BOLETÍN DE EJERCICIOS
TEMA 3. ONDAS PLANAS.

1. Ondas planas en medios sin pérdidas

EJ. 1. 1. Sea una onda plana cuyo campo eléctrico $\vec{E}$ responde a la expresión:

$$\vec{E}(z,t) = E_x(z,t)\hat{x}$$

Se propaga en un medio sin pérdidas ($\epsilon_r = 4$, $\mu_1 = 1$) en la dirección $+z$. La frecuencia de la onda es $f = 100MHz$ y su valor máximo es $10^{-4}\ V/m$. Se pide:

a) Escribir la expresión de $\vec{E}(z,t)$
b) Calcular la velocidad de la onda, longitud de onda e impedancia intrínseca del medio por el que se propaga.
c) Escribir la expresión de $\vec{H}(z,t)$

SOLUCIÓN:

a) La expresión del campo eléctrico de una onda plana propagándose en un medio genérico y con las restricciones impuestas a la hora de su deducción teórica, a saber, propagación en la dirección $+z$ y periodicidad cosenoidal de frecuencia ω, responde a la expresión general:

$$\vec{E}(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz)\hat{x} \qquad V/m$$

Necesitamos obtener los valores de E_0, ω y β

- *La amplitud E_0 es el máximo valor que puede obtener cualquier expresión armónica como esta. Y ello ocurrirá para los valores de t que hacen que el $\cos()$ sea la unidad. Por tanto, $E_0 = 10^{-4}\ V/m$*
- $\omega = 2\pi f = 2\pi 10^8 \qquad rad/s$
- $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi f\sqrt{\epsilon_r\epsilon_0\,\mu_0\mu_r} = 2\pi f\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sqrt{\epsilon_r\mu_r} = 2\pi f\frac{1}{c}\sqrt{\epsilon_r\mu_r} = 2\pi 10^8\frac{1}{3'10^8}\sqrt{4} = 4\pi/3$
  $\beta = 4'189 \qquad rad\cdot m^{-1}$

Finalmente, la expresión de $\vec{E}$ queda:

$$\vec{E}(z,t) = 10^{-4}\cos(2\pi 10^8 t - \frac{4\pi}{3}z)\hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = 10^{-4}\cos(6'28\,10^8 t - 4'189z)\hat{x} \qquad V/m}$$

b)
- $v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\,10^8}{4\pi/3} = \frac{3\,10^8}{2} = 1'5\,10^8 \qquad m/s$
- $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi/3} = 3/2 = 1'5 \qquad m$
- $\eta = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{4}} = 60\pi \qquad \Omega$

c) El campo magnético $\vec{H}$ se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell como se ha visto en teoría. Finalmente, se trata de dividir la amplitud del campo eléctrico por la impedancia intrínseca del medio, y tener en cuenta que va en dirección $\hat{x}$ según dicta el producto vectorial que relaciona estos dos campos:

$$\boxed{\vec{H}(z,t) = \frac{10^{-4}}{60\pi}\cos(6'28\,10^8 t - 4'189z)\hat{y} \qquad A/m}$$

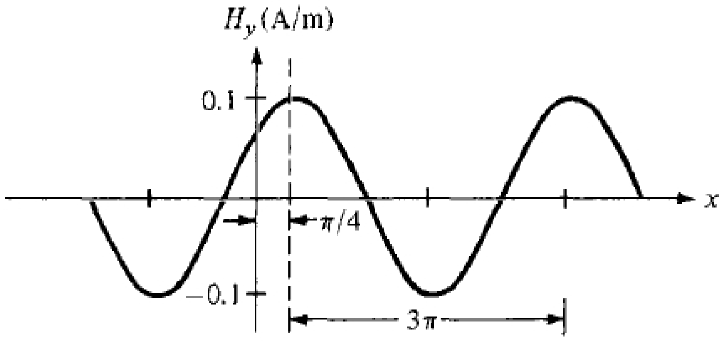


Figura 1: Apartado c, problema 1.2

EJ. 1. 2. Se tiene una onda plana propagándose en el vacío de campo magnético:

$$\vec{H} = 0'1\cos(2\cdot 10^8 t - kx)\hat{y}$$

Calcular:

a) k, λ y T
b) El tiempo, t_1, que tarda la onda en viajar una distancia de $\lambda/8$
c) Representar la onda en el instante t_1

SOLUCIÓN:

a) k, el número de onda o constante de propagación y que también se suele denotar con la letra griega β, viene dada por la expresión:

$$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$$

En este caso la permitividad (ϵ) y la permeabilidad (μ) son las correspondientes al vacío, circunstancia que se marca mediante el subíndice 0.
Como $\epsilon_0 = 8'854\cdot 10^{-12}$ y $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$:

$$k = 2\cdot 10^8\sqrt{8'854\cdot 10^{-12}4\pi\cdot 10^{-7}} = 0'667 \quad rad/m$$

La longitud de onda, λ, es el espacio recorrido por la onda (o cualquier otro fenómeno periódico) durante el tiempo definido por su periodo. Como la velocidad es $c_0 = 3'10^8\ m/s$,

$$\lambda = c_0 T = \frac{c_0}{f} = c_0\frac{2\pi}{\omega} = 3\cdot 10^8\frac{2\pi}{2\cdot 10^8} = 9'425 \quad m$$

El periodo T, se obtiene de ω:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \to T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\cdot 10^8} = 31'42 \quad ns$$

b) Si en recorrer la distancia λ se tardan T segundos (por definición de periodo y longitud de onda), en recorrer $\lambda/8$, se tardará $t_1 = T/8$. Por tanto:

$$t_1 = \frac{T}{8} = \frac{\pi\cdot 10^{-8}}{8} = 3'927 \quad ns$$

c) Ver figura 1

EJ. 1. 3. Se tiene el siguiente campo eléctrico en el vacío

$$\vec{E} = 50\cos(10^8 t + kx)\hat{y} \quad V/m$$

se pide:

a) Indicar la dirección de propagación de la onda.
b) Calcular k y el tiempo que necesita la onda para viajar una distancia igual a $\lambda/2$.
c) Dibujar la onda en los instantes $t = 0, \quad T/4, \quad y \quad T/2$

SOLUCIÓN

a) La expresión del campo nos informa de la dirección de avance de la onda. Más concretamente el término relacionado con el espacio, que en este caso es kx. La onda está desplazándose en el eje x y dado que es positivo, lo hace en el $\boxed{\textit{sentido negativo del eje x}}$.

b) En el vacío la velocidad de propagación es c_0, entonces:

$$c_0 = \frac{\omega}{k} \Longrightarrow k = \frac{\omega}{c_0} = \frac{10^8}{3 \cdot 10^8} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{k = 0'3333 \quad rad/m}$$

Si T es el tiempo que tarda la onda en recorrer un espacio igual a su longitud de onda a una velocidad c_0, para recorrer una distancia igual a $\lambda/2$, necesitaría mitad de tiempo:

$$t_1 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{10^8} = 31'42 \quad ns$$

$$\boxed{t_1 = 31'42 \quad ns}$$

Se puede calcular este dato de otra manera: dado que la onda se propaga en el vacío (por lo tanto a la velocidad de la luz, c_0)

$$\frac{\lambda}{2} = c_0 t_1 \quad o \quad t_1 = \frac{\lambda}{2c_0}$$

pero como $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 6\pi$

$$\boxed{t_1 = \frac{6\pi}{2 \cdot 3 \cdot 10^8} = 31'42 \quad ns}$$

c)
- *En $t = 0$,* $\quad E_y = 50\cos(0'33x)$
- *En $t = T/4$,* $\quad E_y = 50\cos(0'33\frac{2\pi}{4\omega} + 0'33x) = 50\cos(0'33x + \frac{\pi}{4}) = 50\sin(0'33x)$
- *En $t = T/2$,* $\quad E_y = 50\sin(\omega\frac{2\pi}{2\omega} + 0'33x) = 50\cos(0'33x + \pi) = -50\cos(0'33x)$

Las ondas resultantes son tres formas senoidales desfasadas entre si $\pi/2$, ver figura 2

EJ. 1. 4. Una onda plana electromagnética se propaga por el vacío con un campo eléctrico dado por:

$$\vec{\mathbb{E}} = 300\ \hat{x}\ \exp\big(j(0'866y + 0'5z)\big) \qquad V/m$$

se pide:

a) Calcular ω y λ
b) El campo magnético $\vec{H}$
c) La potencia media transmitida por la onda.

