

HOJA 2 DE PROBLEMAS

1. Sea $\mu(X) = 1$ y f y g dos funciones positivas y medibles con $f(x)g(x) \geq 1$ c.t.p.. Usar la desigualdad de Hölder para probar

$$1 \leq \left(\int_X f d\mu \right) \left(\int_X g d\mu \right).$$

2. Probar por inducción la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder: dados $1 < p_1, p_2, \dots, p_n < \infty$ con $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$ y $f_i \in L^{p_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, se cumple

$$\left| \int_X f_1 f_2 \dots f_n d\mu \right| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \dots \|f_n\|_{p_n}.$$

3. Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados. Si $f_n \rightarrow f$ en la norma de $L^p(\mu)$ y $g_n \rightarrow g$ en la norma de $L^q(\mu)$, demostrar que $f_n g_n \rightarrow f g$ en la norma de $L^1(\mu)$.
4. Usar la desigualdad de Hölder para probar:

$$\int_0^\pi x^{-1/3} \text{sen } x dx < 3.$$

5. a) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{p < r < \infty} L^r \setminus L^p$.
 b) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{0 < r < p} L^r \setminus L^p$.

Indicación: intentar con funciones de la forma $f(x) = x^{-1/p}$ en espacios de medida apropiados.

6. a) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in L^p \setminus \bigcup_{p < r < \infty} L^r$.
 b) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in L^p \setminus \bigcup_{0 < r < p} L^r$.

Indicación: intentar con funciones de la forma $f(x) = x^{-1/p} |\log x|^{-2/p}$ en espacios de medida apropiados.

7. a) Encontrar un espacio de medida y una función $f \in L^p \setminus \bigcup_{r \neq p} L^r$
 b) Probar que en todo espacio de medida (Ω, μ) no es posible encontrar funciones en $\bigcap_{r \neq p} L^r \setminus L^p$
 c) Probar de hecho que si $r_1 < p < r_2$ se tiene $L^{r_1} \cap L^{r_2} \subset L^p$
8. a) Suponiendo $\mu(X) = 1$ y $f \in L^\infty(\mu)$, demostrar que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



b) $\{f_n(x)\}_n$ es una sucesión no convergente para todo $x \in [0, 1]$.

10. Supongamos que $f_n \in L^p, n = 1, 2, 3, \dots$ y $f_n \rightarrow f$ en norma L^p y $f_n \rightarrow g$ puntualmente a.e. ¿Qué relación existe entre f y g ?
11. En $[0, 1)$ se consideran los intervalos diádicos $I_{j,k} = [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})$ con $j = 1, 2, \dots, 2^k, k \in \mathbb{N}$. Si $f \in L^p((0, 1)), 1 \leq p < \infty$, y

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{2^k} \left(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(y) dy \right) \chi_{I_{j,k}}(x),$$

demostrar:

- a) $\|f_k\|_p \leq \|f\|_p$.
- b) Si $f \in C_c((0, 1))$, $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.
- c) Si $f \in L^p((0, 1))$, $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ (Usar que $C_c((0, 1))$ es denso en $L^p((0, 1))$).

12. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

para todo $x, y \in I$. Demostrar que f es convexa en I . Indicación: todo $\lambda \in (0, 1)$ puede aproximarse por números de la forma $\frac{m}{2^n}$ con $0 \leq m < 2^n, n \in \mathbb{N}$.

13. Sea $c_0(\mathbb{N})$ el espacio de sucesiones $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. Demostrar que si $0 < p < \infty$ se cumple que $\ell^p(\mathbb{N})$ es un subespacio denso de $c_0(\mathbb{N})$, dotado éste con la norma $\|\cdot\|_{\infty}$.
14. Supongamos que $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos con la propiedad de que

$$\sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n : \|b\|_2 = 1 \right\} = S < \infty$$

Demostrar que $a \in \ell^2$ y $\|a\|_2 = S$.

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, blue, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The logo is set against a light blue background with a white starburst effect behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70