

# Curso de Variable Real

Universidad Autónoma de Madrid



Figura 1: JB Joseph Fourier

Curso 2019/2020  
Fernando Soria

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized 'C' or a wave. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

# Índice general

<b>1. Introducción: Breve incursión en la teoría de la medida</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones básicas . . . . .	1
1.2. Teoremas importantes . . . . .	2
1.3. Conjuntos de medida 0 . . . . .	5
<b>2. Técnicas de espacios <math>L^p</math></b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Escala de espacios $L^p$ . . . . .	14
2.3. Espacios de sucesiones $\ell^p$ . . . . .	14
2.4. Escala de los espacios $\ell^p$ . . . . .	15
2.5. Espacio de sucesiones $\mathcal{C}_0$ . . . . .	16
2.6. Desigualdad de Jensen . . . . .	16
2.7. Aproximación por funciones continuas en $L^p$ . . . . .	17
<b>3. El problema de la convergencia</b>	<b>21</b>
3.1. Algunos ejemplos que involucran procesos de convergencia . . . . .	22
3.1.1. La ecuación de Laplace en el disco unidad . . . . .	22
3.1.2. Núcleos de sumabilidad . . . . .	25
3.2. El teorema de diferenciación de Lebesgue . . . . .	28
<b>4. Espacios de Hilbert</b>	<b>35</b>
4.1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz . . . . .	36
4.2. Dual topológico de un espacio de Banach . . . . .	40
4.3. Sistemas ortonormales . . . . .	41
4.4. Coeficientes de Fourier y la desigualdad de Bessel . . . . .	42
4.5. Sistemas ortonormales completos . . . . .	44
<b>5. Series de Fourier</b>	<b>47</b>



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

<b>6. Transformada de Fourier en <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>59</b>
6.1. Definiciones . . . . .	59
6.2. La clase de Schwartz . . . . .	60
6.3. Relación entre la transformada de Fourier y la derivación . . . . .	62
6.4. Teorema de inversión de la transformada de Fourier . . . . .	63
6.5. Extensión a $L^2$ de la transformada de Fourier . . . . .	65
6.6. La Transformada de Fourier y las ecuaciones “elementales” de la Física . . .	66
6.6.1. La ecuación del calor . . . . .	67
6.6.2. La ecuación de Laplace . . . . .	68
<b>7. Las ecuaciones “elementales” de la Física</b>	<b>71</b>
7.1. La ecuación del calor . . . . .	71
7.2. La ecuación de Laplace . . . . .	74
7.3. La ecuación de ondas . . . . .	77
7.4. La ecuación de Schrödinger . . . . .	79



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Capítulo 1

## Introducción: Breve incursión en la teoría de la medida

En este capítulo hacemos un breve repaso sobre la teoría de la medida, una herramienta que será de capital importancia importante a lo largo del curso.

### 1.1. Definiciones básicas

**DEFINICIÓN 1.1** Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ . Se dice que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra en  $X$  si

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
2.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ .
3.  $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

**DEFINICIÓN 1.2** Dado  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra en  $X$ , se dice que  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida (positiva) si

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2.  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  para toda familia disjunta  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ .

Únicamente consideraremos dos medidas a lo largo de este curso:

- la medida de Lebesgue.
- la medida de contar en  $\mathbb{N}$  o en  $\mathbb{Z}$ .

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font with a light blue shadow effect. The '99' is larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The logo is set against a light blue and orange background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

En lo que resta de capítulo daremos por sentado que estamos trabajando en un espacio de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ya fijado.

**DEFINICIÓN 1.4** Decimos que una función  $f : X \mapsto \mathbb{C}$  es medible si  $\forall A \subset \mathbb{C}$  abierto, se tiene que  $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ .

**DEFINICIÓN 1.5**  $s : X \rightarrow \mathbb{C}$  es una función simple si

$$s(x) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}(x),$$

con  $E_j \in \mathcal{A}$  y  $c_j \in \mathbb{C}$ .

**DEFINICIÓN 1.6** Sea  $s(x) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}(x)$  una función simple y bien  $\mu(E_j) < \infty$  para todo  $j$  o bien  $\mu(E_j) \leq \infty$  y  $c_j \geq 0$  para todo  $j$ . Entonces definimos su integral como

$$\int_X s d\mu = \sum_{j=1}^n c_j \mu(E_j).$$

**DEFINICIÓN 1.7** Sea  $f : X \mapsto \mathbb{C}$  una función medible. Definimos su integral  $\int_X f d\mu$  como sigue:

1. Sea  $f \geq 0$ , entonces  $\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu, \text{ con } s \text{ función simple y } 0 \leq s \leq f \right\}$ .
2. Sea  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  (a valores reales), escribimos  $f = f^+ - f^-$ . Si  $\int_X f^+ < \infty$  y  $\int_X f^- < \infty$ , entonces  $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$ .
3. Sea  $f : X \mapsto \mathbb{C}$ , (a valores complejos), escribimos  $f = u + i v$ , con  $u, v$  funciones reales. Entonces  $\int_X f = \int_X u + i \int_X v$ .

## 1.2. Teoremas importantes

Enunciaremos aquí los tres teoremas más importantes de Teoría de la Medida: *Teorema de la Convergencia Monótona*, *Lema de Fatou* y *Teorema de la Convergencia Dominada*.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Es importante observar que no se pide en las hipótesis que  $\int_X f < \infty$ , pero en ese caso también se cumple el teorema.

**LEMA 1.2 (Lema de Fatou)** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles y positivas. Entonces se cumple que

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n.$$

**TEOREMA 1.3 (Convergencia Dominada)** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles tal que  $\exists$  una función  $F$  con  $\int_X F < \infty$  tal que  $|f_n(x)| \leq F(x) \forall x, n$  y supongamos que hay convergencia puntual, es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Entonces se tiene que

$$\int_X f = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n.$$

De hecho se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - f_n| = 0,$$

que es una condición mas fuerte que la anterior.

**Observación:** Estos resultados no se cumplen si consideramos la integral de Riemann (la de “toda la vida”). Por ejemplo, consideramos la **función de Dirichlet** en  $[0, 1]$

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(\pi m! x))^{2n} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si hacemos  $f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(\pi m! x))^{2n} = \begin{cases} 1, & x = \frac{p}{q}, \text{ con } q|m! \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$ , entonces

- $f_m$  tiene un numero finito de discontinuidades.
- $f_m(x) \nearrow f(x)$  y  $|f_m(x)| \leq \chi_{[0,1]}$ .

pero resulta que  $f$  no es integrable Riemann.

**Ejercicio 1.1** Si  $s$  es una función simple y  $\geq 0$ , probar que

$$\nu(A) = \int_A s d\mu$$

es una medida sobre  $\mathcal{A}$ .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

**DEFINICIÓN 1.8** Dado un espacio de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , definimos la clase

$$\mathcal{L} = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles tales que } \int_X |f| d\mu < \infty \right\}$$

de las funciones integrables.

Se verifica entonces que  $\mathcal{L}$  es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalares habituales.

**LEMA 1.4** Sea  $\{f_n\} \subset \mathcal{L}$  y supongamos que  $\exists F \in \mathcal{L}$  con  $F \geq 0$  y  $|f_n(x)| \leq F(x) \forall x$  y que existe el límite puntual, es decir,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Entonces se tiene que  $f \in \mathcal{L}$  y

$$\int_X |f - f_n| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**DEFINICIÓN 1.9** Se dice que  $f_n \rightarrow f$  en la norma de  $\mathcal{L}$  si  $\lim \int_X |f_n - f| = 0$ .

El T.C.D. dice que si  $f_n \rightarrow f$  puntualmente y de forma “dominada”, entonces  $f_n \rightarrow f$  en norma.

**COROLARIO 1.5 (T.C.M.)** Si  $\{g_n\}$  es una familia de funciones medibles y  $\geq 0$ , entonces se cumple que

$$\int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_X g_n d\mu \right).$$

*Demostración* Este resultado se consigue aplicando el T.C.M. a la sucesión  $G_N = \sum_{n=1}^N g_n$ . Para mas detalles, consultar la Notas de *Teoría de la Medida*.

**Notas:**

- Si  $\{f_n\}$  son medibles, entonces  $\sup f_n$  y  $\inf f_n$  también lo son y entonces  $\limsup f_n$  y  $\liminf f_n$  también.
- Cuando existe el  $\lim f_n$ , también es medible.

En el T.C.D. la hipótesis de dominación es fundamental. Veamos que pasa si la suprimimos.

**Ejemplo:** Sean  $f_n(x) = n \chi_{(0, \frac{1}{n})}(x)$ . Entonces,  $\lim f_n(x) = 0$ , pero  $\int_X f_n = 1 \neq \int_X f = 0$ .

$\{f_n\}$  es un ejemplo de lo que denominaremos **núcleo de sumabilidad** o aproximación

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

### 1.3. Conjuntos de medida 0

**DEFINICIÓN 1.10** Se dice que una propiedad  $\mathcal{P}$  se cumple en casi todo punto (c.t.p. o a.e.) si  $\{x \in X : x \text{ no cumple } \mathcal{P}\}$  tiene medida 0.

**Ejemplo:** En  $(\mathbb{R}, dx)$ , la función

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(\pi m! x))^{2n} = 0 \text{ c.t.p.}$$

**LEMA 1.6** Si  $f = 0$  c.t.p., entonces  $\int_X f = 0$ .

**LEMA 1.7** Si  $f = g$  c.t.p., entonces  $\int_X f = \int_X g$ . De hecho se cumple que  $\int_X |f - g| = 0$  (es una condición mas fuerte, ya que  $|\int_X f - \int_X g| \leq \int_X |f - g|$ ).

**Ejercicio 1.3**  $f : X \mapsto \mathbb{C}$  con  $f \in \mathcal{L}$ . Probar que si  $\int_A f = 0$ , para todo  $A \in \mathcal{A}$ , entonces  $f = 0$  c.t.p..

Con esto queda terminado el repaso de  $T^a$  de la Medida. Para mas profundidad, consultar los apuntes del curso 2017/2018, disponibles en Moodle.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized 'C' or a wave. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

## Capítulo 2

# Técnicas de espacios $L^p$

### 2.1. Introducción

Dado un espacio de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  y el conjunto  $\mathcal{L}$  de funciones integrables definido en el capítulo anterior, queremos darle estructura de espacio vectorial métrico (con ello daremos sentido topológico a los teoremas de convergencia). Mejor aun, queremos dar una norma.

**DEFINICIÓN 2.1** En un espacio vectorial  $Y$ , una norma es una aplicación  $\| \cdot \| : Y \mapsto [0, \infty)$  que cumple:

1.  $\|y\| \geq 0$ , con  $\|y\| = 0 \Leftrightarrow y = 0$ .
2.  $\|\alpha y\| = |\alpha| \|y\|$  para todos  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $y \in Y$ .
3.  $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$  (desigualdad triangular).

Diremos entonces que  $(Y, \| \cdot \|)$  es un espacio normado.

**LEMA 2.1** Todo espacio normado es un espacio métrico. La métrica viene dada por

$$d(y, y') = \|y - y'\|.$$

En  $\mathcal{L}$ , parece lógico definir la norma como

$$\|f\| = \int_X |f| d\mu.$$

Las condiciones 2 y 3 de la definición de norma se comprueban de manera muy sencilla. Nos concentramos en la condición 1:

- $\|f\| \geq 0$  ya que  $|f| \geq 0$ .

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**DEFINICIÓN 2.2** Se dice que  $f \mathcal{R} g \Leftrightarrow f = g$  c.t.p..

La relación  $\mathcal{R}$  es de equivalencia (pues cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva).

Consideramos ahora el conjunto cociente de las clases de equivalencia  $[\cdot]$

$$L^1 = L^1(d\mu) = \mathcal{L}/\mathcal{R} = \left\{ [f] : f : X \mapsto \mathbb{C} \text{ es medible y } \int_X |f| d\mu < \infty \right\}.$$

Definimos en  $L^1$  la integral como

$$\int_X [f] d\mu = \int_X f d\mu$$

que está bien definida, ya que  $g \in [f] \Leftrightarrow f = g$  c.t.p.  $\Rightarrow \int f = \int g$ .

Por abuso de notación, identificaremos cada clase de equivalencia  $[f]$  y su integral  $\int [f] d\mu$  con la de uno de sus elementos (pero tendremos que recordar que la función 0 es en realidad la función 0 en c.t.p.).

**DEFINICIÓN 2.3** En  $L^1$  se define el funcional

$$\|[f]\| = \|f\| = \int |f| d\mu.$$

**Nota:** como  $[f + g] = [f] + [g]$  y  $[\alpha f] = \alpha [f]$ ,  $L^1$  también tiene estructura de espacio vectorial.