SOLUCIÓN

a) La ω está relacionada con la frecuencia de la onda ($\omega = 2\pi f$) y con el parámetro k_0 (o β_0). Este último se obtiene de la parte de la expresión del campo relacionada con su variación en el espacio:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x\ x + k_y\ y + k_z\ z = 0'866\ y + 0'5\ z \quad \Rightarrow \quad \vec{k} = 0'866\ \hat{y} + 0'5\ \hat{z}$$

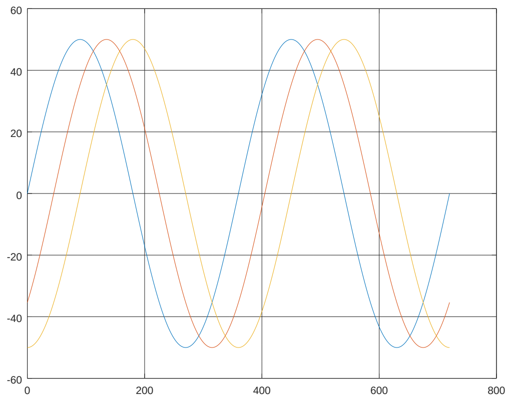


Figura 2: Apartado c, problema 1.3

El módulo de este vector, $\vec{k}$ *contiene la información acerca de los parámetros físicos del medio por el que se propaga la onda, más concretamente, su módulo.*

$$k = \sqrt{0'866^2 + 0'5^2} = 1$$

Como la onda se propaga en el vacío, su velocidad es $v_0 = 3 \cdot 10^8 \ m/s$

$$\omega = k\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\omega = kv_0 = 3 \cdot 10^8 \quad s^{-1}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k_0} = 2\pi \quad m}$$

b) *El campo magnético es:*

$$\vec{\mathbb{H}} = H_o \exp\left(j(0'866y + 0'5z)\right) \hat{h}$$

Su amplitud está relacionada con la del campo eléctrico a través de la impedancia característica del medio: η*, que por ser el vacío vale:* $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \ \Omega$

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta_0} = \frac{300}{120\pi} = 0'796 \ A/m$$

Falta calcular la dirección de $\hat{h}$*. Sabemos que tiene que ser perpendicular a la dirección de propagación* $\vec{k}$ *y al campo eléctrico simultáneamente lo que conduce a que tiene que estar en el plano* yz*, es decir es de la forma* $\hat{h} = h_y \ \hat{y} + h_z \ \hat{z}$ *Como también debe ser perpendicular al campo* $\vec{E}$ *su producto escalar con el segundo debe ser cero:*

$$\hat{h} \cdot \vec{k} = 0 \quad \Rightarrow (h_y \ \hat{y} + h_z \ \hat{z}) \cdot (0'866\hat{y} + 0'5\hat{z}) = 0'866h_y + 0'5h_z = 0$$

A esta expresión hay que añadir que h_y *y* h_z *son componentes de un vector unitario y por lo tanto* $\sqrt{h_y^2 + h_z^2} = 1$ *con lo que se tienen dos ecuaciones y dos incógnitas que se resuelven fácilmente.*

Otra manera más intuitiva es decidir dar un valor cualquier a alguna de las componentes h_y o h_z y obtener la otra. El resultado es un vector que es perpendicular a $\vec{k}$ (lo deseado) pero no es unitario. Si se normaliza, ya se tiene el vector unitario buscado. Sea $h_z = 1$:

$$h_y = -\frac{0'5}{0'855} = -0'585 \Rightarrow \hat{h} = \frac{-0'585\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{(-0'585)^2 + 1^2}} = -0'565\ \hat{y} + 0'863\ \hat{z}$$

Por fin:

$$\boxed{\vec{\mathbb{H}} = 0'796(-0'565\ \hat{y} + 0'863\ \hat{z}) \exp\big(j(0'866y + 0'5z)\big) \qquad A/m}$$

O en su forma espacio-temporal:

$$\boxed{\vec{H} = 0'796(-0'565\ \hat{y} + 0'863\ \hat{z}) \cos\big(3 \cdot 10^8 t - 0'866y - 0'5z\big) \qquad A/m}$$

c)

$$\boxed{\langle\vec{S}\rangle = \frac{E_0^2}{2\eta} = \frac{300^2}{240\pi} = 238'73\ (0'866\ \hat{y} + 0'5\ \hat{z}) \qquad W/m^2}$$

---

2. Ondas planas en medios con pérdidas

EJ. 2. 1. Una onda plana de frecuencia $f = 9'375\ GHz$ se propaga por polietileno ($\epsilon_r' = 2'26$, $\frac{\epsilon''}{\epsilon'} = 0'0002$). Si la amplitud del campo eléctrico es $500\ V/m$ y se supone que el material no tiene pérdidas, calcular:

a) La constante de fase.
b) La longitud de onda en el polietileno.
c) La velocidad de propagación.
d) La impedancia intrínseca.
e) La amplitud del campo magnético.

SOLUCIÓN:
Introducción teórica:
La ecuación de Helmholtz, de la que se ha obtenido la solución para el campo eléctrico de las ondas planas, admite una solución compleja (solución perteneciente al conjunto de los números complejos) que, además, sirve para explicar varios fenómenos físicos también asociados a ellas.

$$\frac{\partial^2 E_{x0}}{dz^2} = -\gamma k^2\ E_{x0}$$

en la que γ es la constante de propagación, y si se toma la solución compleja, se le llama ***constante de propagación compleja*** *y es normal expresarla separando su parte real y su parte imaginaria:*

$$j\gamma = \alpha + jk$$

Una solución a esta ecuación es (usando la notación fasorial y eligiendo que el campo eléctrico va a tener componente en x únicamente):

$$\mathbb{E}_x = E_{x0} \exp(-j\gamma z) = E_{x0} \exp(-\alpha z) \exp(-j\gamma z)$$

Pasando de la expresión fasorial a la espacio-temporal se obtiene la expresión conocida (en módulo):

$$E_x = E_{x0} \exp(-\alpha z) \cos(\omega t - \gamma z)$$

El resultado de tomar la solución compleja es que la amplitud de la solución queda afectada por un factor α que hace que disminuya su valor según se avanza en la dirección de propagación (z en este caso). Hay otros efectos relacionados con el medio que se reflejan en la formulación haciendo que su permitividad (ϵ) pase a ser compleja:

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_0(\epsilon_r' - j\epsilon_r'')$$

La tangente de pérdidas es la tangente del ángulo asociado a la ϵ_c (compleja). En lo que respecta a la permeabilidad magnética, aunque sucede lo mismo, su influencia es mucho menor, por lo que no se considerará una μ compleja y además será igual a la del vacío, μ_0. Entonces la solución es formalmente igual que la del caso de medios sin pérdidas:

$$\gamma = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon}$$

pero con la ϵ compleja:

$$\gamma = \omega\sqrt{\mu(\epsilon' - j\epsilon'')} = \omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}}$$

Esta expresión se puede separar en su parte real y su parte imaginaria (no sin esfuerzo) llegando a las soluciones:

$$\alpha = \Re\left[j\gamma\right] = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} - 1\right)^{1/2}$$

$$k = \Im\left[j\gamma\right] = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} + 1\right)^{1/2}$$

Al cociente $\frac{\epsilon''}{\epsilon'}$ se le llama tangente de pérdidas del material.
Independientemente de la existencia de pérdidas, y por completar la solución, se da el resto de parámetros asociados a la periodicidad de la solución y la relación entre campo eléctrico y magnético -la impedancia característica del medio- ya que todos estos parámetros se ven afectados por la utilización de una permitividad compleja:

- *Velocidad de propagacion:* $v_p = \frac{\omega}{k}$
- *Longitud de onda:* $\lambda = \frac{2\pi}{k}$
- *Impedancia intrínseca del medio:* $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon' - j\epsilon''}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\frac{1}{\sqrt{1-j(\epsilon''/\epsilon')}}$

