TEMA 2: Electrodinámica y ecuaciones de Maxwell

Electrodinámica

* **Flujo de $\vec{B}$:** $\phi = \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$

* **Ley de Lenz-Faraday:**

1) $f.e.m = -\dfrac{d\phi}{dt}$

$[fem] = V$

2) Aparece una intensidad de corriente inducida que se opone a la variación del flujo.

3) Si se nos da el valor de la resistencia del circuito, R:

$$I = V/R \quad \text{(Ley de Ohm)}$$

Ecuaciones de Maxwell

* **Ley de Faraday:**

$$fem = -\frac{d\phi}{dt} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} \, ; \quad \phi = \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

* **Tª de Stokes:** $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s}$

$$\oint_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot \cancel{d\vec{s}} = -\frac{d}{dt} \left[\oint \vec{B} \cdot \cancel{d\vec{s}} \right]$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow 1^{a} \text{ Ley de Maxwell.}$$

* **Ley de Ampère:**

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

* $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$ [expresión que se cumple SIEMPRE]

Supondría: $\nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow$ FALSO

... la ley de Ampere:

* Ley de Gauss:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v} \rightarrow 3^{o} \text{ Ley de Maxwell}$$

* B es solenoidal:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \rightarrow 4^{o} \text{ Ley de Maxwel}$$

RESUMEN más cuatro leyes complementarias

① $\underbrace{\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}}_{\text{FORMATO DIFERENCIAL}} \Rightarrow \underbrace{\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{s}}_{\text{FORMATO INTEGRAL}}$

② $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}}_{I} + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$

③ $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \Rightarrow \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$

④ $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

COMPLEMENTARIAS!

⑤ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

⑥ $\vec{B} = \mu \vec{H}$

⑦ $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ [σ = conductividad eléctrica]

⑧ $\vec{J} = \rho_v \cdot \vec{v}$ [$\vec{v}$ = velocidad]

T.2. Ejercicios y ejemplos

Ejemplo:

En una región del espacio no hay ni cargas ni corrientes. Existe $\vec{B} = (ax - bt)\,\hat{u}_z$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Se sabe que $\vec{E}$ tiene solo dirección según el eje OY

a) Calcular $\vec{E}$

b) Calcular f.e.m a lo largo de un cuadrado de lado L con dos lados paralelos a OX.

* $\vec{B} = \vec{B}(x,y,z,t)$; $\vec{E} = \vec{E}(x,y,z,t)$
* $\vec{B} = (ax - bt)\,\hat{u}_z \rightarrow B = B(x,t)$ no depende de las variables (y,z) ; $B_y = B_x = 0$

$\vec{B} = B_z(x,t)\,\hat{u}_z$

* $\vec{E} = E_y(x,y,z,t)\,\hat{u}_y \rightarrow E_x = E_z = 0$
* No existen cargas eléctricas: $\rho_v = 0$

No existen corrientes: $\vec{J} = \vec{0}$

o Ley de Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{-\partial}{\partial t}\left[(ax - bt)\,\hat{u}_z\right] = -(-b)\hat{u}_z = b\,\hat{u}_z$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\,\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\,\hat{z}$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}\,\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\,\hat{z} = b\,\hat{z} \quad \left|\quad \begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= b \end{aligned}\right.$$

$E_y = E_y(x,y,z,t)$; como $\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_y = E_y(x,y,t)$

Como $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = b \Rightarrow E_y = bx + \underbrace{\varphi(y,t)}$

no conocemos esta dependencia.