**LEMA 2.2**  $(L^1, \|\cdot\|)$  es un espacio normado.

*Demostración* Que la definición de la norma es estable (no depende del representante) es una comprobación sencilla. Veamos el resto de las propiedades:

1.  $\|f\| \geq 0$  y  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$  c.t.p..
2.  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ .
3.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ . ■

**DEFINICIÓN 2.4** Con más generalidad, dado el espacio de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  y un nu-

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

**Nota:**  $L^p$  también es un espacio vectorial. Basta probar que  $\mathcal{L}^p$  es cerrado para las operaciones suma y producto por escalares.

*Demostración* Demostrar que es cerrado para la multiplicación es trivial. Aquí desarrollaremos la suma. Supongamos  $f, g \in \mathcal{L}^p$ . Entonces

$$\int |f + g|^p d\mu \leq 2^p \left( \int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu \right)$$

ya que

$$(a + b)^p \leq (2 \max(a, b))^p = 2^p \max(a^p, b^p) \leq 2^p (a^p + b^p)$$

■

**LEMA 2.3** Sea  $1 \leq p < \infty$ . Entonces  $(L^p, \| \cdot \|_p)$  es un espacio normado con la norma dada por

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Demostración* Veamos que se cumplen las propiedades de norma (las dos primeras son inmediatas):

1.  $\|f\|_p \geq 0$  y  $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$  c.t.p..
2.  $\|\alpha f\|_p = \left( \int |\alpha f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( |\alpha|^p \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|f\|_p$
3. Para la desigualdad triangular ya hemos visto que se tiene

$$\|f + g\|_p = \left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ 2^p \left( \int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu \right) \right]^{\frac{1}{p}},$$

pero de aquí nos es posible llegar a lo que queremos probar.

Para concluir la demostración, necesitamos la siguiente desigualdad de Hölder:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  y  $1 < p < \infty$ .

Con esta herramienta sí podemos probar la desigualdad triangular. Hacemos  $h = (f+g)^{p-1}$  y de esta forma se tiene que  $\int |h|^q = \int |f + g|^p$ . Entonces

$$\int |f + g|^p d\mu = \int |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Entonces llegamos a que

$$\left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{q}} = \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

**PROPOSICIÓN 2.4 (Desigualdad de Hölder)** Dado  $1 < p < \infty$ , definimos su exponente dual como  $q = \frac{p}{p-1}$ . Entonces, si  $p$  y  $q$  son duales y  $f \in L^p$  y  $g \in L^q$ , entonces se tiene que  $f \cdot g \in L^1$  y además

$$\|f \cdot g\|_{L^1} = \int |f \cdot g| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (2.1)$$

*Demostración* Para probar la desigualdad de Hölder usaremos la desigualdad numérica

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad (2.2)$$

cuando  $a, b > 0$ .

Sean  $F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p}$  y  $G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}$  (podemos suponer que las normas de  $f$  y  $g$  son  $\neq 0$ , porque en caso contrario no hay nada que probar). Entonces nuestro objetivo es demostrar que

$$\int \frac{|f \cdot g|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq 1$$

Usando 2.2 tenemos que

$$|F(x) \cdot G(x)| \leq \frac{1}{p} |F(x)|^p + \frac{1}{q} |G(x)|^q \quad \forall x,$$

con lo que

$$\int |F \cdot G| \leq \frac{1}{p} \int |F|^p + \frac{1}{q} \int |G|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

■

**Nota:** Para probar la desigualdad 2.2, fijamos  $a > 0$  y construimos la función auxiliar

$$\varphi(t) = at - \frac{1}{p} a^p - \frac{1}{q} t^q.$$

Es un sencillo ejercicio de cálculo comprobar que  $\varphi(t)$  alcanza su máximo en  $t_0 = a^{1/q-1}$  y que  $\varphi(t_0) = 0$ .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Definimos de manera similar

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / \mathcal{R} = \{[f] : f : X \mapsto \mathbb{C} \text{ medibles tales que } \exists C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p.}\}.$$

Entonces, se tiene que  $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio normado, siendo

$$\|f\|_\infty = \inf \{C < \infty : |f(x)| \leq C \text{ c.t.p.}\}.$$

**Nota:** Al valor  $\|f\|_\infty$  se le denomina el *supremo esencial* de la función  $f$ .

**Ejercicio 2.1** Probar que  $\|\cdot\|_\infty$  es en efecto una norma.

Observamos que también se cumple la desigualdad de Hölder, ya que si  $f \in L^1$  y  $g \in L^\infty$ , entonces  $|f \cdot g| \leq C|f|$  c.t.p.. Esto es porque 1 e  $\infty$  son “duales” ( $\frac{1}{1} + \frac{1}{\infty} = 1$ ).

**DEFINICIÓN 2.5** Un espacio normado se dice que es de Banach si además es completo.

**TEOREMA 2.5**  $(L^p, \|\cdot\|_p)$  es un espacio de Banach, para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Ejercicio 2.2** Probar el caso  $p = \infty$ .

*Demostración* Lo probaremos para  $1 \leq p < \infty$ . Usaremos que:

1. Si  $F : X \mapsto \mathbb{C}$  es  $\mu$ -medible y  $\int |F| d\mu < \infty$ , entonces  $|F| < \infty$  c.t.p.
2. En un espacio topológico, si  $\{y_n\}$  es una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente a  $y$ , entonces se tiene que  $\{y_n\}$  es también convergente con  $y_n \rightarrow y$ .

**Ejercicio 2.3** Probar la segunda afirmación.

Siguiendo con la demostración, sea  $\{f_n\}$  una sucesión de Cauchy en  $L^p$  (i.e.  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  t.q. si  $m, n > N$ , se tiene que  $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ ).

Tomando  $\epsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^k}$  podemos elegir una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  con la propiedad de que  $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$ .

Probaremos que esta subsucesión tiene límite y, por 2, ya habremos terminado.

$$\text{Sean } g_m(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^m |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)| \text{ y } g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|.$$

Entonces se tiene que  $g_m(x) \rightarrow g(x)$  y  $g \in L^p$  ya que (por el T.C.M. en  $L^p$ ).



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

La observación anterior 1 nos dice que  $0 \leq g < \infty$  c.t.p., es decir, que la serie  $f_{n_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k-1}})$  es absolutamente convergente en c.t.p. y, por tanto, es convergente. En particular, por la propiedad telescópica de la serie definida,

$$\begin{aligned} \exists f(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^m (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)) \right) \\ &= f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)) \quad \text{c.t.p. } x \end{aligned}$$

La función  $f$  es nuestra candidata a ser el límite de las  $f_{n_m}$  en  $L^p$ . Tenemos que probar:

- $f \in L^p$ .
- $\|f - f_{n_m}\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ .

Ambos resultados son consecuencia del T.C.D. porque

- $f_{n_m} \rightarrow f$  c.t.p. puntualmente,
- $|f_{n_m}|^p \leq g^p$ ,

y por tanto,  $\int |f_{n_m} - f|^p d\mu \rightarrow 0$ . ■

**Nota:** Para recalcar que  $L^p$  esta asociado al espacio de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  se utilizan las notaciones alternativas

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \quad \text{ó} \quad L^p(d\mu).$$

**Observación:** Se puede definir  $L^p(d\mu)$  también para  $p < 1$  de manera análoga a como lo hemos hecho antes

$$L^p = \left\{ f : X \mapsto \mathbb{C} \text{ medibles y } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\} / \mathcal{R}$$

pero en este caso  $\| \cdot \|$  no es una norma (no cumple la desigualdad triangular).

**Ejemplo:** Sean  $p = \frac{1}{2}$  y  $d\mu = dx$ . Sean  $f = \chi_{(0,1)}$  y  $g = \chi_{[1,2)} \Rightarrow f + g = \chi_{(0,2)}$ .

$$\|f + g\|_p = \left( \int |f + g|^{1/2} d\mu \right)^2 = \left( \int |\chi_{(0,2)}| d\mu \right)^2 = 4$$

pero

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1,$$

con lo que no se cumple la desigualdad.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

1.  $d(f, g) \geq 0$  y  $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$  c.t.p.
2.  $d(f, g) \leq \int (|f - h| + |h - g|)^p d\mu \leq \int (|f - h|^p + |h - g|^p) = d(f, h) + d(h, g)$

La ultima desigualdad se obtiene de que  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\varphi(x) = x^p$  es una función cóncava si  $0 < p \leq 1$ ,  $\varphi(0) = 0$ , y, por tanto, es subaditiva, es decir  $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ .

**Ejercicio 2.4** Probar la subaditividad de una función cóncava.

**TEOREMA 2.6** Los espacios  $L^p$  con  $0 < p < 1$  también son completos

*Demostración* Es idéntica al caso  $p > 1$  porque el argumento utilizado para probar que  $g(x) = |f_{n_1}| + \sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| \in L^p$  es la desigualdad triangular.

Para  $p < 1$  usamos que

$$\int |g|^p \leq \int |f_{n_1}|^p d\mu + \sum_{k=2}^{\infty} \int |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|^p d\mu$$

■

Para  $p \geq 1$ , la norma  $\|\cdot\|_p$  induce la métrica  $d(f, g) = \|f - g\|_p$ .

**DEFINICIÓN 2.6** Se dice que  $f_n \rightarrow f$  en la norma de  $L^p$  si  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ .

El caso  $p = \infty$ :

$$f_n \rightarrow f \text{ en } L^\infty \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

es equivalente a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tal que } |f_n - f| < \epsilon \text{ c.t.p. } \forall n > N$$

En particular

$$\lim f_n(x) = f(x) \text{ c.t.p.}$$

En general esto no es cierto si  $p < \infty$ :

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \not\Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ c.t.p.}$$

**Ejercicio 2.5** Encontrar el contraejemplo.

Sin embargo, una consecuencia de la demostración de la completitud es el siguiente resultado.

**COROLARIO 2.7** Sean  $1 < p < \infty$  y  $\{f_n\} \subset L^p$  convergente en la norma a cierta función  $f$ . Entonces  $\exists$  una subsecuencia  $\{f_{n_k}\}$  tal que  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  c.t.p.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

## 2.2. Escala de espacios $L^p$

**LEMA 2.8** Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de *medida finita* ( $\mu(X) < \infty$ ). Entonces si  $0 < p < r \leq \infty$  se tiene que

$$L^r(d\mu) \subset L^p(d\mu).$$

*Demostración* Lo que queremos ver es que si  $f \in L^r \Rightarrow f \in L^p$ , o lo que es lo mismo

$$\int_X |f|^r d\mu < \infty \Rightarrow \int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

El caso  $r = \infty$  es algo más directo:

$$\|f\|_\infty < \infty \Rightarrow \int |f|^p d\mu \leq \int (\|f\|_\infty)^p d\mu = (\|f\|_\infty)^p \mu(X) < \infty.$$

Si  $r < \infty$ , entonces, por la desigualdad de Hölder para los índices  $r/p > 1$  y su dual  $r/(r-p)$ ,

$$\begin{aligned} \int |f|^p d\mu &= \int |f|^p \cdot 1 d\mu \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \int [|f|^p]^{\frac{r}{p}} d\mu \right)^{\frac{p}{r}} \left( \int |1|^{\frac{r}{r-p}} d\mu \right)^{\frac{r-p}{r}} = (\|f\|_r)^p \mu(X)^{\frac{r-p}{r}} < \infty \end{aligned}$$

■

En la demostración de este lema vemos que podemos dar una cota para  $\|f\|_p$ .

**COROLARIO 2.9** Si  $\mu$  es una probabilidad y  $p < r < \infty$ , entonces  $\|f\|_p \leq \|f\|_r$ .

## 2.3. Espacios de sucesiones $\ell^p$

Consideramos el espacio de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , donde

- $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ,
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ,
- $\mu =$  medida de contar en  $X$ ,

junto con la noción de integral correspondiente:

$$\int |f|^p d\mu = \sum |f(x)|^p$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

**Observación:** El único conjunto de medida 0 es el  $\emptyset$ . Entonces la condición *c.t.p.* equivale a decir *t.p* (todo punto).

Como toda función  $f : X \mapsto \mathbb{C}$  se puede identificar con una sucesión  $\{a_n = f(n)\}$ , se tiene que

$$L^p(\mathbb{N}, d\mu) = \left\{ a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ tal que } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\},$$

$$L^p(\mathbb{Z}, d\mu) = \left\{ a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \text{ tal que } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}.$$

Y para  $p = \infty$

$$L^p(\mathbb{N}, d\mu) = \{ \text{sucesiones acotadas} \},$$

$$L^p(\mathbb{Z}, d\mu) = \{ \text{sucesiones acotadas} \}.$$

Denotaremos estos espacios por  $\ell^p$ , distinguiendo  $\ell^p(\mathbb{N})$  y  $\ell^p(\mathbb{Z})$ .