La última expresión indica que el campo eléctrico y el magnético ya no están en fase. Las pérdidas introducidas por el material provoca un retraso relativo entre ellos. Finalmente, mediante el uso de las ecuaciones de Maxwell, más concretamente, la del rotacional del campo magnético, se llega a una expresión para ϵ'':

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$$

De utilidad en los casos en los que el material es conductor. En estos casos las pérdidas causadas están debidas al parámetro σ.

a) *Como se indica que el medio es un material sin pérdidas, la constante de propagación k es real, ($\epsilon'' = 0$) y por tanto: $\epsilon' = \epsilon_0\epsilon_r'$ y $\mu = \mu_0$:*

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon'} = 2\pi f\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r'} = 2\pi \cdot 9'375 \cdot 10^9\sqrt{4\pi \cdot 10^{-6} \cdot 8'854 \cdot 10^{-12} \cdot 2'26}$$

$$\boxed{k = 295'38 \quad m^{-1}}$$

b)

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{295'38} = 2'1 \quad cm}$$

c)

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi \cdot 9'375 \cdot 10^9}{295'38} = 1'99 \cdot 10^8 \quad m/s}$$

d)

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon'}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r'}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8'854 \cdot 10^{-12} \cdot 2'26}} = 250'6 \quad \Omega}$$

e)

$$\boxed{H_0 = \frac{E_0}{\eta} = \sqrt{\frac{100}{250'6}} = 1'995 \quad A/m}$$

EJ. 2. 2. Una onda plana se propaga en el agua del mar en la dirección $+z$. La expresión del campo eléctrico asociado es:

$$\vec{E}(z = 0, t) = 100 \cos(10^7 \pi t)\hat{x} \quad V/m$$

Los parámetros del agua son $\epsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 4\ S/m$. Calcular:

a) α, k, η, v, (velocidad de propagación) y λ (longitud de onda).
b) La distancia a la cual la amplitud del campo eléctrico es el $1\,\%$ del valor en $z = 0$
c) Las expresiones de los campos eléctrico y magnético de la onda.

SOLUCIÓN:
Al ser $\sigma \neq 0$ se sabe que el medio, el agua del mar, es un medio con pérdidas. El cálculo de cada parámetro se puede hacer usando los dos caminos: mediante las fórmulas teóricas o sus aproximaciones disponibles en la bibliografía. En este ejercicio se calculará de las dos maneras para verificar que las aproximaciones son ciertas.

a)

- *Cálculos precisos. La constante de propagación γ que tiene carácter complejo ($\in \mathbb{C}$)*

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-1/2}$$

$$\gamma = j10^7\pi\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 72 \cdot 8'85 \cdot 10^{12}}\sqrt{1 - j\frac{4}{10^7\pi \cdot 72 \cdot 8'85 \cdot 10^{12}}} = 8'86 + j8'9$$

$$\boxed{\alpha = 8'86 \quad Np/m} \quad y \quad \boxed{k = 8'9 \quad rad/m}$$

En donde ya se observa que α y k son muy parecidos como era de esperar dada la aproximación que se propone en la teoría.

- *Usando el método aproximado. Primero se comprueba que el criterio de aproximación se cumple, a saber:*

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} << 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{10^7\pi \cdot 72 \cdot 8'85 \cdot 10^{-12}} = 0'02 \quad \Rightarrow \quad \textit{Se cumple}$$

Por lo tanto:

$$\alpha = k \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^7\pi \cdot 4}{2}} = 2\pi\sqrt{2} = 8'8858$$

$$\boxed{\alpha = 2\pi\sqrt{2} \quad Np/m} \quad y \quad \boxed{k = 2\pi\sqrt{2} \quad m^{-1}}$$

$$\eta \approx (1 + j)\frac{\alpha}{\sigma} = (1 + j)\frac{2\pi\sqrt{2}}{4} = (1 + j)\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

En formato módulo-fase:

$$\eta = \left(\sqrt{2}\exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = \pi\exp\left(j\frac{\pi}{4}\right) \quad \Omega}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{10^7\pi}{2\pi\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_p = 3'54 \cdot 10^6 \quad m/s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad m}$$

b) *La expresión general del campo eléctrico de una onda plana en un medio con pérdidas es:*

$$\vec{E}(z,t) = 100\exp(-\alpha z)\cos(\omega t - kz)\hat{x} \quad V/m$$

Su amplitud es: $E_0 = 100\exp(-\alpha z)$ V/m*. En* $z = 0$

$$E_0 = 100 \quad V/m$$

El $1\,\%$ *de* E_0 *es* 1 *y el valor de* z *en el que esto ocurre:*

$$100\exp(-\alpha z) = 1 \quad \Rightarrow \quad \exp(-\alpha z) = 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad -\alpha z = \ln\left(10^{-2}\right)$$

$$z = \frac{\ln\left(10^{-2}\right)}{\alpha} = \frac{\ln\left(10^{-2}\right)}{2\pi\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 0'518\ m}$$

En algo más de de medio metro la amplitud se ha reducido hasta el $10\,\%$

c) *Campo eléctrico:*

$$\vec{E} = 100\exp(-2\pi\sqrt{2}z)\cos(\omega 10^7 t - 2\pi\sqrt{2})\hat{x} \qquad V/m$$

En formato fasorial:

$$\vec{\mathbb{E}} = 100\exp(-2\pi\sqrt{2}z)\exp(-j2\pi\sqrt{2})\ \hat{x} \qquad V/m$$

Campo magnético: su dirección viene dada por la relación entre la dirección del campo $\vec{E}$ *y la de propagación de la onda,* $\hat{z}$*:*

$$\hat{e} \times \hat{h} = \hat{d}$$

En donde $\hat{e}$ *es la dirección del campo eléctrico (*$\hat{x}$ *en este caso),* $\hat{d}$*, la de propagación de la onda (*$\hat{z}$ *en este caso) y* $\hat{h}$ *la del campo magnético, que tiene que ser* $\hat{y}$ *para que se cumpla sin más que usar la regla de la mano derecha para deducirlo. Entnces:*

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbb{H}} &= \frac{E_0}{\eta}\exp(-\alpha z)\exp(-jkz)\hat{y} \\
&= \frac{100}{\pi\exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)}\exp(-\alpha z)\exp(-jkz)\hat{y} \\
&= \frac{100}{\pi}\exp(-\alpha z)\exp(-jkz)\exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right)\hat{y} \\
&= \frac{100}{\pi}\exp(-\alpha z)\exp\left(-j\left(kz + \frac{\pi}{4}\right)\right)\ \hat{y}
\end{aligned}$$

Y en forma espacio-temporal:

$$\boxed{\vec{H}(z,t) = \Re\left[\vec{\mathbb{H}}\exp(j\omega t)\right] = \frac{100}{\pi}\exp(-\alpha z)\cos\left(\omega t - \left(kz + \frac{\pi}{4}\right)\right)\hat{y} \quad A/m}$$

EJ. 2. 3. Un medio caracterizado como buen conductor y con pérdidas, tiene una impedancia intrínseca $\eta = 200\angle 30^o\ \Omega$ a cierta frecuencia. Si a esta frecuencia la onda plana que se propaga por este medio tiene un campo magnético con esta expresión

$$\vec{H} = 10\exp(-\alpha x)\cos(\omega t - \frac{1}{2}x)\hat{y} \quad A/m$$

Calcular la del campo eléctrico

SOLUCIÓN:

Para calcular el campo eléctrico empezamos por su dirección. El campo eléctrico es perpendicular al magnético y a la dirección de propagación como muestra la resolución de la ecuación de ondas. La onda se propaga en la dirección del eje x, y el campo magnético solo tiene componente en y. Por lo tanto, la dirección del campo $\vec{E}$ tiene que estar en el eje z. Y el sentido es tal que $\vec{E} \times \vec{H}$ sea $\hat{x}$. Ello conduce a que el campo eléctrico tiene la dirección y sentido de $-\hat{z}$

La amplitud de $\vec{E}$ se calcula mediante la relación que le liga con la amplitud de $\vec{H}$

$$\frac{E_0}{H_0} = \eta \Rightarrow E_0 = H_0 200 \exp(j\frac{\pi}{6}) = 2\exp(j\frac{\pi}{6}) \qquad KV/m$$

