BOLETÍN DE EJERCICIOS
TEMA 4. ONDAS PLANAS EN CAMBIOS DE MEDIO

1. Ondas planas. Cambios de medio incidencia normal

EJ. 1. 1.

Una onda plana en el vacío (medio 1) tiene la siguiente expresión:

$$\vec{E}_i(z,t) = 24\cos(10^8 t - \beta z)\hat{y} \qquad V/m$$

cambia de medio a uno caracterizado por $\epsilon_r = 2'25$ y $\mu_r = 1$ (medio 2). En ambos se cumple que $\sigma = 0$. La frontera que separa los dos medios es el plano $z = 0$. Se pide:

a) β, Γ, y τ para el medio 1.

b) Campo eléctrico reflejado.

c) Potencia media transmitida al medio 2

SOLUCIÓN:

a)

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{\omega}{c_0} = \frac{10^8}{3.10^8} = \frac{1}{3}\ m$$

Para calcular el coeficiente de transmisión, Γ, que es la relación entre la onda incidente y la reflejada, es necesario conocer las características de los dos medios. Más concretamente la impedancia característica de cada uno.
En el medio 1, la impedancia característica es la del vacío: $\eta_1 = \eta_0 = 120\pi$
En el medio 2,

$$\eta_2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{2\eta_0}{3} = \frac{2.120\pi}{3} = 80\pi\ \Omega$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{(80-120)\pi}{(80+120)\pi} = \frac{-40}{200} = -\frac{1}{5} = -0'2$$

$$1 + \Gamma = \tau \Rightarrow \tau = 0'8$$

b)

$$\vec{E}_r = \Gamma\vec{E}_i \Rightarrow \vec{E}_r(z,t) = (-0'2)24\cos(10^8 t + \frac{1}{3}z)\hat{y} = -4'8\cos(10^8 t + \frac{1}{3}z)\hat{y}\ V/m$$

c) La potencia transmitida viene dada por el valor medio del vector de Poynting:

La potencia transmitida es la que pasa al medio 2, por lo tanto, los campos (en forma fasorial),$\mathbb{E}$ y $\mathbb{H}$) son los correspondientes a este medio. Es necesario, entonces, calcular la β_2

$$
\begin{aligned}
\beta_2 =& \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2} = \frac{\omega\sqrt{2'25}}{c_0} = \frac{10^8.3}{3.10^8.2} = 0'5\ rad/m \\
\vec{\mathbb{E}}_2 =& 20\tau\exp(-j\beta_2 z)\hat{y} = 19'2\exp\{-j0'5z\}\hat{y} \\
\vec{E}_2(z,t) =& \mathbb{R}e\{\vec{\mathbb{E}}_2\exp(j\omega t)\} = 19'2\cos(10^8 t - 0'5z)\hat{y}\ V/m \\
\vec{H}_2(z,t) =& \frac{\vec{E}_2(z,t)}{\eta_2} = -\frac{19'2}{80\pi}\cos(10^8 t - 0'5z)\hat{x}\ A/m \\
\vec{\mathbb{H}}_2 =& -7'64.10^{-2}\exp(-j0'5z)\hat{x}\ A/m \\
\vec{\mathbb{H}}_2^* =& -7'64.10^{-2}\exp(j0'5z)\hat{x}\ A/m \\
\vec{\mathbb{E}}_2 \times \vec{\mathbb{H}}_2^* =& 19'2.\exp(-j0'5z)7'64.10^{-2}\exp(j0'5z)(\hat{y}\times(-\hat{x})) = 19'2.7'64.10^{-2}\hat{z}
\end{aligned}
$$

Por fin, la potencia media transmitida es:

$$P_2 = \frac{1}{2}\mathbb{R}e\{\vec{\mathbb{E}}_2 \times \vec{\mathbb{H}}_2^*\} = 0'733\ W/m^2$$

2. Ondas planas. Cambios de medio inciencia oblicua

EJ. 2. 1.

Una onda plana en el aire tiene la siguiente expresión:

$$\vec{E}(x,y,t) = 8\cos(\omega\, t - 4x - 3z)\hat{y} \qquad V/m$$

Incide sobre una frontera dieléctrica ($\epsilon_r = 2'5$) definida por $z = 0$. Calcular:

a) Vector unitario en la línea de incidencia, ángulo de incidencia y frecuencia de la onda

b) Campo eléctrico reflejado.

c) Campo magnético transmitido.

SOLUCIÓN:

Se indicarán las tres direcciones de la onda (incidente, reflejada y transmitida) con los símbolos: $\vec{k_i}$, $\vec{k_r}$ y $\vec{k_t}$ respectivamente.