**PROPOSICIÓN 2.10** Si  $0 < p \leq \infty$ ,  $\ell^p$  es un espacio métrico completo. Y si  $1 \leq p \leq \infty$  entonces  $\ell^p$  es un espacio de Banach.

*Demostración* No hay que probar nada porque ya lo hemos hecho para el caso general. ■

Veamos ahora como queda la desigualdad de Hölder para los espacios  $\ell^p$ :

$$\sum |a_n b_n| \leq \left( \sum |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

## 2.4. Escala de los espacios $\ell^p$

Sea  $a = \{a_n\} \in \ell^p$  ( $\sum |a_n|^p < \infty$ ). Entonces  $\lim a_n = 0$ , y en particular la sucesión  $\{a_n\}$  esta acotada (es decir,  $a \in \ell^\infty$ ). Esto prueba directamente el siguiente

**LEMA 2.11**  $\ell^p \subset \ell^\infty$  para todo  $p \in (0, \infty)$ .

Además se tiene

**PROPOSICIÓN 2.12** Si  $0 < p < r \leq \infty$ , entonces  $\ell^p \subset \ell^r$ .

Aunque parezca lo contrario esto no contradice el [lema 2.8](#), ya que la medida que consideramos no es finita.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$\sum_n \left(\frac{|a_n|}{m}\right)^r = \sum_n |c_n|^r \stackrel{\substack{\leq \\ |c_n| \leq 1 \Rightarrow (c_n)^r \leq (c_n)^p}}{\leq} \sum_n |c_n|^p = \sum_n \left(\frac{|a_n|}{m}\right)^p = \frac{m^p}{m^p} = 1.$$

Esto nos dice que  $\sum |a_n|^r \leq m^r$  y por tanto  $\|a\|_r \leq m$ . ■

## 2.5. Espacio de sucesiones $\mathcal{C}_0$

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ a = \{a_n\} \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}.$$

**LEMA 2.13**  $\ell^p \subset \mathcal{C}_0 \subset \ell^\infty$ , si  $p < \infty$ .

*Demostración* Este resultado es consecuencia del hecho de que si una sucesión tiene límite, entonces esta acotada. ■

**Ejercicio 2.6** Probar que  $\mathcal{C}_0$  es un subespacio cerrado de  $\ell^\infty$ , es decir

- $\mathcal{C}_0$  es un espacio vectorial.
- es normado y completo (con respecto a la norma del supremo:  $\|a\|_\infty = \sup\{|a_n|\}$ ).

## 2.6. Desigualdad de Jensen

En esta sección estudiamos una desigualdad que generaliza la ya vista de Hölder. Primero damos la siguiente

**DEFINICIÓN 2.7** Se dice que  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si  $\forall u, v \in [a, b]$  con  $a \leq u < v \leq b$  y  $\forall t \in [0, 1]$  se tiene que  $\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v)$ .

**Ejercicio 2.7** Probar que si  $\varphi$  es convexa e un intervalo abierto, entonces es continua en dicho intervalo.

**PROPOSICIÓN 2.14 (Desigualdad de Jensen)** Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de probabilidad y  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Entonces dada una función  $f : X \rightarrow [a, b]$  medible, se tiene que

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f d\mu.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

De la definición se deduce que una función  $\varphi$  es convexa en un intervalo  $\Leftrightarrow$  para toda terna de puntos  $x < y < z$  de su dominio,  $\varphi(y)$  esta por debajo del segmento que une los puntos  $(x, \varphi(x))$  y  $(z, \varphi(z))$ .

**Ejercicio 2.8** Probar que  $\varphi$  es convexa  $\Leftrightarrow \forall a < s_0 < b$  existe una recta que pasa por el punto  $(s_0, \varphi(s_0))$  que queda por debajo de la gráfica.

Procedemos ahora a probar la desigualdad de Jensen.

*Demostración* Sea  $s_0 = \int f d\mu$ . Por ser convexa la función  $\varphi$ ,  $\exists m \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(s) \geq \varphi(s_0) + m(s - s_0)$ . Tomando  $s = f(x)$ , queda que  $\varphi(f(x)) \geq \varphi(s_0) + m(f(x) - s_0), \forall x \in X$ . Integrandos tenemos

$$\int \varphi(f(x)) d\mu \geq \varphi(s_0) + m \left( \int f(x) d\mu - s_0 \right) = \varphi(s_0).$$

■

**Ejemplos:**

- $\exp \left( \int_0^1 f(x) dx \right) \leq \int_0^1 \exp(f(x)) dx$ , con  $\varphi(x) = \exp(x) = e^x$  y  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $[0, 1]$ .
- $\left( \int_0^\infty |f(x)| e^{-x} dx \right)^2 \leq \int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-x} dx$ , con  $X = (0, \infty)$  y  $d\mu = e^{-x} dx$ .
- Otra demostración del lema 2.8:  
Si  $f \in L^r$  y  $p < r$  entonces la función  $\varphi(t) = t^{r/p}$  es convexa y se tiene

$$\int_X |f|^p d\mu = \mu(X) \left[ \int |f|^p \frac{d\mu(x)}{\mu(X)} \right]^{\frac{r}{p} \cdot \frac{p}{r}} \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} \mu(X) \left[ \int |f|^r \frac{d\mu(x)}{\mu(X)} \right]^{\frac{p}{r}} < \infty,$$

etc.

## 2.7. Aproximación por funciones continuas en $L^p$

**Nota:** A lo largo de esta sección, trabajaremos en el espacio de medida  $(\mathbb{R}, dx)$ , siendo  $dx$  la medida de Lebesgue.

**TEOREMA 2.15** Dados  $0 < p < \infty$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}, dx)$  y  $\epsilon > 0$ , existe una función  $g \in C_c$  (la clase de las funciones continuas con soporte compacto) tal que  $\|f - g\|_p < \epsilon$ .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



1.  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}, dx)$  porque si  $g \in \mathcal{C}_c$ , entonces  $g$  esta acotada ( $|g| \leq M$ ) para todo  $x$ . Si además  $\text{supp } g = K$  compacto, entonces  $\mu(K) < \infty$  y se tiene  $|g(x)| \leq M \chi_K(x) \in L^p(\mathbb{R}, dx)$ .
2. El caso  $p = \infty$  es falso.

Antes de dar la demostración, enunciemos un resultado que emplearemos en ella.

**LEMA 2.16** *Dados  $V$  abierto y  $K$  compacto, con  $K \subset V$ ,  $\exists$  una función  $g \in \mathcal{C}_c$  tal que  $\chi_K(x) \leq g(x) \leq \chi_V(x)$ .*

Procedemos ahora a dar la demostración del teorema anterior. Desarrollaremos la prueba en varios pasos.

Paso I: las funciones simples forman una clase densa en  $L^p$ .

Para ello, podemos suponer que  $f \geq 0$  porque si  $f = u + iv$  con  $u$  y  $v$  reales, entonces  $f = (u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)$  y basta resolverlo para cada una de las funciones  $u_-, u_+, v_-, v_+$ .

$f \geq 0 \Rightarrow \exists$  una sucesión de funciones simples  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \rightarrow f$ . Entonces  $f(x) - s_n(x) \rightarrow 0$  decreciendo  $\Rightarrow (f - s_n)^p \searrow_{n \rightarrow \infty} 0$ .

Por monotonía, teniendo en cuenta que  $\int |f|^p < \infty$ , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - s_n|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|f - s_n\|_p)^p = 0.$$

Paso II: basta probar que  $\forall A$  medible Lebesgue con  $\mu(A) < \infty$  y  $\forall \epsilon > 0$ , existe  $g \in \mathcal{C}_c$  tal que  $\|\chi_A - g\|_p < \epsilon$ , porque si eso es así, dada  $s = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{A_j}$  simple y  $\epsilon' > 0$ , entonces existe  $g_j \in \mathcal{C}_c$  tal que  $\|\chi_{A_j} - g_j\|_p \leq \epsilon'$ , y por tanto  $g = \sum_{j=1}^m c_j g_j \in \mathcal{C}_c$  y cumple  $\|g - s\| = \|\sum_{j=1}^m c_j (\chi_{A_j} - g_j)\| \leq \sum |c_j| \|\chi_{A_j} - g_j\| < \sum |c_j| \epsilon' \leq \epsilon \Rightarrow \epsilon' = \frac{\epsilon}{\sum |c_j|}$ .

Paso III: Finalmente, para demostrar lo anterior, sea  $A \subset \mathbb{R}$  medible Lebesgue y  $\mu(A) < \infty$ . Como la medida de Lebesgue es regular, dado  $\epsilon > 0$ , existen  $V$  abierto y  $K$  compacto, con  $K \subset A \subset V$  tal que  $\mu(V \setminus K) < \epsilon$ . Entonces, utilizando el lema,  $\exists g \in \mathcal{C}_c$  tales que  $\chi_K \leq g \leq \chi_V$  y por tanto  $|\chi_A - g| \leq \chi_V - \chi_K$ . Concluimos viendo que entonces

$$\int |\chi_A - g|^p \leq \int |\chi_{V \setminus K}|^p = \mu(V \setminus K) \leq \epsilon.$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Para terminar, damos ahora la demostración del lema:

*Demostración del lema 3.7:* Si  $V$  es abierto, entonces  $V = \bigcup I_j$  es la unión de sus componentes conexas disjuntas (que también son abiertos). Si  $K$  es un compacto, entonces  $K \cap I_j \neq \emptyset$  para un número finito de los  $I_j$ .

Si  $K_j = K \cap I_j$  basta encontrar una función  $g_j \in \mathcal{C}_c$  tal que  $\chi_{K_j} \leq g_j \leq \chi_{I_j}$  y hacer entonces  $g = \sum g_j$ .

Sea  $I = (\alpha, \beta)$  un intervalo abierto  $K \subset I$  un compacto, con  $a = \inf K$  y  $b = \sup K$ . Entonces  $b < \beta$  y  $\alpha < a$ . Elegimos  $\epsilon > 0$  tal que  $(a - \epsilon, b + \epsilon) \subset I$ .

La siguiente función cumple con las hipótesis que necesitamos:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \notin [a - \epsilon, b + \epsilon] \\ \text{interpolación lineal,} & \text{resto de los casos.} \end{cases}$$

■

**Observación:** Como resumen, en la demostración de que la clase  $\mathcal{C}_c$  es densa en  $L^p(\mathbb{R}, dx)$  hemos usado únicamente lo siguiente:

- Hemos hecho primero una aproximación por funciones simples  $\sum c_j \chi_{A_j}$ .
- Hemos usado que cada conjunto  $A$  medible se puede aproximar en medida por abiertos  $V \supset A$  y por compactos  $K \subset A$  (es decir, que la medida es regular).
- El lema 2.7.

Con esta observación en mente nos fijamos en el siguiente resultado:

**LEMA 2.17 (Lema de Urysohn)** *Si  $X$  es un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto, entonces dados un compacto  $K$  y un abierto  $V$ ,  $K \subset V$ , existe una función  $g \in \mathcal{C}_c$  tal que  $\chi_K \leq g \leq \chi_V$ .*

Encontramos así la generalización del teorema

**TEOREMA 2.18** *Si  $X$  es un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto y existe una medida  $\mu$  que es regular con respecto a la topología de  $X$ , entonces  $\mathcal{C}_c$  es denso en  $L^p(X, d\mu)$ , con  $p < \infty$ .*



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

*Demostración* Por el argumento anterior solo hace falta probar que dados  $K$  compacto y  $V$  abierto cualesquiera, con  $K \subset V$ , entonces  $\exists g \in \mathcal{C}_c^\infty$  tal que  $\chi_K \leq g \leq \chi_V$ . Esto se deduce del siguiente

**LEMA 2.20** *Dados  $a < b$  y  $\epsilon > 0$ , existe  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , con  $g \in \mathcal{C}^\infty$ , de forma que*

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{en } [a, b] \\ 0, & \text{en } \mathbb{R} \setminus [a - \epsilon, b + \epsilon]. \end{cases}$$

*Demostración* Basta encontrar  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$  tal que  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  y

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Si eso es así, dados  $a, b$  y  $\epsilon > 0$ , podemos construir las funciones  $\varphi\left(\frac{x-b}{\epsilon}\right)$  y  $\varphi\left(\frac{a-x}{\epsilon}\right)$ . Ahora es fácil concluir que la función  $g = \varphi\left(\frac{x-b}{\epsilon}\right) \cdot \varphi\left(\frac{a-x}{\epsilon}\right)$  cumple los requisitos impuestos.

Construimos ahora  $\varphi$ . Para ello consideramos la función

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

Es fácil ver que  $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ , ya que para cada  $k \in \mathbb{N}$  y  $x > 0$  se tiene  $\left(\frac{d^k}{dx^k}\right) \psi(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \psi(x)$

para cierto polinomio  $P$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{P\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{P(y)}{e^y} = 0$ . Observamos ahora que

$$h(x) = e^{-1} - \psi(x) = \begin{cases} e^{-1}, & x \leq 0 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Además,  $h(x) < 0$ , si  $x > 1$ .