Usando la notación de fasores, la expresión del campo queda

$$\vec{\mathbb{E}} = -2\exp(-\alpha x)\exp(j\frac{\pi}{6})\exp(-\frac{1}{2}x)\hat{z} \qquad KV/m$$

En forma temporal:

$$\vec{E} = -2\exp(-\alpha x)\cos(\omega t - \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})\hat{z} \qquad KV/m$$

Falta calcular α. Dado que el medio es buen conductor la aproximación que aplica para $\gamma = \alpha + jk$ y sus partes real e imaginaria es $\alpha = k$. En este caso k está en la expresión de $\vec{H}$: $k = \frac{1}{2}$ Con lo cual:

$$\boxed{\vec{E} = -2\exp(-\frac{x}{2})\cos(\omega t - \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})\hat{z} \qquad KV/m}$$

EJ. 2. 4. Dado un material no magnético caracterizado por $\epsilon_r' = 3'2$ y $\sigma = 1'5 \cdot 10^{-4}\ S/m$ calcular los valores, a $3\ MHz$, de:

a) La tangente de pérdidas θ.
b) La constante de atenuación α.
c) La constante de fase k.
d) La impedancia intrínseca del medio η

SOLUCIÓN:

a) *Como se da σ el medio es conductor y por lo tanto va a presentar pérdidas. La tangente de pérdidas es $\frac{\epsilon''}{\epsilon'}$ aunque en este caso no se tiene el dato de ϵ''. Recordando que la tangente de pérdidas está relacionada con σ así:*

$$\theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon_r'}$$

$$\boxed{\theta = \frac{1'5 \cdot 10^{-4}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 8'854 \cdot 10^{-12} \cdot 3'2} = 0'28}$$

b)

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{1'5}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3'2}} = 0'016 \quad Np/m}$$

c)

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon_0\epsilon_r'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7}\epsilon_0\epsilon_r'} = 0'11 \quad rad/m}$$

d)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon'}\right) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r'}}\left(1 + j\frac{\sigma}{2(2\pi f)\epsilon_0\epsilon_r'}\right)$$

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8'854 \cdot 10^{-12} \cdot 3'2}}\left(1 + j\frac{1'5 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 8'854 \cdot 10^{-12} \cdot 3'2}\right) = 210'6 + j\ 29'6 \quad \Omega}$$

3. Ondas planas. Planteamiento general

EJ. 3. 1. Un campo eléctrico tiene la siguiente expresión en el **origen de coordenadas** (sistema cartesiano, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$):

$$\vec{E}(x=0, y=0, z=0, t) = 9\sin(72\pi 10^6 t + \frac{\pi}{4})\hat{x}$$

en donde el tiempo se expresa en segundos. La onda, de la que este campo forma parte, se propaga según la dirección y sentido del vector $\vec{k} = 2\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}$. Se pide:

a) Escribir la expresión genérica (para cualquier punto x, y, z) del campo eléctrico.
b) Calcular la velocidad de propagación de la onda.

SOLUCIÓN:

a) *El campo eléctrico de una onda que se propaga en un medio según la dirección y sentido del vector unitario $\hat{k}$, en el instante t y en un punto del espacio referenciado mediante el vector de posición $\vec{r}$ es:*

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \theta)\hat{e} \qquad V/m$$

donde E_0, ω, y θ son constantes del campo que representan, respectivamente, la amplitud, la frecuencia angular y el valor inicial de la fase en el origen (normalmente es cero, pero no es el caso aquí).
$\hat{e}$ es el vector unitario que indica la dirección de $\vec{E}$ y que puede ser cualquiera, es decir, tener componentes en los ejes x, y y z.
El vector de posición de un punto genérico del espacio (x, y, z) en el que se particularice la expresión del campo es: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Con lo dicho, y comparando la expresión genérica con la dada en el enunciado se deduce que:

- $E_0 = 9\ V/m$
- $\hat{e} = \hat{x}$
- $\omega = 72\pi 10^6\ rad/s$
- $\theta = \frac{\pi}{4}$*, es decir, el valor de todo el argumento del coseno para* $t = 0$ *y en el origen* $(x = 0, y = 0, z = 0)$
- $\vec{k}\cdot\vec{r} = (2\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z})\cdot(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = 2x - y + 2z$

La expresión de $\vec{E}$ es:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = 9\ \hat{x}\ \sin(72\pi 10^6 t - (2x - y + 2z) + \frac{\pi}{4}) \qquad V/m$$

Dado que, típicamente, se expresa el campo usando el coseno en lugar del seno, restamos un desfase de $\pi/2 \Rightarrow +\pi/4 - \pi/2 = -\pi/4$:

$$\boxed{\vec{E}(x, y, z, t) = 9\ \hat{x}\ \cos(72\pi 10^6 t - (2x - y + 2z) - \frac{\pi}{4}) \qquad V/m}$$

b) *La velocidad de propagación se calcula a partir del coeficiente que acompaña a la expresión espacial del campo, es decir, la que incluye las coordenadas del espacio, x, y y z, el vector $\vec{k}$. Se puede entender mejor si se expresa este factor de otra manera:*

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = |\vec{k}|(\hat{k}\cdot\vec{r})$$

Es decir, extrayendo el módulo de $\vec{k}$ para que quede de manifiesto que la dirección de propagación está indicada por el vector unitario correspondiente. Así expresado puede quedar más evidente que este módulo afecta por igual a las tres componentes del espacio, lo cual tiene sentido ya que incluye las características del material por el que avanza la onda. Y recuérdese que siempre trabajaremos con materiales isotrópicos, es decir, aquellos en los que sus características físicas son iguales en cualquier punto.
Entonces:

$$|\vec{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \omega/c \rightarrow c = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{72\pi' 10^6}{3}$$

$$\boxed{c = 75'4 \cdot 10^6 \qquad m/s}$$

EJ. 3. 2. Una onda electromagnética viaja en el espacio libre donde el campo eléctrico viene dado por:

$$\vec{\mathbb{E}}(y,z) = 100\ \hat{x}\ \exp\left[j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y + 0'5z\right)\right] \quad \text{V/m.}$$

Determinar:

a) ω y λ.
b) $\vec{\mathbb{H}}(y,z)$.
c) El flujo de potencia media de la onda.

SOLUCIÓN:

La expresión general del campo eléctrico de una onda plana en forma fasorial, tal y como se muestra en los textos, es:

$$\vec{\mathbb{E}} = \vec{E}_0 \exp\left[-j\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]$$

Para evitar confusiones con los signos es útil reescribirla siguiendo el mismo patrón, quedando de manifiesto que el argumento de la exponencial va precedido por el signo menos. En el caso de este ejercicio es :

$$\vec{\mathbb{E}}(y,z) = 100\ \hat{x}\ \exp\left[-j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y - 0'5z\right)\right] \quad V/m.$$

a) $k = \frac{\omega}{c}$. *En este caso,* $c = c_0 = 3'10^8$ *m/s, por lo que:*

$$k = \frac{\omega}{c_0} \Rightarrow \omega = kc_0$$

k es el módulo del vector $\vec{k}$ que indica la dirección de propagación de la onda. En este caso $\vec{k} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z}\right) \Rightarrow$ $|\vec{k}| = 1$. *Finalmente:*

$$\omega = 3\cdot 10^8\ s^{-1}$$

Longitud de onda λ:

$$c_0 = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = c_0 T = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi c_0}{\omega} = 2\pi\ m$$

b) El fasor del campo magnético de una onda plana tiene esta forma general en un medio sin pérdidas:

$$\vec{\mathbb{H}} = H_0\ \hat{h}\ \exp(-j\vec{k}\cdot\vec{r})$$

Hay que encontrar H_0 y $\hat{h}$

- $H_0 = \frac{E_0}{\eta_0} = \frac{100}{120\pi} = 0'27$
- *$\hat{h}$ es un vector unitario que cumple:*

$$\hat{k} = \hat{e}\times\hat{h}$$

siendo $\hat{k}$ el vector unitario en la dirección de propagación de la onda, $\hat{e}$, ídem del vector campo eléctrico de la onda y $\hat{h}$, ídem del vector campo magnético.