Ley de Gauss: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$; $[\rho_v = 0]$; $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ → consideramos que esta región es en el vacío

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = 0; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{0} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0}$$

Tenemos $E_y = bx + \varphi(y,t)$

$\dfrac{\partial E_y}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi(y,t)}{\partial y} = 0$ → al obtener 0 en esta derivada parcial, $\varphi(y,t)$ NO depende de la variable $y \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = \varphi(t)$

Tenemos: $E_y = bx + y(t)$

$*$ Ley de ámpere $\Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \underbrace{\vec{J}}_{\vec{0}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ | $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$; $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$[\vec{J} = \vec{0}]$

$$\nabla \times \frac{B}{\mu_0} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E}); \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}[(bx + y(t))\hat{y}] = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial y(t)}{\partial t}\hat{y}$$

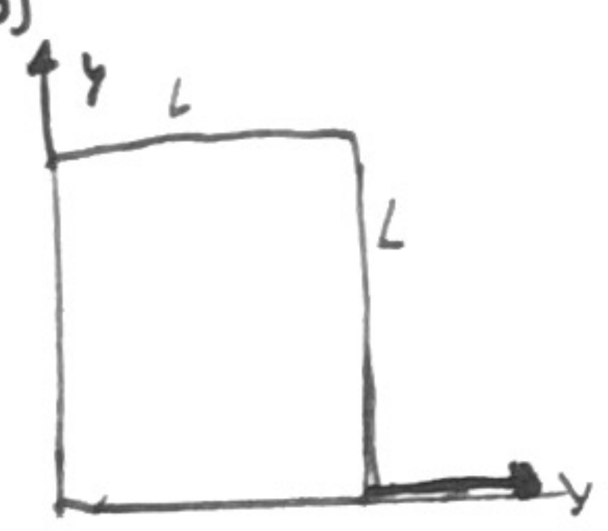
$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & ax-bt \end{vmatrix} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(ax-bt)\hat{x}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(ax-bt)\hat{y}}_{a}$$

$$-a\hat{y} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dy(t)}{dt}\hat{y} \Rightarrow \frac{\partial y(t)}{t} = \frac{-a}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$y(t) = \int \frac{-a}{\mu_0 \varepsilon_0} dt = \frac{-at}{\mu_0 \varepsilon_0} + K$$

$$\boxed{* \ \vec{E} = \left(bx - \frac{at}{\mu_0 \varepsilon_0} + K\right)\hat{y} \quad V/m}$$

b)



$\vec{B} = (ax - bt)\hat{z}$

$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$; $d\vec{S}$ es perpendicular a la superficie

$d\vec{S} = dS\hat{z}$

$$\Phi = \int_S (ax - bt)\, dS = \int_0^L \int_0^L (ax - bt)\, dx\, dy$$

$$\Phi = \int_0^L \left[a\frac{x^2}{2} - btx\right]_0^L dy = \int_0^L \left(a\frac{L^2}{2} - btL\right) dy = \left[a\frac{L^2}{2}y - btLy\right]_0^L = \left(a\frac{L^3}{3} - btL^2\right) wb$$

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt}; \quad fem = \frac{-d}{dt}\left(a\frac{L^3}{3} - btL^2\right)$$

Ejercicio examen 19·6·18 CLÁSICO INDUCCIÓN MAGNÉTICA

$$fem = -\frac{d\phi}{dt}; \quad \phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

Calcular la fem en ambos casos.

a) situada P en $y = 8\,cm$; $x = a\,cm$

$$\vec{B} = 4\cos(10^6 t)\,\hat{z}\ \frac{mWb}{m^2}$$

$$\phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}; \quad d\vec{s} = ds\,\hat{z}; \quad \phi = \int_S B\,ds = \iint_S B\,dx\,dy$$