Entonces tenemos que

$$\psi(h(x)) = \begin{cases} \psi(e^{-1}) = e^{-e}, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

Finalmente elegimos  $\varphi(x) = e^e \psi(h(x))$  que es  $\mathcal{C}^\infty$  porque tanto  $\psi$  como  $h$  lo son. ■



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Capítulo 3

# El problema de la convergencia

En este capítulo recopilamos los distintos tipos de convergencia que hemos visto hasta ahora y establecemos relaciones entre ellos. Asimismo, estudiamos diversos procesos en matemáticas cuya resolución está directamente relacionada con un resultado de convergencia.

### Tipos de convergencia.

La expresión  $f_n \rightarrow f$  puede significar:

**Puntual:**  $\lim f_n(x) = f(x)$  c.t.p.

**Uniforme:**  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ .

**En norma:**  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ .

**En medida:**  $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \lambda\}) \rightarrow 0$ .

Veamos que relación hay entre ellas:

- conv. puntual + dominación  $\Rightarrow$  conv. en norma  $L^p$ , con  $p < \infty$

$$\left. \begin{array}{l} f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ c.t.p.} \\ |f_n| \leq F \in L^p \end{array} \right\} \Rightarrow \|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

- conv. en norma  $\Rightarrow$  conv. puntual de una subsucesión (es el corolario 2.1).
- conv. en norma  $\Rightarrow$  conv. en medida (desigualdad de Chebyshev).

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow and orange gradient bar at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### 3.1. Algunos ejemplos que involucran procesos de convergencia

En lo que queda de este capítulo consideraremos únicamente como dominios de nuestras funciones dos espacios:  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{\text{funciones 1-periodicas}\}$ . En este segundo caso

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{C} \text{ medibles y 1-periodicas y tales que } \int_0^1 |f|^p < \infty \right\} / \mathcal{R}.$$

#### 3.1.1. La ecuación de Laplace en el disco unidad

Este ejemplo está relacionado con lo visto en la introducción (Capítulo 1):

Consideremos (en coordenadas polares) la ecuación de Laplace en el disco unidad con dato inicial  $f$  (una función 1-periódica)

$$\begin{cases} \Delta u(r, x) = 0, & \text{si } r < 1, \\ u(1, x) = f(x). \end{cases}$$

Puesto que el laplaciano en polares viene dado por  $\Delta = \partial_{rr}^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{4\pi^2 r^2}\partial_{xx}^2$ , es fácil ver que las funciones de la forma

$$u_n(r, x) = ar^{|n|} e^{2\pi inx}, \quad a \in \mathbb{C},$$

satisfacen  $\Delta u_n = 0$ . Como hiciera Fourier con la ecuación de la cuerda vibrante, parece lógico considerar soluciones que vengan dadas por la suma infinita de estas  $u_n$

$$u(r, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{2\pi inx}. \quad (3.1)$$

Al hacer  $r \rightarrow 1^-$  observamos que el dato inicial vendría dado por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx} \quad (3.2)$$

cuyos coeficientes estarían determinados por la fórmula

$$a_n = \int_0^1 f(y) e^{-2\pi iny} dy,$$

ya que el sistema de funciones  $\{e^{2\pi inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal.

#### Observaciones

1. Si la función  $f$  pertenece al espacio  $L^1(\mathbb{T})$ , es decir a la clase de funciones 1-periodicas

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

3. De acuerdo con la definición dada en el ejercicio 1 de la hoja 2, la solución dada por (3.1) representa la sumación Abel de la serie de Fourier de  $f$  y, como ya se indica en dicho ejercicio, puede tener mejores propiedades de convergencia que ésta.

A continuación, damos una forma cerrada que describa mejor la función solución. Para ello, manipulando las distintas expresiones que aparecen, se tiene que

$$u(r, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i n y} dy \right) r^{|n|} e^{2\pi i n x} = \int_0^1 f(y) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{2\pi i n (x-y)} \right] dy.$$

Sea  $P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{2\pi i n x}$ . Entonces lo que hemos obtenido se puede escribir como

$$u(r, x) = \int_0^1 f(y) P_r(x - y) dy.$$

Al igual que en el caso de la cuerda vibrante, el problema de nuevo es saber si se cumple  $u(r, x) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(x)$  y muy especialmente en que sentido (puntual, uniforme, norma  $L^p$ , medida).

**DEFINICIÓN 3.1** Dadas 2 funciones en un espacio (vectorial) de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , se define su convolución como

$$f * g(x) = \int_X f(y) g(x - y) d\mu(y).$$

En el caso  $\mu$  la medida de Lebesgue y  $X = \mathbb{T}$  se tiene

$$f * g(x) = \int_0^1 f(y) g(x - y) dy,$$

mientras que si  $X = \mathbb{R}$  tenemos

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy,$$

En ambos casos es fácil ver que la convolución es una operación conmutativa y, por Fubini, que si  $f, g \in L^1$  entonces  $f * g \in L^1$ . Además  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ . (Ejercicio)

**Conclusión:** Con esta notación concluimos que la solución a la ecuación de Laplace con dato inicial  $f$  viene dada por

$$u(r, x) = f * P_r(x).$$

La familia de funciones  $\{P_r\}_{0 < r < 1}$  se denomina **Núcleo de Poisson**. Por abuso de lenguaje se suele decir directamente que  $P_r(x)$  es el núcleo de Poisson.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

*Demostración* Usaremos simplemente que  $P_r$  viene dada por la suma de dos series geométricas:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{2\pi i n x} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n} e^{2\pi i n x} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{2\pi i n x} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-2\pi i n x} + \sum_{n=0}^{\infty} (r \cdot e^{2\pi i x})^n \\ &= \frac{r \cdot e^{-2\pi i x}}{1 - r e^{-2\pi i x}} + \frac{1}{1 - r e^{2\pi i x}} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos 2\pi x}. \end{aligned}$$

■

**Propiedades de  $P_r$ :** Nos fijamos a continuación en algunas propiedades del núcleo de Poisson.

1.  $P_r$  es 1-periódica.
2.  $P_r$  es par.
3.  $P_r(x) \geq 0, \quad \forall x$
4.  $\int_{-1/2}^{1/2} P_r(x) dx = 1, \quad \forall 0 < r < 1$ , (i.e., la masa se conserva).
5.  $\forall \delta \in (0, 1/2)$  se tiene  $\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\delta < |x| < 1/2} P_r(x) dx = 0$

Los tres primeros apartados son obvios. Para el cuarto usamos el siguiente argumento:

$$\int_{-1/2}^{1/2} P_r(x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{2\pi i n x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} r^{|n|} e^{2\pi i n x} dx}_{*} = 1$$

Observamos que hemos intercambiado la integral con el sumatorio gracias al TCD y que de todas las integrales de \*, la única que no se anula (y de hecho vale 1) es aquella que se da cuando  $n = 0$ , ya que

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i n x} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Para el apartado 5 usaremos que  $P_r$  es par y decreciente en  $(0, 1/2)$ . De esta forma

$$0 \leq \int_{\delta < |x| < 1/2} P_r(x) dx = 2 \int_{\delta}^{1/2} P_r(x) dx \leq P_r(\delta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \delta} \rightarrow 0, \quad \text{si } r \rightarrow 1^-.$$

**EJEMPLOS:**



1  
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

- Sea  $G(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$  y sea  $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} G(\frac{x}{\sqrt{t}})$ . Entonces  $\{G_t(x)\}_{t>0}$  cumple de nuevo las propiedades 2-5 para  $t \rightarrow 0^+$ , denominado núcleo del calor o núcleo de Gauss.

**NOTA IMPORTANTE:** Una de las propiedades mas interesantes de la convolución es que se puede utilizar para regularizar funciones. Si tomamos

- $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ ,
- $g$  una función “buena” (por ejemplo que sea de clase  $C^\infty$  y esté acotada tanto ella como sus derivadas),

entonces se tiene que  $f * g \in C^\infty$ . Veamos por qué:

$$\frac{d}{dx}((g * f)(x)) = \int \frac{\partial}{\partial x}(f(y) \cdot g(x - y)) dy = \int f(y) \cdot g'(x - y) dy = (f * g')(x),$$

y, por inducción, podemos probar que

$$D^k(f * g)(x) = f * (D^k g)(x).$$

El motivo por el que podemos meter la derivada dentro de la integral proviene del hecho de que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}(f(y) \cdot g(x - y)) \right| \leq K \cdot |f(y)| \in L^1,$$

siendo  $K = \|g'\|_\infty$ , y esto nos permite usar el TCD.

**EJEMPLO:** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , por ejemplo, la función

$$u_t(x) = f * G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \in C^\infty.$$

**NOTA:** Imaginemos ahora una familia de funciones  $\{g_n\} \subset C^\infty$  como antes y que tengan la propiedad de que  $g_n * f \rightarrow f$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces, lo que estamos haciendo es aproximar la función  $f$  por funciones  $C^\infty$ . Con ese fin introducimos el siguiente concepto:

### 3.1.2. Núcleos de sumabilidad

**DEFINICIÓN 3.2 (Núcleos de sumabilidad)** Dado  $X = \mathbb{R}, \mathbb{T}$ , diremos que la familia  $\{K_r\}_{a < r < b}$  es un núcleo de sumabilidad para  $r \rightarrow b^-$  o  $r \rightarrow a^+$ , respectivamente, si cumple

1.  $K_r(x) \geq 0, \forall r, \forall x \in X$ .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



**Observaciones:** Para las aplicaciones que se van a ver a continuación, en la definición de núcleo de sumabilidad podemos sustituir 1 por la condición  $\int |K_r(x)| dx \leq C, \forall r$ . En ese caso, el integrando del apartado 3 debe considerarse en valores absolutos. También podemos suponer que la familia es discreta ( $r \in \mathbb{N}$ ) y en este caso el límite hay que tenerlo en cuenta cuando  $r \rightarrow \infty$ .

**Ejercicio 3.1** Sea  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$  con  $\int \varphi dx = 1$  y sean  $\varphi_t(x) = \frac{1}{t}\varphi(x/t)$  y  $\varphi^R(x) = R \cdot \varphi(R \cdot x)$ . Probar que  $\{\varphi_t\}_{t>0}$  es un núcleo para  $t \rightarrow 0^+$  y que  $\{\varphi^R\}_{R>0}$  también lo es para  $R \rightarrow \infty$ .

El resultado principal que veremos en este contexto es el siguiente:

**TEOREMA 3.3** Sea  $\{K_r\}_{a<r<b}$  un núcleo de sumabilidad para  $r \rightarrow b^-$  o  $r \rightarrow a^+$ . Entonces

1. si  $f$  es continua en  $x_0$  y acotada,  $\lim_{r \rightarrow b^-} (K_r * f)(x_0) = f(x_0)$ .
2. si  $f$  es uniformemente continua y acotada, entonces  $K_r * f \rightarrow f$  uniformemente (es decir,  $\|K_r * f - f\|_\infty \rightarrow 0$ ).
3. si  $f \in L^p$ , con  $1 \leq p < \infty$ , entonces  $K_r * f \rightarrow f$  en norma  $L^p$  ( $\|K_r * f - f\|_p \rightarrow 0$ ).

Para probar el apartado 3, necesitaremos el siguiente resultado:

**LEMA 3.4** Dado  $h \in \mathbb{R}$ , sea  $\tau_h f(x) = f(x - h)$ . Entonces,  $\forall p < \infty$ , si  $f \in L^p$ ,

$$\|\tau_h f - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

**Ejercicio 3.2** Probar este resultado. (Para ello usar que la clase  $C_c$  es densa en  $L^p$ ).

*Demostración del teorema:* Lo haremos de forma esquemática para cada uno de los apartados:

1.

$$\begin{aligned} (K_r * f)(x_0) - f(x_0) &= \left[ \int K_r(y) \cdot f(x_0 - y) dy \right] - f(x_0) \underbrace{\int K_r(y) dy}_{=1} \\ &= \int K_r(y) [f(x_0 - y) - f(x_0)] dy = \int_{|y|<\delta} K_r(y) [f(x_0 - y) - f(x_0)] dy \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

- $|I_1| \leq \int_{|y| < \delta} |K_r(y)| \epsilon' dy \leq C \cdot \epsilon'$
- $|I_2| \leq \int_{|y| > \delta} |K_r(y)| 2 \|f\|_\infty \leq 2 \|f\|_\infty \epsilon'$

Tomando  $\epsilon' < \frac{\epsilon}{C + 2 \|f\|_\infty}$  queda que  $|(K_r * f)(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon$ .

ii) Si  $f$  es uniformemente continua,  $\delta$  no depende de  $x_0$  y por tanto, en este caso,  $\forall \epsilon > 0, \exists r_0$  tal que si  $r > r_0$ , entonces  $\sup |(K_r * f)(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon$ , es decir,  $\|K_r * f - f\|_\infty \rightarrow 0$ .

iii) Para  $p = 1$ :

$$\begin{aligned} \|K_r * f - f\|_{L^1} &= \int \left| \int K_r(y)(f(x-y) - f(x)) dy \right| dx \stackrel{\text{Fubini}}{\leq} \\ &\leq \int |K_r(y)| \underbrace{\left[ \int |f(x-y) - f(x)| dx \right]}_{\|\tau_y f - f\|_{L^1}} dy = \int_{|y| < \delta} \dots + \int_{|y| > \delta} \dots = \star \end{aligned}$$

Por el lema 3.4, dado  $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $|y| < \delta$ , entonces  $\|\tau_y f - f\|_{L^1} < \epsilon'$  y por la propiedad  $\beta$  de núcleo de sumabilidad  $\exists r_0 \leq r$  tal que  $\int_{|y| > \delta} |K_r(y)| dy < \epsilon'$ , y entonces

$$\star \leq \epsilon' C + \epsilon' 2 \|f\|_{L^1} < \epsilon \text{ si } \epsilon' = \frac{\epsilon}{C + 2 \|f\|_{L^1}}$$



Para el caso  $f \in L^p, 1 < p < \infty$ , usaremos que  $\|K_r * f - f\|_p \leq \int |K_r(y)| \|\tau_y f - f\|_p dy$ . Esto es consecuencia de la siguiente desigualdad integral de Minkowski.

