VARIABLE REAL. 4º DE MATEMATICAS *Curso 2021/22*

HOJA 3 DE PROBLEMAS

1. Sean p y q exponentes conjugados con $1 \le p < \infty$. Si $f \in L^p(X,\mu)$, demostrar que
$$\|f\|_p = \text{máx}\left\{ \left| \int_X f\,\bar{g}\,d\mu \right| : \|g\|_q = 1 \right\}$$
(Indicación: para demostrar $\ge$ usar la desigualdad de Hölder; para probar $\le$ tomar $g_0(x) = |f(x)|^{p-2} f(x)/\|f\|_p^{p-1}$ cuando sea posible y $g_0(x) = 0$ si $f(x) = 0$.)

2. Sea $h = \chi_{(0,1)}$
   a) Calcular y dibujar $h * h$.
   b) Calcular y dibujar $h * h * h$.

3. (**Forma general de la desigualdad de Young**) Sean $1 \le p, q, r \le \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Demostrar que si $f \in L^p$ y $g \in L^q$ se cumple que $f * g \in L^r$ y
$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q\,.$$
(Indicacion: observar que $(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) + (\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} = 1$ y usar la desigualdad de Hölder para probar que
$$|f * g(x)| \le \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}} \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}} \left(\int |f(y)|^p\,|g(x-y)|^q\,dy \right)^{1/r} ;$$
después usar el teorema de Fubini para acotar $\|f * g\|_r$.)

4. Dado $h \in \mathbb{R}$, definimos para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\tau_h f(x) = f(x-h)$
   a) Demostrar que τ_h es un isomorfismo isométrico en $L^p(\mathbb{R})$.
   b) Probar $\text{lím}_{h\to 0} ||\tau_h f - f||_p = 0$, $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \ne \infty$; (usar la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$).

5. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable de integral 1. Definimos para $r > 0$ las funciones $\phi_r(x) = \frac{1}{r}\phi(\frac{x}{r})$ y $\phi^r(x) = r\phi(rx)$. Probar que $\{\phi_r\}_{0<r<1}$ es un núcleo de sumabilidad para $r \to 0^+$ y que $\{\phi^r\}_{1<r<\infty}$ es un núcleo de sumabilidad para $r \to \infty$.

6. Sea $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continua y } \text{lím}_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0\}$.
   a) Demostrar que $C_c(\mathbb{R})$ es denso en $C_0(\mathbb{R})$ con la topología de $\| \ \|_\infty$.
   b) Demostrar que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $C_0(\mathbb{R})$ con la topología de $\| \ \|_\infty$. (Indicación: usar el apartado (a) y el teorema de regularización de funciones mediantes convoluciones)

7. Sean A y B dos espacios vectoriales normados y $T : A \to B$ un operador lineal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) T es Lipschitz, es decir, existe $C < \infty$ tal que $\|Tx - Ty\|_B \le C\|x - y\|_A$ para todo $x, y \in A$.
   b) T es continuo para todo $x \in A$.
   c) T es continuo en $x = 0 \in A$.
   d) T es acotado, es decir, existe $C < \infty$ tal que $\|Tx\|_B \le C\|x\|_A$ para todo $x \in A$.

8. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ medible. Se llama **función de distribución** de f a la función $\sigma_f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por

$$\sigma_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})\,.$$

   a) Describir y dibujar la función de distribución de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f = 5\chi_{(-3,-2)} + 2\chi_{(0,2)} - 3\chi_{(4,7)}$$

   b) Demostrar que $\|f\|_{L^1(X,\mu)} = \|\sigma_f\|_{L^1(0,\infty)}$.

9. (**Desigualdad integral de Minkowski**) Sean $(X,\ \mu)$ e $(Y,\ \nu)$ dos espacios de medida y $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ una función medible. Si $1 \le p \le \infty$, $f(\cdot\,,y) \in L^p(X,\mu)$ c.t. $y \in Y$ y la función $y \to \|f(\cdot\,,y)\|_p$ pertenece a $L^1(Y,\nu)$, demostrar que se cumple:

$$\Big\| \int_Y f(\cdot, y)\, d\nu(y) \Big\|_{L^p(X,\mu)} \le \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p(X,\mu)}\, d\nu(y)\,.$$

   (NOTA: esta desigualdad se puede leer de la siguiente manera: la norma de una integral es menor o igual que la integral de las normas)

   (Indicación: usar el ejercicio 1 y la desigualdad de Hölder)