$$\phi = B\iint_S dx\,dy = B\,[x]_0^a\,[y]_0^{8\cdot10^{-2}}$$

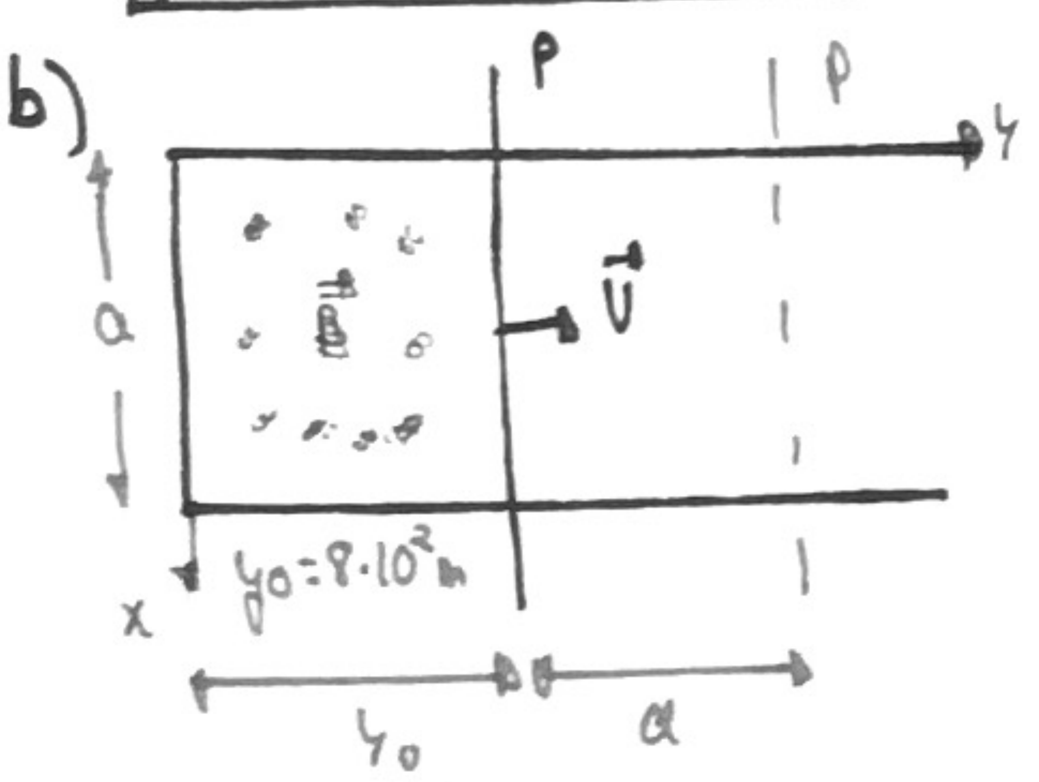
$$\phi(t) = 4\cos(10^6 t)\,8\cdot a\cdot 10^{-4}\ mWb$$

$$\phi(t) = 32a\cos(10^6 t)\,8\cdot a\cdot 10^{-4}\ mWb$$

$$fem = \frac{-d}{dt}(\phi(t)) = 32a\,sen(10^6 t)\,10^{-4}\cdot 10^6\ mV$$

$$\boxed{fem = 32a\,sen(10^6 t)\,10^2\ mV}$$

b)



$$\vec{B} = 4\hat{z}\ \frac{mWb}{m^2}$$

$$\vec{V} = 20\hat{y}\ \frac{m}{s}$$

$$d\vec{s} = dx\,dy\,\hat{z}\ m^2$$

$$\phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{t} = \iint_S 4\,dx\,dy = 4\iint_S dx\,dy$$

* Limites de x: $0 \le x \le a$
* Limites de y: $0 \le y \le y_0 + a = 8\cdot10^{-2} + 20t$

$a = v\cdot t = 20t\ m$

$\ldots [\ ]^{8\cdot10^{-2}+20t} = 4a(8\cdot10^{-2}+20t)\ mWb$

sentido ...
ya que se aumenta el área con el tiempo.

c) $\vec{v} = 20\hat{y}$ m/s ; $\vec{B} = 4\cos(10^6 t - y)\hat{z}$ $\frac{mWb}{m^2}$ 13

$\phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{s} = \int_S B \cdot \hat{z} \cdot ds\, \hat{z} = \int_S B\, ds$