$$\begin{aligned}\hat{k} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{z}\\ \hat{e} &= \hat{x}\end{aligned}$$

obteniéndose $\hat{h}$ de:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} - \frac{1}{2}\hat{z} \Rightarrow h_x = 0, h_y = -\frac{1}{2}, h_z = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Con todo ello:

$$\vec{\mathbb{H}} = 0'27 \left(-\frac{1}{2}\hat{y} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} \right) \exp\left[j \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y + 0'5z \right) \right] \quad A/m$$

c) *El flujo medio de potencia es una magnitud vectorial ya que la potencia fluye en una dirección y un sentido y es valor medio del vector de Poynting:*

$$\begin{aligned}
\langle \vec{S} \rangle =& \frac{1}{2}\mathbb{R}e\left(\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^* \right) \\
\vec{\mathbb{E}} =& 100\ \hat{x}\ \exp\left[j \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y + 0'5z \right) \right] \\
\vec{\mathbb{H}}^* =& 0'27\ \left(-\frac{1}{2}\hat{y} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} \right)\ \exp\left[-j \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y + 0'5z \right) \right] \\
\langle \vec{S} \rangle =& \frac{1}{2} 27 \left(\hat{x} \times \left(-\frac{1}{2}\hat{y} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} \right) \right) = 13'5 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} - \frac{1}{2}\hat{z} \right) \qquad W/m^2
\end{aligned}$$

EJ. 3. 3. Sea una onda plana de 50 MHz cuyo campo eléctrico tiene una amplitud de 10 V/m. El medio por el que se propaga no tiene pérdidas ($\sigma = 0$) y en el que $\epsilon_r = 9$ y $\mu_r = 1$. La onda se propaga en el plano xy formando un ángulo de 30º con respecto al eje x alejándose del origen de coordenadas, y el campo eléctrico está polarizado linealmente según el eje z. Escribir la expresiones fasoriales y temporales de los campos eléctrico y magnético.
SOLUCIÓN:
Las expresión fasorial del campo eléctrico es:

$$\vec{\mathbb{E}} = E_0\ \hat{e}\ \exp\left(-j\vec{k}\cdot\vec{r} \right)$$

en donde, aparte de $\vec{r}$ que es la variable independiente (es decir un punto del espacio (x, y, z)), es necesario averiguar:

- *la amplitud del campo E_0*
- *la dirección de propagación de la onda: $\vec{k}$*
- *la dirección del campo eléctrico: $\hat{e}$*

Y a partir de ella la del campo magnético,

$$\vec{\mathbb{H}} = H_0\ \hat{h}\ \exp\left(-j\vec{k}\cdot\vec{r} \right)$$

que es casi inmediata ya que está directamente relacionada con la del campo eléctrico a través de la impedancia característica del medio: η.
Entonces:

- *Amplitud del campo: es un dato del problema: $E_0 = 10 \quad V/m$*
- *Dirección de propagación de la onda. Es el vector $\vec{k} = |\vec{k}|\hat{k} = k\hat{k}$ El módulo viene dado por las características del medio y la frecuencia de la onda:*

$$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \omega\sqrt{\epsilon_r\epsilon_0\mu_0} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r}}{c_0} = 3'2 \quad m^{-1}$$

$\hat{k}$ es un vector unitario que descansa en el plano xy (no tiene componente en z), que forma un ángulo de 30º con el eje x y que se aleja del origen de coordenadas, es decir, sus componentes son positivas:

$$\hat{k} = \cos 30\hat{x} + \sin 30\hat{y}$$

Con lo que:

$$\vec{k} = 3'2(\cos 30\hat{x} + \sin 30\hat{y}) = 2'8\hat{x} + 1'6\hat{y} \quad m^{-1}$$

- *Dirección de $\vec{E}$: al estar polarizado linealmente según z solo tiene componente en este eje. El enunciado no aporta ninguna restricción que conduzca a pensar si es según $+z$ o $-z$, por lo queda libre. Se elige $+Z$ con lo que*

$$\vec{\mathbb{E}} = \mathbb{E}\hat{z}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\vec{\mathbb{E}}(x,y,t) = 10\ \hat{z}\ e^{-j(2'8x+1'6y)} \qquad V/m}$$

Su expresión temporal:

$$\boxed{\vec{E}(x,y,t) = 10\hat{z}\cos(5\cdot 10^7 t - 2'8x - 1'6y) \qquad V/m}$$

El campo magnético de esta onda:

$$\vec{\mathbb{H}} = \frac{E_0}{\eta}\hat{h}\exp\left(-j\vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} = \eta_0\frac{1}{3} = \frac{120\pi}{3} = 40\pi\ \Omega$$

Y por tanto:

$$\vec{\mathbb{H}} = \frac{10}{40\pi}\ \hat{h}\ e^{-j(2'8\hat{x}+1'6\hat{y})} = 7'96\cdot 10^{-2}\ \hat{h}\ e^{-j(2'8\hat{x}+1'6\hat{y})}$$

La dirección y sentido del campo magnético, dados por el vector unitario $\hat{h}$, deben ser los mismos que los del producto vectorial de $\vec{E}$ por $\vec{H}$, es decir, los de $\vec{k}$, dirección de avance de la onda. Si usamos vectores unitarios:

$$\hat{e}\times\hat{h} = \hat{k}$$

Pero $\hat{e} = \hat{z}$ *y* $\hat{k} = \cos 30\hat{x} + \sin 30\hat{y}$ *con lo que:*

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = \cos 30\hat{x}+\sin 30\hat{y} \qquad \Rightarrow \qquad -h_y\hat{x}+h_x\hat{y} = \cos 30\hat{x}+\sin 30\hat{y} \Rightarrow \begin{array}{rrl} h_x = & \sin 30 & = 0'5 \\ h_y = & -\cos 30 & = -0'87 \\ h_z = & 0 & \end{array}$$

Ya se pueden escribir las expresiones para el campo magnético:

$$\boxed{\vec{\mathbb{H}} = 7'96\cdot 10^{-2}(0'5\hat{x} - 0'87\hat{y})e^{-j(2'8x+1'6y)} = (39'8\hat{x} - 69'3\hat{y})\ e^{-j(2'8x+1'6y)} \qquad mA/m}$$

$$\boxed{\vec{H} = (39'8\hat{x} - 69'3\hat{y})\cos(5\cdot 10^7 t - 2'8x - 1'6y) \quad mA/m}$$

EJ. 3. 4. Por un cable circula una corriente de I Amperios de forma homogénea por toda su sección. Comprobar que se cumple el teorema de Poynting, es decir que el flujo saliente de potencia a través de una superficie cerrada es igual a la variación temporal de potencia asociada a los campos eléctrico y magnético, en el volumen definido por esa superficie, más la potencia perdida por efecto Joule o calentamiento también en ese volumen. En forma matemática:

$$-\int_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)d\vec{S} = \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\ d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}dV\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV\right)$$

SOLUCIÓN:
Este ejercicio muestra que las ondas planas viajan en cualquier medio, incluido el caso de un sólido como el interior un cable. La corriente eléctrica circulante por él es el resultado de aplicar campos eléctricos y magnéticos en el origen del circuito del que forma parte. Sea cual sea la fuente de alimentación de este circuito, es la responsable de la 'onda' que circula por el interior el cable.

Es evidente que el borde del cable supone una frontera con otro medio distinto, una cobertura protectora de *plástico, por ejemplo, o el aire. En ella habrá alguna transmisión y reflexión más o menos acentuada dependiendo de las características de este plástico. Estas reflexiones se suman a los campos que ya hay en el cable resultando en un campo medio que provoca la existencia de la corriente. Estos efectos se pueden despreciar y, aún así, llegar a resultados aceptables.*

La corriente que circula por el cable es uniforme, de lo cual se deduce que sea lo que sea lo que la genera (los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$) no presenta variación con el tiempo, con lo que los términos segundo y tercero del segundo miembro son cero, quedando:

$$-\int_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) d\vec{S} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\ d\vec{V}$$

Para responder a lo que pide el ejercicio debemos calcular cada uno de los dos miembros y verificar que se llega al mismo resultado. Ello implica calcular los campos eléctrico y magnético, $\vec{J}$ y definir un volumen (con su superficie envolvente) y aplicarlo en los dos miembros de la expresión. Si los resultados son el mismo, el ejercicio queda resuelto. Antes es necesario elegir un sistema de coordenadas adecuado. Dado la forma que presenta un cable, cilíndrica, tomaremos el sistema de coordenadas cilíndrico, colocando el eje $\hat{z}$ en el eje del cable.

