

HOJA 2 DE PROBLEMAS

1. Sea  $\mu(X) = 1$  y  $f$  y  $g$  dos funciones positivas y medibles con  $f(x)g(x) \geq 1$  c.t.p.. Usar la desigualdad de Hölder para probar

$$1 \leq \left( \int_X f d\mu \right) \left( \int_X g d\mu \right).$$

2. Probar por inducción la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder: dados  $1 < p_1, p_2, \dots, p_n < \infty$  con  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$  y  $f_i \in L^{p_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , se cumple

$$\left| \int_X f_1 f_2 \dots f_n d\mu \right| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \dots \|f_n\|_{p_n}.$$

3. Sean  $1 \leq p, q \leq \infty$  exponentes conjugados. Si  $f_n \rightarrow f$  en la norma de  $L^p(\mu)$  y  $g_n \rightarrow g$  en la norma de  $L^q(\mu)$ , demostrar que  $f_n g_n \rightarrow f g$  en la norma de  $L^1(\mu)$ .

4. Usar la desigualdad de Hölder para probar:

$$\int_0^\pi x^{-1/3} \sin x dx < 3.$$

5. a) Encontrar un espacio de medida  $(X, \mu)$  y una función  $f \in \bigcap_{p < r < \infty} L^r \setminus L^p$ .  
 b) Encontrar un espacio de medida  $(X, \mu)$  y una función  $f \in \bigcap_{0 < r < p} L^r \setminus L^p$ .

Indicación: intentar con funciones de la forma  $f(x) = x^{-1/p}$  en espacios de medida apropiados.

6. a) Encontrar un espacio de medida  $(X, \mu)$  y una función  $f \in L^p \setminus \bigcup_{p < r < \infty} L^r$ .  
 b) Encontrar un espacio de medida  $(X, \mu)$  y una función  $f \in L^p \setminus \bigcup_{0 < r < p} L^r$ .

Indicación: intentar con funciones de la forma  $f(x) = x^{-1/p} |\log x|^{-2/p}$  en espacios de medida apropiados.

7. a) Encontrar un espacio de medida y una función  $f \in L^p \setminus \bigcup_{r \neq p} L^r$

b) Probar que en todo espacio de medida  $(\Omega, \mu)$  no es posible encontrar funciones en  $\bigcap_{r \neq p} L^r \setminus L^p$

c) Probar de hecho que si  $r_1 < p < r_2$  se tiene  $L^{r_1} \cap L^{r_2} \subset L^p$

8. a) Suponiendo  $\mu(X) = 1$  y  $f \in L^\infty(\mu)$ , demostrar que  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



b)  $\{f_n(x)\}_n$  es una sucesión no convergente para todo  $x \in [0, 1]$ .

10. Supongamos que  $f_n \in L^p, n = 1, 2, 3, \dots$  y  $f_n \rightarrow f$  en norma  $L^p$  y  $f_n \rightarrow g$  puntualmente a.e. ¿Qué relación existe entre  $f$  y  $g$ ?
11. En  $[0, 1)$  se consideran los intervalos diádicos  $I_{j,k} = [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})$  con  $j = 1, 2, \dots, 2^k, k \in \mathbb{N}$ . Si  $f \in L^p((0, 1)), 1 \leq p < \infty$ , y

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{2^k} \left( \frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(y) dy \right) \chi_{I_{j,k}}(x),$$

demostrar:

a)  $\|f_k\|_p \leq \|f\|_p$ .

b) Si  $f \in C_c((0, 1))$ ,  $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

c) Si  $f \in L^p((0, 1))$ ,  $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  (Usar que  $C_c((0, 1))$  es denso en  $L^p((0, 1))$ ).

12. Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

para todo  $x, y \in I$ . Demostrar que  $f$  es convexa en  $I$ . Indicación: todo  $\lambda \in (0, 1)$  puede aproximarse por números de la forma  $\frac{m}{2^n}$  con  $0 \leq m < 2^n, n \in \mathbb{N}$ .

13. Sea  $c_0(\mathbb{N})$  el espacio de sucesiones  $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ . Demostrar que si  $0 < p < \infty$  se cumple que  $\ell^p(\mathbb{N})$  es un subespacio denso de  $c_0(\mathbb{N})$ , dotado éste con la norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ .
14. Supongamos que  $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de números reales positivos con la propiedad de que

$$\sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n : \|b\|_2 = 1 \right\} = S < \infty$$

Demostrar que  $a \in \ell^2$  y  $\|a\|_2 = S$ .

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, blue, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70