



Grado en Ingeniería en Sistemas Audiovisuales y Multimedia

Tema 2. Electrodinámica

Ecuaciones de Maxwell

Fernando Poza Saura

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación

Curso 2018/2019

Ecuaciones de Maxwell. Índice

- Introducción
- Electrodinámica
- Ley Faraday
- Corriente de desplazamiento
- Ecuaciones de Maxwell

Ecuaciones de Maxwell. Introducción

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_V$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Relación entre los campos y sus fuentes

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Campo eléctrico conservativo

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Líneas de campo cerradas

Ecuaciones añadidas necesarias:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

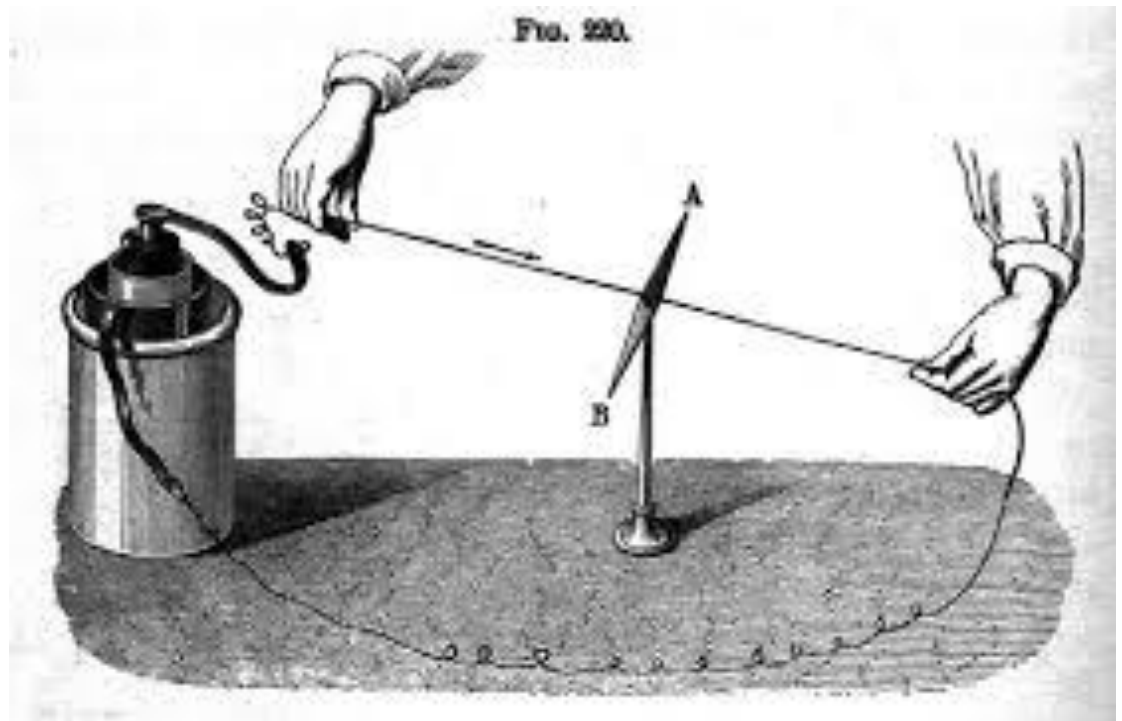
$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$

Ecuaciones de Maxwell. Electrodinámica

Experimento de
Oersted:

Una ***variación*** en
la corriente eléctrica
(que está causada por
un campo eléctrico)
***provoca la aparición de
un campo magnético.***



Ecuaciones de Maxwell. Ley de Faraday

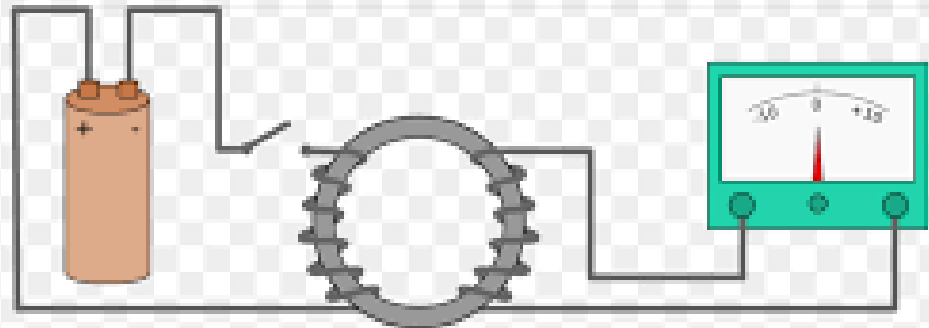
Faraday sospechó que podía suceder también al contrario, es decir, generar corriente eléctrica a partir de un campo magnético.

La corriente generada en el circuito aislado del de la batería es debida a una diferencia de potencial (fuerza electromotriz, fem que aparece en el circuito secundario.

$$\phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$fem = - \frac{d\phi}{dt}$$

Ley de Faraday



Ecuaciones de Maxwell. Ley de Faraday

La fuerza electromotriz aparece cuando el flujo presenta una variación temporal. Esto ocurre si sucede alguna o varias de las situaciones siguientes:

- El campo B cambia con el tiempo

$$\vec{B} = \vec{f}(x, y, z, t)$$

- La superficie en la que se calcula el flujo cambia con el tiempo

$$S = f(x, y, z, t)$$

- Tanto el campo como la superficie cambian con el tiempo

$$\vec{B} = \vec{f}(x, y, z, t)$$

$$S = f(x, y, z, t)$$

Ecuaciones de Maxwell. Ley de Faraday

La *fem* es una tensión (voltios). Por lo tanto solo puede ser causada por la aparición de un campo eléctrico.

$$fem = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Usando el teorema de Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\oint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Un campo magnético variable con el tiempo causa la aparición de un campo eléctrico.

Ecuaciones de Maxwell. Corriente de desplazamiento

Por otro lado, partiendo de la ley de Ampère, y usando identidades del cálculo vectorial, se tiene que:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

debe cumplir esta expresión que es cierta para cualquier campo vectorial:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$$

Si esto fuese así se tendría que la divergencia de la densidad de corriente:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Conclusión: la ecuación de partida no es válida en las nuevas circunstancias (variación con el tiempo de los campos eléctricos y y magnéticos).

Ecuaciones de Maxwell. Corriente de desplazamiento

Para resolver esa contradicción, se postula la existencia de una corriente más que no está siendo tomada en cuenta en la ecuación inicial:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{G}$$

Se aplica la identidad vectorial anterior:

$$\nabla \cdot (\vec{J} + \vec{G}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{G} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = -\nabla \cdot \vec{G}$$

Como:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \end{array} \right\} \quad \nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\vec{G} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Finalmente:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ecuaciones de Maxwell

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Electrodinámica. Ecuaciones de Maxwell

A las ecuaciones anteriores, que relacionan los campos entre si, hay que añadir las que relacionan los campos con el medio en el que se manifiestan (vacío, dieléctricos, conductores, etc):

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Por otro lado, las que relacionan los campos con las corrientes, fuentes del campo magnético.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{J} = \rho_V \vec{v}$$