- *El volumen sobre el que se integra está definido por el cable. Se toma una longitud arbitraria de cable L para definirlo ya que se necesita un volumen cerrado. La superficie es la que envuelve este volumen.*
- *La densidad de la corriente $\vec{J}$ es el flujo de cargas (en este caso electrones) que circulan por el cable por unidad de superficie atravesada (amperios / m^2). Como se dice que la corriente I es constante, se deduce que ésta se reparte de manera homogénea por la sección del cable (circular, $S = \pi a^2$, en donde a es el radio del cable), con lo que:*

  $$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{z}$$

  Se ha supuesto que la corriente circula en el sentido de z positivo.
- *El campo $\vec{E}$ está relacionado con $\vec{J}$ así:*

  $$\vec{J} = \sigma\vec{E} \qquad \text{de donde} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{\sigma\pi a^2}\hat{z} \qquad V/m$$

- *El campo $\vec{H}$ interviene en el primer miembro en la integral de superficie, por lo que solo nos interesa su valor en los puntos de ésta, es decir en los puntos de la superficie lateral (valores de $\rho = a$) y en los de las tapas. Por la simetría del problema, el flujo de $\vec{H}$ a través de la tapa inferior va a ser igual que el de la tapa superior pero de signo contrario con lo que el aporte en el flujo total es cero y por lo tanto, no es necesario calcular $\vec{H}$ en éstas.*
  El campo en los puntos de la superficie lateral viene dado por la expresión

  $$\vec{H} = \frac{I}{2\pi a}\hat{\phi}$$

  a la que se llega aplicando la ley de Ampère (ver presentación "Tema 1. Electrostática. Campo magnético", diapositiva 7)

Con todo ellos se acude a la expresión del teorema de Poynting en este caso (en el que la variación con el tiempo es cero):

- *En el primer miembro se resuelve primero el integrando:*

  $$\vec{E} \times \vec{H} = \left(\frac{I}{\sigma\pi a^2}\hat{z}\right) \times \left(\frac{I}{2\pi a}\hat{\phi}\right) = \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^3}(\hat{z} \times \hat{\phi}) = -\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^3}\ \hat{\rho}$$

  El diferencial de superficie, solo para el lateral ($\rho = a$), es: $d\vec{S} = a\ d\phi\ dz\ \hat{\rho}$

  $$\int_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) d\vec{S} = -\left(\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^3}\hat{\rho}\right) a \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{z=0}^{z=L} dz\ \hat{\rho} = -\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^2}(2\pi)(L)(\hat{\rho}\cdot\hat{\rho}) = -\frac{I^2 L}{\sigma\pi a^2}\ W/m^2$$

- *Segundo miembro:*

$$\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV = \int_V \left(\frac{I}{\sigma\pi a^2}\hat{z}\right)\cdot\left(\frac{I}{\pi a^2}\hat{z}\right)dV$$

La integral resultante se resuelve fácilmente si usamos coordenadas cilíndricas:

$$\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}dV = \int_{\rho=0}^{a}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{L}\frac{I^2}{\sigma\left(\pi a^2\right)^2}\,\rho d\rho\, d\phi\, dz = \frac{I^2}{\sigma\left(\pi a^2\right)^2}\int_0^a \rho d\rho\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^L dz =$$

$$= \frac{I^2}{\sigma\left(\pi a^2\right)^2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^a 2\pi L = \frac{I^2 L}{\sigma\pi a^2} \qquad W/m^2$$

Teniendo en cuenta el signo que aparece en la expresión inicial, $\boxed{\textit{queda verificado el teorema de Poynting en este caso}}$.

Merece la pena reparar en que a partir de la expresión de la resistencia presentada por un tramo de cable de longitud L y radio a,

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}$$

Si se usa para obtener la potencia disipada:

$$P = I^2\, R$$

se llega a la expresión obtenida en este ejercicio:

$$P = \frac{I^2\, L}{\sigma\pi a^2}$$

---

4. Ondas planas. Incidencia normal

EJ. 4. 1. Una onda plana se propaga por el vacío en la dirección $\hat{z}$ positiva. En $z = 0$ hay una interfaz con el un medio caracterizado por $\epsilon_r = 2,25$ y $\mu_r = 1$. La conductividad σ en ambos medios es 0, es decir, $\sigma_1 = 0$ y $\sigma_2 = 0$. La expresión del campo eléctrico de esta onda en el medio 1 ($z < 0$) es:

$$\vec{E}_i(z,t) = 24\cos(10^8 t - kz)\hat{y} \qquad V/m$$

Calcular:
a) Calcular k, Γ y τ en el medio 1.
b) Calcular el campo reflejado $\vec{E}_r(z,t)$
c) Calcular la potencia transmitida al medio 2.

SOLUCIÓN:

a) $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{c}$. *En este caso, al tratarse del vacío:*

$$\boxed{k = \frac{10^8}{3\times 10^8} = \frac{1}{3} \qquad m}$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

En el medio 1, la impedancia característica es la del vacío: $\eta_1 = 120\pi$, *y en el medio 2:* $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 2'25}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{2'25}} = \frac{2}{3}\eta_0 = \frac{2}{3}\cdot 120\pi = 80\pi\ \Omega$

$$\boxed{\Gamma = \frac{(80-120)\pi}{(80+120)\pi} = -\frac{1}{5}}$$

$$\boxed{\tau = 1 + \Gamma = 0'8}$$

b)

$$\vec{E}_r(z,t) = E_{0i}\Gamma \cos(\omega t - kz)\hat{y}$$

Se tiene todos los datos del ejercicios, con lo que:

$$\vec{E}_r(z,t) = 24 \cdot (-0'2)\cos(10^8 t + \frac{1}{3}z)\hat{y}$$

$$\boxed{\vec{E}_r(z,t) = -4'8\cos(10^8 t + \frac{1}{3}z)\hat{y} \qquad V/m}$$

c) La potencia transmitida al medio 2 viene dada por el vector de Poynting en cuya expresión se utilizan las magnitudes correspondientes a este medio. Las características del medio definen la impedancia características, ya calculada, y los campos están relacionados con los incidentes según las expresiones obtenidos en la parte teórica. Por lo tanto:

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{1}{2}\mathbb{R}e(\vec{\mathbb{E}}_t \times \vec{\mathbb{H}}_t^*)$$

$$\vec{\mathbb{E}}_t = E_{0i}\tau \exp(jk_2 z)\hat{y}$$

$$k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2} = 10^8\frac{\sqrt{2'25}}{c} = 1/2 \quad rad/m$$

$$\vec{\mathbb{E}}_t = 19'2\exp(-jz/2)\hat{y}$$

$$\vec{\mathbb{H}}_t = \frac{E_{0t}}{\eta_2}\exp(-jk_2 z)(-\hat{x}) = \frac{19'2}{80\pi}\exp(-jz/2)(-\hat{x}) \Rightarrow \vec{\mathbb{H}}_t^* = \frac{19'2}{80\pi}\exp(jz/2)(-\hat{x})$$

Finalmente:

$$\vec{\mathbb{E}}_t \times \vec{\mathbb{H}}_t^* = 19'2\exp(-jz/2)\cdot\frac{19'2}{80\pi}\exp(jz/2)(\hat{y}\times(-\hat{x})) = \frac{19'2^2}{80\pi}\hat{z}$$

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\frac{(19,2)^2}{80\pi}\hat{z} = 0'733\ \hat{z} \qquad W/m^2}$$

EJ. 4. 2. El campo magnético de una onda plana que viaja por el vacío tiene la siguiente expresión:

$$\vec{H} = 2\ \hat{z}\ \cos\left(10^7 t - 2y + \frac{2\pi}{5}\right) \quad A/m$$

Se pide:

a) Calcular el valor medio del vector de Poynting de esta onda en $y = 0$ (indicando su dirección y sentido).
b) La onda llega a de manera perpendicular un plano que separa dos medios. Calcular la impedancia característica del medio 2 para que se refleje la mitad de la potencia incidente