**LEMA 3.5 (Desigualdad integral de Minkowski)** Dada una función  $F : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$  medible, entonces

$$\left\| \int_Y |F(\cdot, y)| d\mu(y) \right\|_{L^p(d\mu(x))} \leq \int_Y \|F(\cdot, y)\|_{L^p(d\mu(x))} d\mu(y)$$

**EJEMPLOS:** Damos a continuación algunos ejemplos de núcleos de sumabilidad:



1 2

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

- Como caso particular del anterior, tenemos  $\varphi = \frac{1}{2}\chi_{(-1,1)}$ . Entonces  $\varphi_r = \frac{1}{2r}\chi_{(-r,r)}$  y por tanto, dada  $f \in L^p$ , tenemos que

$$(\varphi_r * f)(x) = m_r f(x) = \int_{x-r}^{x+r} \frac{1}{2r} f(y) dy.$$

### 3.2. El teorema de diferenciación de Lebesgue

El teorema de núcleos de sumabilidad aplicado al último ejemplo anterior nos da el siguiente resultado:

$$m_r f \longrightarrow f \begin{cases} \text{en norma } L^p \\ \text{puntualmente si } f \text{ es continua y acotada} \end{cases}$$

Sin embargo, el teorema de diferenciación de Lebesgue nos dice que de hecho hay convergencia puntual en *c.t.p.* si  $f \in L^p$ ,  $p \geq 1$ , (para ello no hace falta que esté acotada).

Recordamos primero algunos resultados clásicos de la integración Riemann ...

#### TEOREMA 3.6 (Teorema Fundamental del cálculo, Newton-Leibniz) -

1. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada e integrable Riemann. Entonces, la función  $F(x) = \int_a^x f(u) du$  es continua.
2. Sean  $f$  y  $F$  como en el apartado 1. Si  $f$  es continua en  $x_0$ , entonces  $F$  es derivable en  $x_0$  y  $F'(x_0) = f(x_0)$ .
3. Sea  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $C^1$ . Entonces se tiene:  $F(a) + \int_a^x F'(u) du = F(x)$ .

... y uno de la Teoría de la Medida de Lebesgue:

**TEOREMA 3.7 (Derivación dentro del signo integral)** Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que  $f^t \in L^1(d\mu) \forall t$  y definamos

$$F(t) = \int_X f^t(x) d\mu(x) = \int_X f(x, t) d\mu(x).$$

1. Si  $f_x$  es continua en  $t_0 \forall x$ ,  $y \exists g \in L^1(d\mu)$  tal que  $|f^t(x)| \leq g(x), \forall x, \forall t$ , entonces  $F$  es continua en  $t_0$ .
2. Si  $\exists \frac{\partial f}{\partial t} \forall t$  y  $\exists g \in L^1(d\mu)$  con  $|\frac{\partial f}{\partial t}| \leq g(x) \forall t, \forall x$ , entonces  $\exists F'(t)$  y se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_X f(x, t) d\mu(x) \right) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

1. Sea  $\{t_n\}$  una sucesión arbitraria que converge a  $t_0$ . Definimos  $g_n(x) = f^{t_n}(x)$ . Si  $f_x$  es continua en  $t_0, \forall x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, t_n) = f(x, t_0) \quad \forall x$$

Como además  $|g_n(x)| \leq g(x) \in L^1(d\mu), \forall n$ , por el TCD,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu(x) \stackrel{T.C.D.}{=} \int_X f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0)$$

luego  $F$  es continua en  $t_0$ .

2. Sea de nuevo  $t_n \rightarrow t_0$  arbitraria ( $t_n \neq t_0$ ), definimos:  $h_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}$ . Claramente  $h_n$  es medible y  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ , que también es medible.

Por el teorema del valor medio,  $\forall x, \exists s$  tal que  $h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, s)$  y, por hipótesis, deducimos  $|h_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \forall x$ .

Aplicando de nuevo el TCD, concluimos,

$$F'(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu(x) \stackrel{T.C.D.}{=} \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0) d\mu(x).$$

**Q.E.D.**

Veamos a continuación la extensión natural del apartado 2 del Teorema Fundamental del Cálculo

**TEOREMA 3.8 (Teorema de diferenciación de Lebesgue)** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$  y definimos  $F(x) = \int_a^x f(u) du$ , entonces  $F$  es diferenciable en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue [escribimos c.t.p.  $(dx)$ ] y además  $F'(x) = f(x)$  en c.t.p.  $(dx)$ .

**DEFINICIÓN 3.3** Dada  $f \in L^1(d\mu)$  se define el conjunto de puntos de Lebesgue de  $f$ , denotado  $\mathcal{L}_f$ , como:

$$\mathcal{L}_f = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} |f(u) - f(x_0)| du = 0 \right\}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

### Demostración del Teorema de diferenciación de Lebesgue.

Se trata de probar que

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(u) du = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x f(u) du = f(x) \quad \text{c.t.p. } (dx),$$

pero esto es lo mismo que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(u) - f(x)) du = 0 \quad \text{c.t.p. } (dx),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x (f(u) - f(x)) du = 0 \quad \text{c.t.p. } (dx).$$

Como

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(u) - f(x)) du \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(u) - f(x)| du,$$

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x-h}^x (f(u) - f(x)) du \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x-h}^x |f(u) - f(x)| du,$$

el resultado se sigue de probar que la medida de Lebesgue de  $\mathcal{L}_f^c$  es cero ( $|\mathcal{L}_f^c| = 0$ ); es decir, que c.t.p.  $x$  es punto de Lebesgue de  $f$ .

Sea, para  $h > 0$ ,

$$m_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - f(x)| du.$$

Queremos ver que

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) = 0, \quad \text{c.t.p. } x$$

(y el resultado es cierto, por el ejercicio anterior, para funciones continuas,  $\forall x$ .)

Como

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) > 0 \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) > \frac{1}{n} \right\},$$

basta probar que dado  $\lambda > 0$  cualquiera, el conjunto

$$A_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R} : \limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) > \lambda \right\},$$

tiene medida cero.

Para ello definimos el siguiente **Operador de Hardy-Littlewood**:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

**TEOREMA 3.9 (Desigualdad de Hardy-Littlewood)** Si  $f \in L^1$  y  $\lambda > 0$ , se tiene

$$|\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda} \int |f(x)| dx.$$

Para terminar con la demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue, tomamos una función continua (e integrable)  $g$  cualquiera. Se tiene

$$m_h(f)(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - g(u)| du + \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |g(u) - g(x)| du + |g(x) - f(x)|.$$

Tomando límites

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) \leq \mathcal{M}(f - g)(x) + |f(x) - g(x)|.$$

Por tanto

$$A_\lambda \subset \left\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{M}(f - g) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Usando las desigualdades de Hardy-Littlewood y Chebychev

$$|A_\lambda| \leq \frac{2}{\lambda/2} \int |f - g| dx + \frac{1}{\lambda/2} \int |f - g| dx = \frac{6}{\lambda} \int |f - g| dx$$

y esto para cualquier función  $g$  continua e integrable. Usando ahora el lema de aproximación, dado  $\epsilon > 0$ , elegimos  $g$  continua e integrable tal que

$$\int |f - g| dx \leq \epsilon \cdot \frac{\lambda}{6}$$

De esta forma obtenemos  $|A_\lambda| \leq \epsilon$ ,  $\forall \epsilon > 0$ , y por tanto  $|A_\lambda| = 0$ .

**Q.E.D.**

### Demostración de la desigualdad de Hardy-Littlewood.

Si  $\mathcal{M}f(x) > \lambda$ , entonces existe un intervalo abierto  $I$  centrado en  $x$  ( $I = (x - h, x + h)$ ) tal que

$$(*) \quad \frac{1}{|I|} \int_I |f| du > \lambda.$$

(En particular  $|I| < \frac{1}{\lambda} \int_I |f| du$ ).

Por tanto

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

Como la medida de Lebesgue es regular, es suficiente probar que para todo  $K$ , compacto,  $K \subset D_\lambda$ , se tiene

$$|K| \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| du.$$

Pero si  $K \subset D_\lambda$  es compacto, existe un número finito de intervalos  $I_1, I_2, \dots, I_N$  que cumplen  $(\star)$  y tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N I_j.$$

Podemos suponer que ningún  $I_j$  está contenido en la unión de los otros. Además los ordenamos de forma que si  $I_j = (a_j, b_j)$  entonces  $a_1 < a_2 < \dots < a_N$ .

Es fácil ver que en esta situación las familias  $\{I_j\}_j$ ,  $j$  par e  $\{I_j\}_j$ ,  $j$  impar, son de intervalos disjuntos. Deducimos entonces que cada punto  $x \in \mathbb{R}$  está como mucho en dos intervalos  $I_j$ , es decir  $\sum_{j=1}^N \chi_{I_j}(x) \leq 2$

Finalmente

$$|K| \leq \sum_{j=1}^N |I_j| \leq \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda} \int_{I_j} |f| du = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| \sum_{j=1}^N \chi_{I_j}(u) du \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| du, \quad \mathbf{q.e.d.}$$

### Comentarios al Teorema de diferenciación de Lebesgue

**DEFINICIÓN 3.4** Se dice que una función medible,  $f(x)$  es **Localmente integrable** si para todo conjunto acotado  $D$ ,  $f \chi_D$  (la restricción de  $f$  a  $D$ ) es integrable. Escribiremos  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dx)$ . Obsérvese que  $L^p(\mathbb{R}, dx) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}, dx)$

**Ejemplo:**  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = e^x$  son funciones localmente integrables pero no integrables.

**Observación:** El teorema de diferenciación de Lebesgue es cierto también para funciones localmente integrables.

#### Demostración:

Basta probar que si  $f \in L^1_{loc}$ ,  $\forall R$  el conjunto

$$\left\{ x \in (-R, R) : \limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) > 0 \right\},$$

tiene medida cero, donde

$$m_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - f(x)| du.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

**TEOREMA 3.10 (Teorema de diferenciación en  $\mathbb{R}^n$ )** Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ ,  $p \geq 1$  entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy = f(x) \quad \text{c.t.p.}$$

donde  $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$  (bola de radio  $r$  centrada en  $x$ ).

La demostración sigue los mismos pasos que en dimensión  $n = 1$ , incluida la

### Desigualdad de Hardy-Littlewood en $\mathbb{R}^n$ :

Sea

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(u)| du.$$

Entonces  $\forall \lambda > 0$  se tiene

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

**TEOREMA 3.11** Si  $\{K_r\}_r$  es un núcleo de sumabilidad y definimos el operador maximal

$$K^* f(x) = \sup_{r>0} |K_r * f(x)|,$$

entonces si  $K^*$  verifica el Teorema de Hardy Littlewood en  $L^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ), entonces

$$\lim_{r \rightarrow b^-} K_r * f(x) = f(x) \quad \text{c.t.p., } \forall f \in L^p.$$

Caso particular:

**LEMA 3.12** Si  $F : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$  es par y decreciente en  $(0, \infty)$  entonces,  $\forall f \in L^1$ ,

$$|F * f(x)| \leq \|F\|_{L^1} \cdot \mathcal{M}f(x).$$

**Conclusion:** si el núcleo de sumabilidad está formado por funciones positivas, pares y decrecientes en  $(0, \infty)$  (e.g., el núcleo de Poisson, el de Gauss, etc.) entonces

$$K^* f(x) \leq \mathcal{M}f(x)$$

y por tanto hay convergencia puntual,

$$K_r * f(x) \rightarrow f(x) \quad \text{c.t.p. } \forall f \in L^p, \quad 1 \leq p < \infty.$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, irregular shape that resembles a splash or a stylized 'C'. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

## Capítulo 4

# Espacios de Hilbert

En este capítulo queremos dar sentido a la noción de “serie de Fourier”

$$f(x) = \sum a_n e^{2\pi i n x}, \quad \text{con} \quad a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Como veremos más adelante, el espacio natural en el que esta teoría se puede desarrollar es  $L^2(\mathbb{T})$ . Nuestra intención es conocer las propiedades métricas de este tipo de espacios y las técnicas relacionadas con ellos.