La fase del coseno, reescrita de otra forma, queda:

$$(\omega t - (4x + 3z))$$

que comparándola con la expresión genérica:

$$(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{r})$$

dencia, siendo éste, el formado por la dirección de incidencia y la normal a la superficie de separación de los dos medios.

a) De lo dicho antes, $\vec{k_i} = 4\hat{x} + 3\hat{z}$*, y por tanto, el vector unitario en esta dirección es:*

$$\hat{k_i} = \frac{\vec{k_i}}{|\vec{k_i}|} = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}(4\hat{x}+3\hat{z}) = \frac{4}{5}\hat{x} + \frac{3}{5}\hat{z}$$

El ángulo de incidencia es el que forma la dirección de la onda ($\vec{k_i}$*) con la normal a la superficie que separa los dos medios (*$\hat{z}$*),*

$$\theta_i = \arctan\frac{k_{ix}}{k_{iz}} = \frac{4}{3} = 53'13^o$$

La frecuencia de la onda está relacionada con el módulo de $\vec{k_i}$ *ya que* $|\vec{k_i}| = \frac{\omega}{c_0}$*. Por tanto:*

$$\omega = |\vec{k_i}|c_0 = 5 \cdot 3 \cdot 10^8 = 15 \cdot 10^8 \qquad rad/s$$

b) El campo reflejado tiene como expresión general:

$$\vec{E_r} = E_{i0}\Gamma_\perp \cos(\omega t - \vec{k_r} \cdot \vec{r})\hat{y}$$

La dirección de la onda reflejada, $\vec{k_r}$ *se obtiene a partir de* $\vec{k_i}$ *recordando que los ángulos incidente y reflejado son iguales:* $\theta_i = \theta_r$*. Para que esto sea así es necesario intercambiar las coordenadas quedando:*

$$\hat{k_r} = \frac{4}{5}\hat{x} - \frac{3}{5}\hat{z}$$

Y en cuanto al módulo, que viene definido por las características del medio, debe ser el mismo que el de $\vec{k_i}$ *porque las dos ondas están en el mismo:* $|\vec{k_r}| = |\vec{k_i}| = \omega/c_0 = 5$*.*

$$\begin{aligned}
\vec{k_r} &= |\vec{k_r}|\hat{k_r} = 5(\frac{4}{5}\hat{x} - \frac{3}{5}\hat{z}) = 4\hat{x} - 3\hat{z} \\
\vec{k_r} \cdot \vec{r} &= (4\hat{x} - 3\hat{z}) \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = 4x - 3z \\
\vec{E_r} &= E_{i0}\Gamma_\perp \cos(\omega t - (4x - 3z))\hat{y} = E_{i0}\Gamma_\perp \cos(\omega t - 4x + 3z)\hat{y} \qquad V/m
\end{aligned}$$

Falta calcular $\Gamma_\perp$ *para lo cual necesitamos* η_2 *y* θ_t*:*

- $\eta_2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{2'5}} = 238'4\Omega$
- *Para* θ_t *usamos la relación:*

$$\gamma_1 \sin\theta_i = \gamma_2 \sin\theta_t \Rightarrow j\beta_1 \sin\theta_i = j\beta_2 \sin\theta_t$$

ya que en nuestro caso el medio no presenta pérdidas y entonces $\gamma_2 = j\beta_2$

$$\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sin\theta_i = \sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_r}\sin\theta_t \Rightarrow \sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{4/5}{\sqrt{2'5}} = 4'39^o$$

El $\sin\theta_i$ *se ha obtenido fácilmente a partir de la dirección de la onda incidente,* $\vec{k_i}$

c) *El campo magnético transmitido tiene lugar en el medio 2 y es necesario calcular su vector* $\vec{k_t}$ *para lo cual es necesario el ángulo de transmisión* θ_t*, calculado en el apartado anterior. Su módulo, que depende de las características de este medio, es:*

$$|\vec{k_t}| = \frac{\omega}{v_f} = \frac{w\sqrt{\epsilon_r}}{c_0} = \frac{15 \cdot 10^8 \sqrt{2'5}}{3 \cdot 10^8} = 5\sqrt{2'5}$$

y entonces las componentes de $\vec{k_t}$*:*

$$\begin{aligned} k_{1x} =& |\vec{k_2}| \sin \theta_t = 4 \qquad rad \\ k_{2y} =& |\vec{k_2}| \cos \theta_t = 6'28 \qquad rad \end{aligned}$$

Ya se tienen todos los datos para escribir la expresión del campo magnético en función de las coordenadas espaciales y el tiempo:

$$\vec{\mathbb{H}}_t = \frac{E_{i0} \cdot \tau}{\eta_2} \exp\left(-j(x \operatorname{sen} \theta_t + z \cos \theta_t)\right)(-\hat{x} \cos \theta_t + \hat{z} \sin \theta_t) =$$

$$\frac{8 \cdot (0'611)}{238'4} \exp -j(4x + 6'82z)(\hat{x}\, 0'8626 + \hat{z}\frac{4}{5\sqrt{2'5}})$$

$$\vec{H}_t(x,y,z,t) = (-17'7\hat{x} + 10'37\hat{z}) \cos(15 \cdot 10^8 t - 4x - 6'827z) \qquad mA/m$$

En donde se ha utilizado la relación que liga los coeficientes de reflexión ($\Gamma_\perp$) *y transmisión* ($\tau_\perp$)*:*
$\tau_\perp = 1 - |\Gamma_\perp|$