SOLUCIÓN:

a) Al indicarse que el medio presenta pérdidas al paso de la onda, se deduce que la constante de propagación va a ser compleja y por lo tanto es necesario calcular los parámetros de la constante de propagación λ, α y β. El valor medio del vector de Poynting es (valor escalar):

$$\langle S \rangle = \frac{E_0^2}{2|\eta_0|}\cos\theta = \frac{E_0^2}{2\eta_0}\cos\theta \qquad W/m^2$$

ya que el vacío es un medio sin pérdidas y por tanto η es real. También, sabiendo que $E_0 = H_0\eta_0$:

$$\langle S \rangle = \frac{(H_0\eta_0)^2}{2\eta_0}\cos\theta = \frac{H_0^2\eta_0}{2}\cos\theta = \frac{2^2\cdot 120\pi}{2}\cos\frac{2\pi}{5} = 233 \quad W/m^2$$

Al ese valor hay que añadirle el carácter vectorial. El vector de Poynting tiene la misma dirección y sentido que el de la propagación de la onda, que se puede extraer del argumento del coseno en la expresión del campo $\vec{H}$. En este caso es:

$$\vec{k} = 2\hat{y}$$

es decir, que la onda avanza en la dirección positiva del eje y, con lo cual:

$$\boxed{\langle\vec{S}\rangle = 233\ \hat{y} \qquad W/m^2}$$

b) *La onda va a incidir en la separación entre los dos medios y la potencia reflejada vendrá dada por el coeficiente de reflexión que es la relación entre las amplitudes del campo reflejado y el incidente:*

$$\Gamma = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\eta_2 - \eta_0}{\eta_2 + \eta_0}$$

en donde ya se ha sustituido la impedancia del medio 1 por su valor: la del vacío. La criterio impuesto es una reflexión del 50 % de la potencia incidente, es decir:

$$\frac{\langle S_r\rangle}{\langle S_i\rangle} = \frac{E_{0r}^2/2\eta_0}{E_{0i}^2/2\eta_0} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2$$

En esta expresión la impedancia asociada a cada onda (incidente y reflejada) es la misma ya que las dos están en el mismo medio. El criterio de diseño es que la potencia reflejada sea el 50 % de la incidente:

$$\frac{\langle S_r\rangle}{\langle S_i\rangle} = 0'5 \Rightarrow \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right) = \Gamma = \sqrt{0'5} = 0'707$$

$$0'707 = \frac{\eta_2 - 120\pi}{\eta_2 + 120\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\eta_2 = 2'19 \quad K\Omega}$$

5. Ondas planas. Incidencia oblícua

EJ. 5. 1. La superficie $z = 0$ separa el medio 1, vacío, ($z < 0$), del 2 ($z > 0$) caracterizado por $\epsilon_{r2} = 2'5$. Una onda plana se propaga por el primero con un campo eléctrico dado por

$$\vec{E}(x,z,t) = 8\cos(\omega t - 4x - 3z)\hat{y} \qquad V/m$$

Calcular:

a) el ángulo de incidencia y la frecuencia angular (ω)
b) el campo eléctrico de la onda reflejada
c) el campo magnético de la onda transmitida
d) la densidad de potencia media transmitida.

SOLUCIÓN:

a)

$$\vec{k}.\vec{r} = 4x + 3z \Rightarrow \vec{k} = 4\hat{x} + 3\hat{z}$$

El ángulo que forma $\vec{k}$ con el vector unitario perpendicular a la superficie de separación ($z = 0$) es el ángulo de incidencia. Es decir, el ángulo forman $\vec{k}$ y $\hat{z}$, por lo tanto

$$\vec{k}.\hat{z} = k\cos\theta_i \Rightarrow 3 = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}\cos\theta_i \Rightarrow \theta_i = \arcsin\frac{3}{5}$$

$$\boxed{\theta_i = 53'13^o}$$

La frecuencia angular está relacionada con las características del medio por el que se propaga la onda. En este caso, en el medio 1 que es el vacío:

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \Rightarrow 5 = \frac{\omega}{c_0} \Rightarrow \omega = 5 \cdot 3 \cdot 10^8 = 15 \cdot 10^8$$

b) *La parte de campo reflejada viene dada por el coeficiente de reflexión:*

$$\vec{E}_r = E_{0i}\Gamma_\perp \cos(15 \cdot 10^8 - 4x + 3z)\hat{y} \qquad \textit{en donde} \qquad E_{0i} = 8 \; y$$

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2 \cos\Theta_i - \eta_1 \cos\Theta_t}{\eta_2 \cos\Theta_i - \eta_1 \cos\Theta_t}$$

Calculemos las impedancias características de cada medio.

$$\eta_1 = 120\pi \quad \Omega \; (\textit{vacío}) \; , \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} = \frac{120\pi}{\sqrt{2'5}} = 238'4 \quad \Omega$$

El ángulo de transmisión se obtiene de la expresión que liga los parámetros de los dos medios:

$$\gamma_1 \sin\theta_i = \gamma_2 \sin\theta_t$$

Como en este caso no hay pérdidas en ninguno de los dos medios:

$$jk_1 \sin\theta_i = jk_2 \sin\theta_t \;\longrightarrow\; \sin\theta_t = \frac{\omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}{\omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}} \sin\theta_i \;\Rightarrow\; \sin\theta_t = \frac{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_{r2}}} \sin\theta_i$$

$$\sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\sin 53'13}{\sqrt{2'5}} \;\Rightarrow\; \theta_t = 30'4^o$$

Con todo ello ya se puede calcular $\Gamma_\perp$*:*

$$\Gamma_\perp = -0'389$$

Y por tanto:

$$\boxed{\vec{E}_r = -3'1 \; \hat{y} \; \cos(15 \cdot 10^8 - 4x - 3z) \qquad V/m}$$

c) *Para calcular el campo magnético de la onda transmitida, primero buscamos el campo eléctrico transmitido. Este viene dado por el coeficiente de transmisión y la dirección de la onda transmitida.*

$$\vec{E}_t = E_0\tau_\perp \cos(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})\hat{y}$$

- *Calculemos primero la dirección de la onda transmitida, que viene dada por* $\vec{k}_t$ *que es un vector que forma un ángulo* θ_t *con la perpendicular a la superficie de separación de los medios* ($z = 0$)*. Sea* $\hat{t}$ *el vector unitario en esta dirección, entonces:*

$$\vec{k}_t = |\vec{k}_t|\hat{k}_t$$

$$\hat{k}_t = \sin\theta_t\hat{x} + \cos\theta_t\hat{z} = 0'5060\hat{x} + 0'8625\hat{z}$$

$$|\vec{k}_t| = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2} = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\epsilon_{r2}} = \frac{10 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\sqrt{2'5} = 7'9 \; m^{-1}$$

$$\vec{k}_t = 7'9(0'5060\hat{x} + 0'8625\hat{z}) = 4\hat{x} + 6'81\hat{z} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{k} \cdot \vec{r} = 4x + 6'81z$$

- *En segundo lugar la amplitud del campo transmitido:* $E_0\tau_\perp$*:*

$$\tau_\perp = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} = \frac{2 \cdot 238'4 \cos 53'13}{238'4 \cos 53,13 + 120\pi \cos 30'4} = 0'611$$

$$E_{0t}\tau = 8 \cdot 0'611 = 4'88 \qquad V/m$$

Con lo cual:

$$\vec{E}_t = 4'88 \; \hat{y} \; \cos(15 \cdot 10^6 t - 4x - 6'81z) \qquad V/m$$

Para calcular el campo $\vec{H}_t$ *se hace uso de la expresión:*

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}\left(\hat{k} \times \vec{E}\right)$$

En la que $\hat{k} = \hat{k}_t = 0'5060\hat{x} + 0'8625\hat{z}$ *y* $\eta = \eta_2$

$$\vec{H}_t = \frac{1}{\eta_2}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0'5060 & 0 & 0'8625 \\ 0 & 4'88\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\eta_2}(-4'216\hat{x} + 2'473\hat{z})\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

