = 8\cdot10^{-2} + 20t$

$d = v \cdot t = 20t\ m$

$\phi = 4\int_0^a \int_0^{8\cdot10^{-2}+20t} dx\,dy = 4[x]_0^a\,[y]_0^{8\cdot10^{-2}+20t} = 4a(8\cdot10^{-2}+20t)\ mWb$

$fem = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[4a(8\cdot10^{-2}+20t)\right]$ mV

$fem = -80a\,V \Rightarrow \boxed{fem = 80a\,V}$

Sentido inducido de la intensidad, sentido horario para contrarrestrar el aumento de ϕ ya que se aumenta el área con el tiempo.

c) $\vec{v} = 20\hat{y}$ m/s ; $\vec{B} = 4\cos(10^6 t - y)\hat{z}\ \frac{mWb}{m^2}$

$$\phi = \int_s \vec{B}\, d\vec{s} = \int_s B \cdot \hat{z} \cdot ds\, \hat{z} = \int_s B\, ds$$

Limites de integración

$0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq 8 \cdot 10^{-2} + 20t$

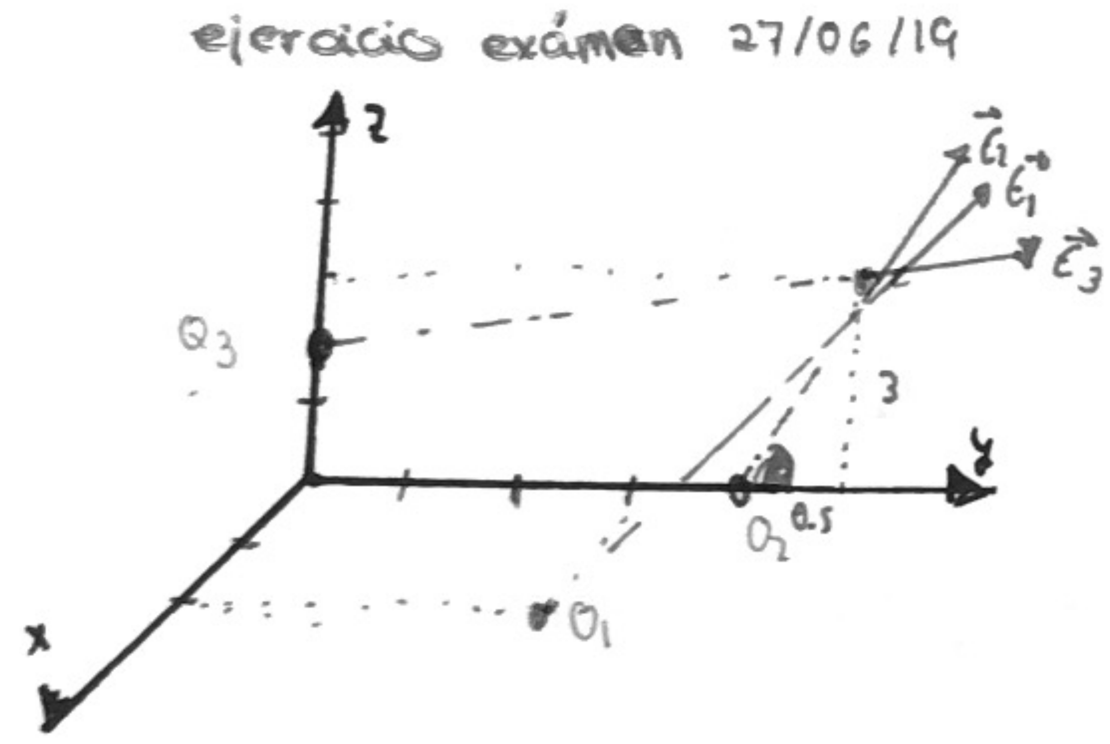
$$\phi = 4\int_0^a \int_0^{8\cdot10^{-2}+20t} \cos(10^6 t - y)\,dx\,dy \ ; \ \phi = 4[x]_0^a \int_0^{8\cdot10^{-2}+20t} \cos(10^6 t - y)\,dy ; \ \phi = 4a[\operatorname{sen}(10^6 t - 8\cdot10^{-2} - 20t) -$$

$$- \operatorname{sen}(10^6 t)]\ mWb$$

$$\phi = \phi(t) \Rightarrow f.em = \frac{-d\phi}{dt} \ ; \ fem = 4a[\cos(10^6 t - 8\cdot10^{-2} - 20t)(10^6 - 20) - \overset{\cos}{\cancel{sen}}(10^6 t)10^6]$$

$$\boxed{fem = 4a10^6[\cos(10^6 t - 8\cdot10^{-2} - 20t) - \cos(10^6 t)]\ mV}$$

ejercicio exámen 27/06/19



$Q_1 = 0.5C$ $Q_2 = 0.25C$ $Q_3 = 1C$

$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_2$ $\quad r_2$, 3, 0.5 $\quad r_2 = 3.04m$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_2 \frac{1}{(3.04)^2}[\cos\alpha\,\hat{x} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{z}]\ N/C$$

$\cos\alpha = \frac{0.5}{3.04}$ $\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{3.04}$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{3.04} (0.5\hat{x} + 3\hat{z})\ N/C$$

4.5, 1, r_3 $\quad r_3 = 4.61m$

$$\vec{E}_3 = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(4.61)^2}[\cos\beta\,\hat{y} + \operatorname{sen}\beta\,\hat{z}]\ N/C$$

$\cos\beta = \frac{4.5}{4.61}$; $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{4.61}$

$$\vec{E}_3 = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4.61} (4.5\hat{y} + \hat{z})\ N/C$$