Comencemos recordando lo que la desigualdad de Hölder nos dice:

$$\text{Si } f \in L^p(d\mu), g \in L^q(d\mu), \text{ y } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ entonces } \left| \int f g d\mu \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Esto implica, entre otras cosas, que la aplicación bilineal

$$L^p(d\mu) \times L^q(d\mu) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{dada por} \quad (f, g) \longrightarrow \int f g d\mu$$

es continua. Hay un caso especial, que es cuando ambos índices coinciden  $p = q = 2$ . Además se tiene:

**LEMA 4.1** *La aplicación*

$$\begin{aligned} L^2(d\mu) \times L^2(d\mu) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\longrightarrow \langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\mu \end{aligned}$$

*tiene las propiedades siguientes:*

1.  $\langle f, f \rangle = \left( \int |f|^2 \right) \geq 0$  y  $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$ .
2.  $\overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**DEFINICIÓN 4.1** Un espacio vectorial  $X$  sobre  $\mathbb{C}$ , dotado de una aplicación  $\langle, \rangle$  (que llamaremos producto interior o producto escalar) con las propiedades 1 – 4 anteriores, se denomina **espacio pre-Hilbert**.

**NOTA:** Si  $X$  es pre-Hilbert, también es normado con la norma dada por

$$\|u\|_X = \sqrt{\langle u, u \rangle}. \quad (4.1)$$

En particular también es métrico.

**DEFINICIÓN 4.2** Si  $(X, \langle, \rangle)$  es pre-Hilbert y completo (i.e., toda sucesión de Cauchy tiene límite), entonces decimos que es un **espacio de Hilbert**.

**TEOREMA 4.2**  $L^2(d\mu)$ , con respecto a cualquier medida, es un espacio de Hilbert.

**OBSERVACIÓN:** Como veremos al final del capítulo, el recíproco también es cierto: si  $H$  es un espacio de Hilbert, entonces existe una medida  $\mu$  tal que  $H = L^2(d\mu)$ , la igualdad en el sentido de los isomorfismos.

**EJEMPLO:**  $\mathbb{R}^n = L^2(\{1, 2, \dots, n\}, \mu = \text{medida de contar})$ .

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \mapsto \mathbb{R}, \text{ siendo } f(j) = x_j.$$

Entonces tenemos que

$$\left( \int |f|^2 d\mu \right)^{1/2} = \left( \sum_{j=1}^N |x_j|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{y} \quad \langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^N x_j y_j.$$

#### 4.1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Uno de los ingredientes para demostrar que la expresión (4.1) es una norma viene dado por

**PROPOSICIÓN 4.3** En todo espacio de pre-Hilbert  $H$  se tiene  $\forall x, y \in H$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Antes de dar la demostración, desarrollamos la expresión

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)$$

*Demostración (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)* Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$  y supongamos que  $x \neq 0$ . Entonces

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Despejando, queda

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

■

**Ejercicio 4.1** Probar la ley del paralelogramo:

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

**NOTA:** recordemos que un subconjunto  $E$  de un espacio vectorial es convexo si  $\forall x, y \in E$  y  $\forall t \in [0, 1]$  se tiene que  $tx + (1 - t)y \in E$ .

**PROPOSICIÓN 4.4** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $E$  convexo y cerrado. Entonces  $\exists! x_0 \in E$  tal que  $\text{dist}(E, 0) = \inf \{\|x\| : x \in E\} = \|x_0\|$ .

*Demostración* Sea  $m = \inf \{\|x\| : x \in E\}$ . Sean  $x, y \in E$ , entonces por la ley del paralelogramo,  $\|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\|\frac{x+y}{2}\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4m^2$ .

Elegimos  $x_j \in E$  tal que  $\|x_j\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} m$ . Para esta sucesión se tiene que

$$\|x_j - x_k\|^2 \leq 2\|x_j\|^2 + 2\|x_k\|^2 - 4m^2 \xrightarrow{k, j \rightarrow \infty} 2m^2 + 2m^2 - 4m^2 = 0.$$

Luego  $\{x_j\}$  es una sucesión de Cauchy, y por ser  $E$  cerrado,  $\exists \lim x_j = x_0 \in E$ . Además,  $\|x_0\| = \lim \|x_j\| = m$ . El  $x_0$  es único ya que si  $\exists y_0 \in E$  tal que  $\|x_0\| = \|y_0\| = m$ , entonces

$$\|x_0 - y_0\|^2 \leq 2\|x_0\|^2 + 2\|y_0\|^2 - 4m^2 = 2m^2 + 2m^2 - 4m^2 = 0 \Rightarrow x_0 = y_0.$$

■

**COROLARIO 4.5** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $E$  un subespacio cerrado. Entonces,  $\forall x \in H$ ,  $\exists! x_E \in E$  tal que  $\text{dist}(x, E) = \|x - x_E\|$ .

**DEFINICIÓN 4.3** Se dice que  $x, y \in H$  son ortogonales (y escribimos  $x \perp y$ ) si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**DEFINICIÓN 4.4** Si  $H$  es un espacio de Hilbert y  $A \subset H$ , se define el ortogonal de  $A$  como

$$A^\perp = \{y \in H : y \perp x \text{ para todo } x \in A\}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

**LEMA 4.7** Dado  $u \in H$ , la aplicación

$$\begin{aligned} L_u : H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow \langle x, u \rangle \end{aligned}$$

es lineal y continua.

*Demostración (del lema)* Veamos que es lineal:  $L_u(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L_u(x_1) + \beta L_u(x_2)$ , por las propiedades del producto interior. Para ver la continuidad, probaremos que es Lipschitz:

$$|L_u(x_1) - L_u(x_2)| = |L_u(x_1 - x_2)| = |\langle x_1 - x_2, u \rangle| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|u\| \|x_1 - x_2\|$$

■

*Demostración (de la proposición)* Dado  $u \in H$ ,  $\{u\}^\perp = \{y \in H : \langle y, u \rangle = 0\} = \ker L_u$  es un espacio vectorial cerrado (porque es continua). Entonces

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \{x\}^\perp$$

es un espacio vectorial cerrado. ■

#### Ejercicio 4.2

- i)  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ .
- ii)  $A \subset (A^\perp)^\perp$ .
- iii)  $A \cap A^\perp \subset \{\vec{0}\}$  para todo  $A \subset H$ .

**TEOREMA 4.8 (Descomposición en suma directa)** Sea  $M$  un subespacio cerrado del espacio de Hilbert  $H$ . Entonces podemos escribir  $H = M \oplus M^\perp$ , es decir, existen dos aplicaciones lineales (denominadas proyecciones)

$$\begin{aligned} P : H &\longrightarrow M, \\ Q : H &\longrightarrow M^\perp, \end{aligned}$$

de forma que  $\forall x \in H$ , se cumple que  $x = Px + Qx$ . Además  $P$  y  $Q$  verifican la propiedad de "idempotencia":  $P^2 = P$  y  $Q^2 = Q$ . En general escribiremos  $P = P_M$  para indicar que se trata de la proyección sobre el espacio  $M$ .

**NOTA:** Si  $u \perp v$ , por el Teorema de Pitágoras se tiene

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

- Obviamente se tiene por la construcción de  $Q$  que  $x = Px + Qx$ .
- Veamos que  $Qx \in M^\perp$   
 Para ello sea  $y \in M$ . Queremos ver que  $Qx \perp y$ . Podemos suponer que  $\|y\| = 1$ . Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$  (a determinar). Como  $Qx - \alpha y = x - Px - \alpha y \in x + M$ , se tiene

$$\begin{aligned} \|Qx\|^2 = \|x - Px\|^2 &\leq \|Qx - \alpha y\|^2 = \|Qx\|^2 + |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{\alpha} \langle Qx, y \rangle \stackrel{\alpha = \langle Qx, y \rangle}{=} \\ &= \|Qx\|^2 + |\langle Qx, y \rangle|^2 - 2|\langle Qx, y \rangle|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $|\langle Qx, y \rangle|^2 \leq 0$ , de donde deducimos  $\langle Qx, y \rangle = 0$ .

- Idempotencia: Si  $x \in M$  entonces  $Qx = 0$  porque  $Qx = x - Px \in M^\perp \cap M = \{\vec{0}\}$ . Esto implica  $Px = x$  y de aquí  $P(Px) = Px$ .

De forma similar se prueba  $Q(Qx) = Qx$ .

- Falta probar la linealidad de  $P$  y  $Q$ :

Sean  $x, y \in H$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Por un lado se tiene por definición

$$\alpha x + \beta y = P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y)$$

Como también es cierto que  $x = Px + Qx$ ,  $y = Py + Qy$ , sustituyendo y despejando en la ecuación anterior tenemos

$$\alpha Px + \beta Py - P(\alpha x + \beta y) = Q(\alpha x + \beta y) - \alpha Qx - \beta Qy$$

Como la parte izquierda anterior está en  $M$  y la derecha en  $M^\perp$  ambas deben ser el vector  $\vec{0}$ . Por lo tanto,

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha Px + \beta Py, \quad y \quad Q(\alpha x + \beta y) = \alpha Qx + \beta Qy.$$

■

Hemos visto que si  $u \in H$ ,  $L_u$  es una aplicación lineal continua. El siguiente resultado muestra que el recíproco también es cierto.

**PROPOSICIÓN 4.9** Si  $L : H \rightarrow \mathbb{C}$  es una aplicación lineal y continua, entonces existe  $u \in H$  tal que  $L = L_u$ .

*Demostración* Si  $L$  es una aplicación lineal y continua,  $M = \ker L$  es un subespacio cerrado de  $H$ . Entonces  $H = \ker L \oplus (\ker L)^\perp$ . Supongamos que  $L \neq 0$  entonces  $\exists z \in$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

$x = L(z)y - L(y)z \in \text{Ker}L$ . Luego  $(L(z)y - L(y)z) \perp z$ .  
Usando esta información,

$0 = \langle L(z)y - L(y)z, z \rangle = L(z) \langle y, z \rangle - L(y) \langle z, z \rangle$   
y deducimos la expresión para  $L$

$$L(y) = \frac{L(z)}{\|z\|^2} \langle y, z \rangle = \langle y, \underbrace{\frac{L(z)}{\|z\|^2} z}_u \rangle. \quad \blacksquare$$

## 4.2. Dual topológico de un espacio de Banach

**DEFINICIÓN 4.5** Dado  $B$  un espacio de Banach sobre  $\mathbb{C}$ , se define su dual topológico como

$$B' = \{L : B \rightarrow \mathbb{C} : L \text{ es lineal y continua}\}.$$

**LEMA 4.10** (Ejercicio)  $B'$  es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|L\|_{B'} = \sup\{|L(x)| : \|x\|_B \leq 1\}.$$

Recordamos que si  $H$  es un espacio de Hilbert y  $u \in H$ , entonces  $L_u(x) = \langle x, u \rangle$  es lineal y continua. Recíprocamente, si  $L : H \rightarrow \mathbb{C}$  es lineal y continua, entonces  $\exists x_0$  tal que  $L(y) = \langle y, x_0 \rangle$ , y escribimos  $L = L_{x_0}$ .

**Conclusion:** la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : H &\longrightarrow H' \\ u &\longrightarrow L_u \end{aligned}$$

con  $L_u(x) = \langle x, u \rangle$ , es una aplicación biyectiva.

**TEOREMA 4.11** La aplicación anterior  $\mathcal{A}$  es lineal por conjugación y bicontinua (continua en los dos sentidos). También es una isometría y por tanto es un isomorfismo isométrico.