Sustituyendo los valores de ω, η_2 *y* $\vec{k}_2.\vec{r}$ *no introducidos antes por sencillez:*

$$\boxed{\vec{H}_t = (-17'7\hat{x} + 10'5\hat{z})\cos(15\cdot 10^8 t - 4x - 6'82z) \qquad mA/m}$$

d) El valor medio del vector de Poynting se obtiene fácilmente usando la versión en fasor de los campos eléctrico, $\mathbb{E}$ *y magnético,* $\mathbb{H}$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\left[\vec{\mathbb{E}}_t \times \vec{\mathbb{H}}_t^*\right]$$

$$\vec{\mathbb{E}}_t = 4'88\ \hat{y}\ \exp\left(-j(4x + 6'82z)\right) \qquad y \qquad \vec{\mathbb{H}}_t = (-17'7\hat{x} + 10'5\hat{z})\cdot 10^{-3}\exp(-j(4x + 6'82z))$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 4'88 & 0 \\ -17'7\cdot 10^{-3} & 0 & 10'5\cdot 10^{-3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(51'24\hat{x} - 86'4\hat{z})$$

$$\boxed{\langle\vec{S}\rangle = 25'62\ \hat{x} - 43'2\ \hat{z} \qquad mW/m^2}$$

EJ. 5. 2. Una onda EM caracterizada por su campo eléctrico:

$$\vec{E} = (10\hat{y} + 5\hat{z})\cos(\omega t + 2y - 4z) \qquad V/m$$

incide en una frontera que separa dos medios. Esta frontera es el plano $z = 0$. El medio 1, región $z < 0$ es el vacío y el medio 2 ($z > 0$) está caracterizado por $\epsilon = 4\epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$. Nota: $\omega = 3\cdot 10^8$ Calcular:

a) Ángulos de incidencia, reflexión y transmisión.
b) Coeficientes de reflexión y transmisión.
c) Campo eléctrico total en los medios 1 y 2.

SOLUCIÓN:

a) El plano de incidencia es el que contiene la trayectoria de la onda que está expresada en la parte espacial del argumento del coseno, es decir, los términos que contienen las variables espaciales x *e* y*. Además estos términos son el resultado del producto escalar entre* $\vec{k}_1$*, la constante de fase del medio 1, y el vector que ubica un punto cualquiera* $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$*. En este caso:*

$$\vec{k}_1\cdot\vec{r} = -2y + 4z \longrightarrow \Theta_i = \arctan\frac{2}{4} = 26'56^o$$

Otra manera de calcularlo es aplicar el hecho de que el ángulo pedido es el que forma la línea en la que se propaga la onda con la normal del plano que separa los dos medios, pudiéndose calcular este ángulo mediante el producto escalar de $\vec{k}$ *y* $\hat{z}$

$$\vec{k}_1\cdot\hat{z} = k_1.(1)\cos\Theta_i \longrightarrow 4 = \sqrt{2^2 + 4^2}\cos\Theta_i$$

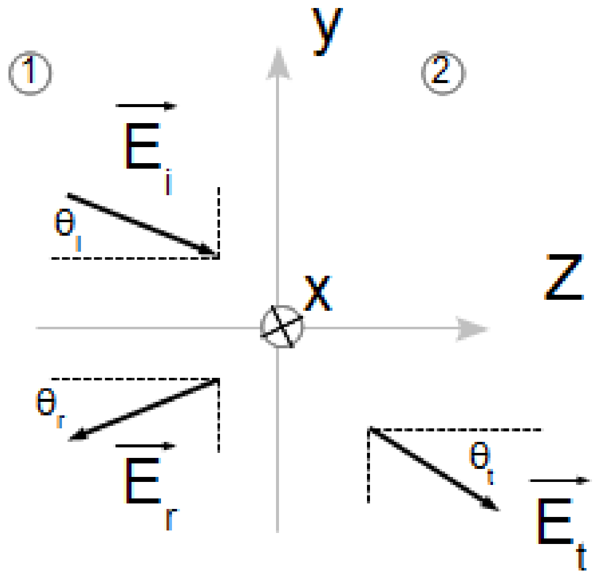
$$\boxed{\Theta_i = 26'56^o}$$

$$\boxed{\Theta_r = \Theta_i = 26'56^o}$$

Para calcular el ángulo de transmisión se usa la ley de Snell:

$$jk_1\sin\Theta_i = jk_2\sin\Theta_t \Longrightarrow \sin\Theta_t = \frac{k_1}{k_2}\sin\Theta_i$$

$$\sin\Theta_t = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{\omega\sqrt{\mu_0 4\epsilon_0}}\sin\Theta_i = \frac{\sin\Theta_i}{\sqrt{4}} \Longrightarrow \boxed{\Theta_t = 12'9^o}$$



b) *Coeficiente de reflexión,*

$$\Gamma = \frac{\eta_2 \cos\Theta_i - \eta_1 \cos\Theta_t}{\eta_2 \cos\Theta_i + \eta_1 \cos\Theta_t}$$

$\eta_1 = 120\pi$, $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\epsilon_0}} = 60\pi \qquad \Omega$

$$\boxed{\Gamma = -0'371}$$

Coeficiente de transmisión:

$$\tau = \frac{2\eta_2 \cos\Theta_i}{\eta_2 \cos\Theta_i + \eta_1 \cos\Theta_t} = \frac{2 \cdot 60\pi \cos(26,56)}{60\pi \cos 26'56 + 120\pi \cos 12'92}$$

$$\boxed{\tau = 0'63}$$

c) *En el medio 1 se superponen el campo incidente y el reflejado:*

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$$

El campo incidente es dato y el reflejado se obtiene a partir de coeficiente de reflexión:

- *Su amplitud es* $\vec{E}_{r0} = \vec{E}_{0i}\Gamma = (-3'17\hat{y} - 1'855\hat{z})$
- *Su fase, el contenido de la función coseno, tiene dos partes, la temporal y la espacial.*
  - *La temporal es la misma:* ωt
  - *La espacial está dada por el resultado del producto escalar* $\hat{k}_1 \cdot \vec{r}$*. En él,* $\vec{k}_1$ *es un vector cuyo módulo es el mismo que para la onda incidente ya que las dos están en el mismo medio y que viene dado por* $|\vec{k}_1|$*, y la dirección y sentido está dado por la dirección de la onda reflejada en el medio 1. Sabiendo el ángulo de la onda reflejada se puede calcular fácilmente. Más sencillo: dado que los ángulos que forman las ondas incidente y reflejada son iguales, para la segunda, su componente en* $\hat{z}$ *tiene que ser la misma que para* $\vec{k}_1$ *pero de signo contrario, mientras que la componente en* $\hat{y}$ *es la misma, como* $\Theta_r = \Theta_i$

    $$\vec{k}_r = -2\hat{y} - 4\hat{z}$$

    Y entonces el campo reflejado es:

    $$\vec{E}_r = (-3'71\hat{y} - 1'855\hat{z})\cos(\omega t + 2\hat{y} + 4\hat{z}) \qquad V/m$$

    Por lo tanto, el campo total es:

    $$\boxed{\vec{E}_T = (10\hat{y} + 5\hat{z})\cos(3 \cdot 10^8 t + 2y - 4z) + (-3'71\hat{y} - 1'855\hat{z})\cos(3 \cdot 10^8 t + 2y + 4z) \qquad V/m}$$

d) En el medio 2 el campo es:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{0i}\tau\cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})$$
$$\vec{E}_{0i}\tau = (10\hat{y} + 5\hat{z})0'63 = 6'3\hat{y} + 3'15\hat{z}$$

La constante de fase $\vec{k}_2$ tiene su módulo, dependiente de las características del medio 2:

$$|k_2| = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2} = 3\cdot 10^8\sqrt{\mu_0 4\epsilon_0} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}\sqrt{4} = 2 \qquad m^{-1}$$

La dirección de avance está dada por el ángulo de transmisión. Con él ya se puede calcular un vector unitario en esa dirección:

$$\Theta_t = 12'9^o \Rightarrow \hat{k}_t = -\sin 12'92\hat{y} + \cos 12'92\hat{z} = -0'22\hat{y} + 0'975\hat{z}$$

$$\vec{k}_t = 2(-0'22\hat{y} + 0'975\hat{z}) = -0'44\hat{y} + 1'95\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{E}_t = (6'3\hat{y} + 3'15\hat{z})\cos(3\cdot 10^8 t + 0'44y - 1'95z) \qquad V/m}$$