Límites de integración

$0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq 8\cdot 10^{-2} + 20t$

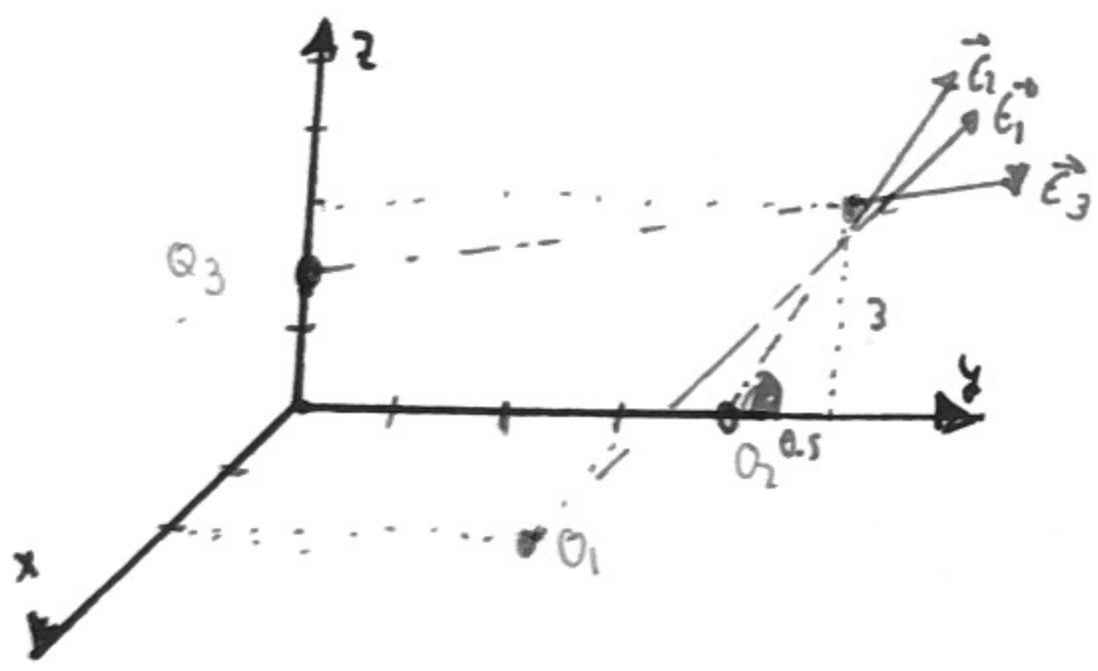
$\phi = 4\int_0^a \int_0^{8\cdot10^{-2}+20t} \cos(10^6 t - y)\,dx\,dy$; $\phi = 4[x]_0^a \int_0^{8\cdot10^{-2}+20t} \cos(10^6 t - y)\,dy$; $\phi = 4a[\operatorname{sen}(10^6 t - 8\cdot10^{-2} - 20t) -$

$- \operatorname{sen}(10^6 t)]$ mWb

$\phi = \phi(t) \Rightarrow f.em = \frac{-d\phi}{dt}$; $fem = 4a[\cos(10^6 t - 8\cdot10^{-2} - 20t)(10^6 - 20) - \cos(10^6 t)10^6]$

$$\boxed{fem = 4a10^6[\cos(10^6 t - 8\cdot10^{-2} - 20t) - \cos(10^6 t)]\ mV}$$

ejercicio exámen 27/06/19



$Q_1 = 0.5C$ $Q_2 = 0.25C$ $Q_3 = 1C$

$\vec{E_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_2$

r_2, 3, 0.5 $\quad r_2 = 3.04m$

$\vec{E_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_2 \frac{1}{(3.04)^2}[\cos\alpha\,\hat{x} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{z}]$ N/C

$\cos\alpha = \frac{0.5}{3.04}$ $\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{3.04}$

$\vec{E_2} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{3.04}(0.5\hat{x} + 3\hat{z})$ N/C

4.5, 1, r_3 $\quad r_3 = 4.61m$

$\vec{E_3} = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(4.61)^2}[\cos\beta\,\hat{y} + \operatorname{sen}\beta\,\hat{z}]$ N/C

$\cos\beta = \frac{4.5}{4.61}$; $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{4.61}$

$\vec{E_3} = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4.61}[4.5\hat{y} + \hat{z}]$ N/C