*Demostración* Primero probaremos que es una aplicación lineal por conjugación y luego veremos que es una isometría:

- Aplicación lineal:

$$\text{sean } u, v \in H \text{ y } \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \text{ Entonces } \overline{\mathcal{A}(\alpha u + \beta v)} = \overline{L_{\alpha u + \beta v}} = \alpha \overline{L_u} + \beta \overline{L_v} = \alpha \mathcal{A}(u) + \beta \mathcal{A}(v).$$

- Isometría:

$$\|\mathcal{A}(u)\| = \|L_u\|_{B'} = \|u\|.$$

$$\text{Si } \|x\| \leq 1, \text{ entonces } |L_u(x)| = |\langle u, x \rangle| \leq \|u\| \|x\| \leq \|u\| \Rightarrow \|L_u\| \leq \|u\|.$$

Por otro lado, si  $u \neq \vec{0}$ , sea  $x = \frac{u}{\|u\|}$ . Entonces

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

**Conclusión:** Todo espacio de Hilbert  $H$  puede identificarse con su dual  $H'$ .

**Ejercicio 4.3** Probar que en un espacio de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  se tiene que el dual de  $L^1(d\mu)$  se puede identificar con  $L^\infty(d\mu)$  mediante

$$\begin{aligned} L^\infty &\longrightarrow (L^1(d\mu))' \\ f &\longrightarrow L_f \end{aligned}$$

siendo la aplicación  $L_f$

$$\begin{aligned} L_f : L^1(d\mu) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ h &\longrightarrow \int h \bar{f} \end{aligned}$$

**NOTA:** Probar que es sobreyectiva es lo más importante.

**Ejercicio 4.4** En cualquier espacio de medida, si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  entonces  $(L^p)' = L^q$ .

### 4.3. Sistemas ortonormales

**DEFINICIÓN 4.6** Dado  $H$  un espacio de Hilbert, se dice que la familia  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  (donde  $\Gamma$  es un conjunto de índices) es un sistema ortonormal (S.O.N.) si

$$\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

**EJEMPLO:**  $\{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es un S.O.N. en  $L^2(\mathbb{T})$ , ya que

$$\langle e^{2\pi i n x}, e^{2\pi i m x} \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i n x} e^{-2\pi i m x} dx = \int_0^1 e^{2\pi i (n-m)x} dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

**TEOREMA 4.12 (de la mejor aproximación)** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  un S.O.N. Entonces, dados  $u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_m}$  distintos, si  $V = \text{span}\{u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_m}\}$  se tiene que

$$H = V \oplus V^\perp \text{ y } \text{dist}(x, V) = \left\| x - \sum_{j=1}^m \langle x, u_{\alpha_j} \rangle u_{\alpha_j} \right\|.$$

*Demostración* Basta ver con la notación del Teorema 4.8 que si  $H = V \oplus V^\perp$ , entonces

$$P_V : H \longrightarrow V$$

$$P_V(x) = \sum_{j=1}^m \langle x, u_{\alpha_j} \rangle u_{\alpha_j}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Esta descomposición es única, porque  $x = u + v = u' + v' \Rightarrow u - u' = v - v' \in M \cap M^\perp = \{\vec{0}\}$ .

Sea  $u = \sum_{j=1}^m \langle x, u_{\alpha_j} \rangle u_{\alpha_j}$  y  $v = x - u$ . Si probamos que  $v \in V^\perp$ , entonces tendremos que  $Px = u$  (y  $Qx = v$ ). Probar que  $v \in V^\perp$  es lo mismo que probar que  $v \perp u_{\alpha_k}$  con  $k = 1, 2, \dots, m$ .

La demostración es inmediata:

$$\langle v, u_{\alpha_k} \rangle = \left\langle x - \sum_{j=1}^m \langle x, u_{\alpha_j} \rangle u_{\alpha_j}, u_{\alpha_k} \right\rangle = \langle x, u_{\alpha_k} \rangle - \langle x, u_{\alpha_k} \rangle = 0$$

■

Resumiendo lo anterior, si  $H$  es un espacio de Hilbert,  $V$  un subespacio finito ( $\dim V = n$ ) y  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son vectores que forman una base ortonormal de  $V$  entonces, dado  $x \in H$ , la proyección  $P_V : H \rightarrow V$  viene dada por la fórmula

$$P_V(x) = \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle v_j. \quad (4.2)$$

Como consecuencia tenemos que

$$\text{dist}(x, V) = \left\| x - \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle v_j \right\|. \quad (4.3)$$

#### 4.4. Coeficientes de Fourier y la desigualdad de Bessel

**DEFINICIÓN 4.7** Si  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  es un S.O.N. de un espacio de Hilbert, entonces  $\forall x \in H$ , al valor  $\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha \rangle$  lo llamaremos coeficiente de Fourier  $\alpha$  de  $x$ .

**Nota sobre la sumación de una cantidad no numerable de términos:**

Sea  $\Gamma$  un conjunto arbitrario, numerable o no, y  $\mu_\Gamma$  la medida de contar en  $\Gamma$ . Entonces, el espacio  $L^p(d\mu_\Gamma)$  se denota por  $\ell^p(\Gamma)$ .

Como las funciones simples finitamente integrables son todas de la forma  $s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{\{\alpha_j\}}$ ,

con  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$ , se tiene

$$\int s d\mu_\Gamma = \sum_{j=1}^n c_j = \sum_{j=1}^n s(\alpha_j).$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

La expresión de la derecha se suele denotar por la suma  $\sum_{\alpha \in \Gamma} |f(\alpha)|^p$  y cobra más sentido a partir del siguiente

**LEMA 4.13** Si  $\sum_{\alpha \in \Gamma} |f(\alpha)| < \infty$  entonces  $\{\alpha : f(\alpha) \neq 0\}$  es numerable.

*Demostración* Basta ver que  $\{\alpha : |f(\alpha)| > \frac{1}{n}\}, \forall n = 1, 2, \dots$ , es de medida finita, y eso es cierto por la desigualdad de Chebychev:

$$\mu_{\Gamma}(\{\alpha : |f(\alpha)| > \frac{1}{n}\}) \leq n \int |f| d\mu_{\Gamma} < \infty.$$

■

Con todas las obervaciones anteriores pasamos a demostrar el siguiente teorema que resulta básico para la teoría de series de Fourier:

**PROPOSICIÓN 4.14 (Desigualdad de Bessel)** Dado  $H$  un espacio de Hilbert y  $\{u_{\alpha}\}_{\alpha \in \Gamma}$  un S.O.N., entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : H &\longrightarrow \ell^2(\Gamma) \\ x &\longrightarrow \{\hat{x}(\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma} \end{aligned}$$

cumple  $\left(\sum_{\alpha \in \Gamma} |\hat{x}(\alpha)|^2\right)^{1/2} \leq \|x\|_H$ .

*Demostración* Sea  $A \in \mathcal{P}_F(\Gamma)$  (el conjunto de las partes finitas de  $\Gamma$ ). Basta probar que  $\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|_H^2$ . Para ello, sea  $V = span \{u_{\alpha}, \alpha \in A\}$ . Entonces  $x$  se puede escribir

de forma única como  $x = x_1 + x_2$ , con  $x_1 \in V$  y  $x_2 \in V^{\perp}$ , y  $x_1 = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) u_{\alpha}$ . Deducimos

así

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2.$$

■

**NOTA:** Obsérvese que hemos usamos que si  $\{u_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$  es ortonormal, entonces

$$\left\| \sum_{\alpha \in A} c_{\alpha} u_{\alpha} \right\|_H^2 = \sum_{\alpha \in A} |c_{\alpha}|^2.$$

**PROPOSICIÓN 4.15** Si  $H$  es un espacio de Hilbert y  $\{u_{\alpha}\}_{\alpha \in \Gamma}$  es un S.O.N., la transformada de Fourier

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



- Como  $(\widehat{x+y})(\alpha) = \langle x+y, u_\alpha \rangle = \langle x, u_\alpha \rangle + \langle y, u_\alpha \rangle = \widehat{x}(\alpha) + \widehat{y}(\alpha)$  deducimos que  $\mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ .
- De manera análoga se prueba que  $\mathcal{F}(cx) = c\mathcal{F}(x)$ , para todo escalar  $c$ .

La continuidad sale de la desigualdad de Bessel:

$$\|\mathcal{F}(x)\|_{\ell^2(\Gamma)} \leq \|x\|_H.$$

■

**TEOREMA 4.16 (Riesz-Fisher)** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  un S.O.N. Entonces la transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  es sobreyectiva.

*Demostración* Sea  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \in \ell^2(\Gamma)$  (es decir,  $\sum_{\alpha \in \Gamma} |a_\alpha|^2 < \infty$ ). Por tanto,  $A = \{\alpha : a_\alpha \neq 0\}$  es numerable y escribimos  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ .

Sea  $x_m = \sum_{j=1}^m a_{\alpha_j} u_{\alpha_j} \in H$ .

- Veamos que la sucesión  $\{x_m\}$  es de Cauchy: por la ortogonalidad,

$$\|x_{m+k} - x_m\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^{m+k} a_{\alpha_j} u_{\alpha_j} \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^{m+k} |a_{\alpha_j}|^2 \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{\alpha_j}|^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Como  $H$  es un espacio de Hilbert, se tiene que  $\exists x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$

- Ahora veremos que  $\mathcal{F}(x) = \{a_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  (es decir,  $\widehat{x}(\alpha) = a_\alpha$ ). Esto es cierto porque

$$\widehat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle x_m, u_\alpha \rangle = \begin{cases} 0 & \alpha \notin A \\ a_\alpha & \alpha \in A \end{cases}$$

■

## 4.5. Sistemas ortonormales completos

**DEFINICIÓN 4.8** Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Un S.O.N.  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  se dice completo si  $\nexists u \in H$  con  $u \neq 0$ , tal que  $\{u, u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  siga siendo un S.O.N.; es decir, si el único elemento de  $H$  perpendicular a todos los elementos  $u_\alpha$  del sistema es el vector  $\vec{0}$ .

Hemos probado hasta el momento que la aplicación  $\mathcal{F}(x) = \widehat{x}$  (a la que hemos llamado *Transformada de Fourier*) es sobreyectiva y cumple  $\|\widehat{x}\|_{\ell^2(\Gamma)} \leq \|x\|_H$ . Si tuviéramos además la igualdad,  $\mathcal{F}$  sería un isomorfismo isométrico (y por tanto,  $H$  y  $\ell^2(\Gamma)$  podrían identificarse entre si).

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

**TEOREMA 4.17** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  un S.O.N. Entonces son equivalentes

- i)  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  es un S.O.N. completo
- ii)  $\text{span}\{u_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$  es denso en  $H$
- iii)  $\|x\|_H = \|\hat{x}\|_{\ell^2(\Gamma)}$  (**identidad de Plancherel**)
- iv)  $\langle x, y \rangle_H = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_{\ell^2(\Gamma)} = \sum_{\alpha \in \Gamma} \hat{x}(\alpha) \overline{\hat{y}(\alpha)}$  (**identidad de Parseval**)

*Demostración* Probaremos que  $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$ .

- Veamos que  $i) \Rightarrow ii)$ :

Supongamos que  $\text{span}\{u_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$  no es denso, es decir,  $V = \overline{\text{span}\{u_\alpha, \alpha \in \Gamma\}} \subsetneq H$ . Como  $V$  es un subespacio cerrado, se tiene  $H = V \oplus V^\perp$  y  $V^\perp \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow \exists u \neq \vec{0}, u \in V^\perp$ . Esto dice que  $u \perp u_\alpha$  para todo  $\alpha \in \Gamma$ . Si  $\tilde{u} = \frac{u}{\|u\|}$ , entonces  $\{u_\alpha, \tilde{u}\}$  es un S.O.N. (contradicción)

- Veamos que  $ii) \Rightarrow iii)$ :

Ya sabemos que  $\|\hat{x}\|_{\ell^2} \leq \|x\|_H$ . Por otro lado, por hipótesis, dado  $x$  y  $\epsilon > 0$ , existe  $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_{\alpha_i}$  tal que  $\|x - \sum_{i=1}^m \lambda_i u_{\alpha_i}\|_H \leq \epsilon$ . Recordamos que

$$\|x - \sum_{i=1}^m \langle x, u_{\alpha_i} \rangle u_{\alpha_i}\| \leq \|x - \sum_{i=1}^m \lambda_i u_{\alpha_i}\|,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x - \sum_{i=1}^m \langle x, u_{\alpha_i} \rangle u_{\alpha_i}\| + \|\sum_{i=1}^m \langle x, u_{\alpha_i} \rangle u_{\alpha_i}\| \\ &\leq \epsilon + \sum_{i=1}^m |\langle x, u_{\alpha_i} \rangle| \leq \epsilon + \|\hat{x}\|_{\ell^2}. \end{aligned}$$

Al ser  $\epsilon$  arbitrario, concluimos entonces que  $\|x\|_H \leq \|\hat{x}\|_{\ell^2}$ .

