HOJA 4 DE PROBLEMAS

1. *a)* La expresión $< f,g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$ define un producto escalar en $C([0,1])$. Demostrar que $C([0,1])$ con este producto escalar **no** es un espacio de Hilbert.

   b) La expresión $< f,g >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ define un producto escalar en $C_c(\mathbb{R})$. Demostrar que $C_c(\mathbb{R})$ con este producto escalar **no** es un espacio de Hilbert.

2. Demostrar que en un espacio pre-Hilbert $(\mathbb{H}, < \ , \ >)$ si $\|x\| = \|y\| = 1$ y $x \neq y$, se cumple $\|x+y\| < 2$. (Indicación: usar la regla del paralelogramo.)

3. Demostrar que en un espacio pre-Hilbert se cumple la **identidad de polarización**:

$$< x,y >= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right] .$$

4. Si $(\mathbb{H}, < \ , \ >)$ es un espacio pre-Hilbert, demostrar que para todo $x \in \mathbb{H}$ se cumple

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} | < x,y > | .$$

5. *a)* Demostrar que la norma $\|f\|_\infty$ definida en $L^\infty([0,1])$ no puede provenir de un producto escalar.

   b) Demostar que $L^2([0,1])$ es el único espacio de Hilbert de entre todos los espacios $L^p([0,1]),\ 0 < p < \infty$.
   (Indicación: probar que no se cumple la ley del paralelogramo)

6. Sea $(\mathbb{H}, < \ , \ >)$ un espacio de Hilbert.

   a) Si $E \subset \mathbb{H}$, demostrar que $E^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{H}$.

   b) Si M is un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{H}$, demostar que $(M^\perp)^\perp = M$.

   c) Sea $\mathcal{U} = \{u_\alpha\}_\alpha$ un sistema ortonormal **no** finito. Demostrar que $\mathcal{U}$ es un conjunto cerrado y acotado, pero no compacto.

   d) Si $x_0 \in \mathbb{H}$ y M es un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{H}$, demostar que

$$\min\,\{\|x_0 - x\| : x \in M\} = \max\,\{\, | < x_0, y > | : \ y \in M^\perp \ , \ \|y\| = 1\} .$$

   e) Sea $L : H \to \mathbb{C}$ lineal y continua, no identicamente nula. Probar que $(Ker\, L)^\perp$ es un espacio vectorial de dimensión 1.

7. a) Calcular min $\{\int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2\,dx \ : \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$. (Indicación: usar una base ortonormal de los polinomios de grado 2 en $L^2([-1,1])$.)

   b) Encontrar

$$\text{máx}\left\{\left|\int_{-1}^1 x^3 g(x)dx\right| \ : \int_{-1}^1 |g(x)|^2 dx = 1, \quad \int_{-1}^1 g(x)dx = \int_{-1}^1 xg(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 g(x)dx = 0\right\}$$

   Indicación: Usar la parte a) anterior y el ejercicio 6 d).