- Veamos que  $iii) \Rightarrow iv)$  (el argumento que vamos a usar se llama de *polarización*):

Dado  $\lambda \in \mathbb{C}$  (a determinar), tenemos por hipótesis que

$$\|\lambda x + y\|_H^2 = \|\lambda \hat{x} + \hat{y}\|_{\ell^2}^2, \forall x, y \in H,$$

o equivalentemente

$$|\lambda|^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\text{Re } \lambda \langle x, y \rangle = |\lambda|^2 \|\hat{x}\|^2 + \|\hat{y}\|^2 + 2\text{Re } \lambda \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

- Veamos finalmente que  $iv) \Rightarrow i)$ :

Sea  $u \in H$  tal que  $\langle u, u_\alpha \rangle = 0$  para todo  $\alpha$ . Entonces  $\widehat{u}(\alpha) = 0 \forall \alpha \Rightarrow \widehat{u} = \vec{0} \in \ell^2$ .  
Entonces

$$\forall x \in H, \langle x, u \rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{u} \rangle = 0 \Rightarrow u \in H^\perp = \{\vec{0}\} \Rightarrow u = \vec{0}$$

■

**TEOREMA 4.18 (Gran Finale)** *Todo espacio de Hilbert  $H$  posee un sistema ortonormal completo  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  (y en particular es isométricamente isomorfo a  $\ell^2(\Gamma)$ ).*

*Demostración* Sea  $G$  el conjunto formado por todos los S.O.N. de  $H$ . Definimos en él el orden de contenido

$$S \leq S' \quad \text{si} \quad S \subset S'.$$

Observamos que si  $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$  entonces  $\bigcup_{n \geq 1} S_n$  es un S.O.N. Por el principio de maximalidad de Hausdorff, sabemos que existe un elemento maximal

$$S_0 = \{u_\alpha : \alpha \in \Gamma_0\},$$

que es, por tanto, completo. ■



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Capítulo 5

# Series de Fourier

En el capítulo anterior vimos los aspectos teóricos necesarios para desarrollar una *Teoría de Fourier* en un espacio de Hilbert arbitrario. En este capítulo la construiremos explícitamente en el espacio  $H = L^2(\mathbb{T})$ . En este sentido, el primer resultado justifica la noción de serie de Fourier asociada a una función:

**TEOREMA 5.1** *En el espacio*

$$H = L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} : 1\text{-periódica y medible, con } \int_0^1 |f|^2 dx < \infty \right\},$$

se tiene que  $\{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forma un S.O.N. completo.

**COROLARIO 5.2**  $L^2(\mathbb{T})$  y  $\ell^2(\mathbb{Z})$  son isométricamente isomorfos con la isometría dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f &\longrightarrow \widehat{f} \end{aligned}$$

siendo  $\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$ .

**OBSERVACIÓN:** Con todo lo anterior, se tiene en particular las identidades

- $\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2$ . (Plancherel)
- $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{\ell^2}$ . (Parseval)

Para la demostración usaremos la caracterización de S.O.N. completos que en este caso dice que  $\text{span} \{e^{2\pi i n x} : n \in \mathbb{Z}\}$  es denso en  $L^2(\mathbb{T})$ .

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue and white geometric pattern, possibly representing a map or a stylized 'C'.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 5.1. Los Núcleos de Dirichlet y de Fejér

Dada  $f \in L^2(\mathbb{T})$  y  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , definimos la suma parcial de Fourier  $N$ -ésima como

$$S_N f(x) = \sum_{-N}^N \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

Nos gustaría probar que  $S_N f \rightarrow f$  en  $L^2$  (es decir,  $\|S_N f - f\|_{L^2} \rightarrow 0$ ).

Para ello buscamos una fórmula explícita de  $S_N f$ :

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{-N}^N \left( \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i n y} dy \right) e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-N}^N \left( \int_0^1 f(y) e^{2\pi i n(x-y)} dy \right) \\ &= \int_0^1 f(y) \left[ \sum_{-N}^N e^{2\pi i n(x-y)} \right] dy = f * D_N(x) \end{aligned}$$

donde  $D_N(x) = \sum_{-N}^N e^{2\pi i n x}$  representa el llamado  $N$ -ésimo núcleo de Dirichlet. Si  $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$

fuera un núcleo de sumabilidad, tendríamos como consecuencia que  $D_N * f \rightarrow f$  en  $L^2$ . Presentamos una expresión cerrada de estas funciones:

$$\begin{aligned} \sum_{-N}^N e^{2\pi i n x} &= \frac{e^{2\pi i(N+1)x} - e^{-2\pi i N x}}{e^{2\pi i x} - 1} \cdot \frac{e^{-\pi i x}}{e^{-\pi i x}} \\ &= \frac{e^{(2N+1)\pi i x} - e^{-(2N+1)\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \stackrel{\text{dividiendo por } 2i}{=} \frac{\text{sen}(2N+1)\pi x}{\text{sen } \pi x} \end{aligned} \quad (5.1)$$

### Propiedades de $\{D_N\}$

- $D_N$  es par
- En  $[-1/2, 1/2)$ ,  $D_N$  tiene ceros en los puntos  $x = \frac{k}{2N+1}$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$
- $D_N(0) = 2N + 1$

Sin embargo  $D_N$  no cumple las propiedades de núcleo de sumabilidad :

1. Por un lado sí es cierto que  $\int_0^1 D_N(x) dx = \sum_{n=-N}^N \int_0^1 e^{2\pi i n x} dx = 1 \checkmark$

2. Sin embargo no verifica  $\int_{-1/2}^{1/2} |D_N(x)| dx \leq C$  independiente de  $N$  (ver Hoja 4 de

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

(Ver de nuevo Hoja 4 de ejercicios). Luego  $D_N$  no es un (buen) núcleo de sumabilidad. En su lugar recurrimos a las sumas de Cesaro:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} [S_0 f(x) + S_1 f(x) + \dots + S_N f(x)]$$

Para cada  $N$ ,  $\sigma_N f$  es un polinomio trigonométrico. Queremos ver de nuevo si  $\sigma_N f \rightarrow f$  en  $L^2$ . Observamos que

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} (D_0 * f + \dots + D_N * f) = F_N * f(x),$$

donde  $F_N = \frac{D_0 + \dots + D_N}{N+1}$  es el  $N$ -ésimo núcleo de Fejér. Veamos que  $\{F_N\}$  sí es un (buen) núcleo de sumabilidad. Damos primero una expresión cerrada:

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \frac{\text{sen}(2n+1)\pi x}{\text{sen } \pi x} = \frac{1}{(N+1) \text{sen } \pi x} \text{Im} \left( \sum_{n=0}^N e^{(2n+1)\pi i x} \right) \\ &= \frac{1}{(N+1) \text{sen } \pi x} \text{Im} \left( \frac{e^{(2N+3)\pi i x} - e^{\pi i x}}{e^{2\pi i x} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{(N+1) \text{sen } \pi x} \text{Im} \left( \frac{e^{(2N+2)\pi i x} - 1}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \right) \\ &= \frac{1}{(N+1)(\text{sen } \pi x)^2} \text{Im} \left( \frac{e^{2(N+1)\pi i x} - 1}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{(N+1)(\text{sen } \pi x)^2} \left( \frac{1 - \cos 2(N+1)\pi x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{N+1} \left( \frac{\text{sen}(N+1)\pi x}{\text{sen } \pi x} \right)^2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

**Propiedades de  $\{F_N\}$ :**  $F_N$  es par y verifica

i)  $\int_0^1 F_N dx = \frac{1}{N+1} \left( \sum_{n=0}^N \int_0^1 D_n(x) dx \right) = 1$

ii)  $F_N(x) \geq 0, \forall x$

iii)  $\int_{\delta < |x| < 1/2} F_N(x) dx = 2 \int_{\delta}^{1/2} \frac{1}{N+1} \left( \frac{\text{sen}(N+1)\pi x}{\text{sen } \pi x} \right)^2 dx \leq \frac{1}{N+1} \frac{1}{(\text{sen } \pi \delta)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$   
 para todo  $\delta > 0$ .



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**PROPOSICIÓN 5.4**

1. Si  $f$  es continua en  $x_0$  y acotada entonces  $\sigma_N f(x_0) \rightarrow f(x_0)$
2. Si  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  entonces  $\sigma_N f \rightarrow f$  uniformemente
3. Si  $f \in L^p$  con  $1 \leq p < \infty$  entonces  $\sigma_N f \rightarrow f$  en la norma  $L^p$

*Demostración del Teorema 5.1 sobre completitud:* Basta usar el apartado 3 de la proposición anterior con  $p = 2$  recordando que  $\sigma_N f = F_N * f$  es siempre un polinomio trigonométrico,  $\forall N$ . ■

EJEMPLO, una aplicación de la identidad de Plancherel: probar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

Sea  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ \text{extendida periódicamente.} \end{cases}$  . Entonces

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 x e^{-2\pi i n x} dx = \left[ \frac{x}{-2\pi i n} e^{-2\pi i n x} \right]_0^1 + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 e^{-2\pi i n x} dx = \frac{i}{2\pi n}, \text{ si } n \neq 0.$$

y  $f(0) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ . Para un uso posterior, observemos que

$$S_N f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-N}^N \frac{i}{2\pi n} e^{2\pi i n x}. \quad (5.3)$$

Por la identidad de Plancherel:

$$\frac{1}{4} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} = \int_0^1 |f|^2 = \frac{1}{3}.$$

de donde se deduce

$$\frac{2}{4\pi^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Ejercicio 5.1** Hallar  $\sum \frac{1}{n^4}$ . Sugerencia: buscar  $f \in L^2$ , del tipo  $f = x^2 + ax$ , de forma que  $\widehat{f}(n) = \frac{1}{n^2}$ .

**Consecuencias adicionales** Por la teoría general también tenemos:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

es decir,

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ en } L^2$$

a pesar de que  $S_N f = D_N * f$  y  $D_N$  es un núcleo “malo”.

La demostración de este resultado es inmediata ya que por Plancherel,

$$\|f - S_N f\|_2^2 = \sum_{|n| > N} |\widehat{f}(n)|^2,$$

y esto tiende a 0 cuando  $N \rightarrow \infty$ .

Nos preguntamos qué pasa con la convergencia en  $L^p$ ,  $p \neq 2$  de las series parciales de Fourier. En este sentido se sabe que:

- Si  $f \in L^p$ , con  $1 < p < \infty$ , entonces  $S_N f \rightarrow f$  en  $L^p$  (Riesz)
- $\exists$  una función en  $L^1$  tal que  $S_N f$  no converge a  $f$  en  $L^1$  (du Bois Reymond)
- $\exists f \in L^1$  tal que  $\{S_N f(x)\}$  diverge  $\forall x$  (Kolmogorov)
- $\exists f$  continua tal que  $S_N f(x_0)$  no converge a  $f(x_0)$  en algún  $x_0$  (Katznelson)
- Si,  $f \in L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , entonces  $S_N f(x) \rightarrow f(x)$  c.t.p. (Carleson)

En lo que queda de capítulo, estudiaremos el comportamiento de las series de Fourier en  $L^1$ , en especial la convergencia puntual.

**NOTA:** Observemos que si  $f \in L^1(\mathbb{T}) \supseteq L^2(\mathbb{T})$  tiene sentido definir la transformada de Fourier

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

Además, usando Fubini, si  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$  se tiene  $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ . Este resultado lo hemos usado de forma implícita en repetidas ocasiones. Por el lado funcional se tiene:

**TEOREMA 5.6** La transformada de Fourier es lineal, continua e inyectiva de  $L^1(\mathbb{T})$  en  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ :

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}).$$

*Demostración* La linealidad es inmediata. Además,

$$f \rightarrow |\widehat{f}(n)| \leq \int_0^1 |f e^{-2\pi i n x}| dx = \|f\|_{L^1}.$$

Entonces  $\|\{\widehat{f}(n)\}_n\|_{\ell^\infty} = \sup_n |\widehat{f}(n)| = \|f\|_{L^1}$ , lo que demuestra que  $\mathcal{F}$  es acotada.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**LEMA 5.7 (Riemann-Lebesgue)**  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}) = \left\{ \{a_n\} \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_n = 0 \right\}$ .

Es decir, si  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$ . (Recuérdese que  $c_0(\mathbb{Z}) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z})$ ).

**NOTA:** si  $f \in L^2(\mathbb{T})$  (que claramente es un subconjunto de  $L^1(\mathbb{T})$ ) el resultado es inmediato porque

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

*Demostración del lema:* Dado  $\epsilon > 0$ , elegimos un polinomio trigonométrico  $P(x) = \sum_{n=-m}^m a_n e^{2\pi i n x}$  tal que  $\|f - P\|_1 < \epsilon$ . Entonces,  $\forall |n| > m$ , usando que  $\widehat{P}(n) = 0$ , se tiene

$$|\widehat{f}(n)| = \left| \int_0^1 (f(x) - P(x)) e^{-2\pi i n x} dx + \widehat{P}(n) \right| \leq \int_0^1 |f(x) - P(x)| dx < \epsilon.$$

■

## 5.2. Criterios de convergencia puntual para series de Fourier

**LEMA 5.8 (Criterio de Dini)** Si  $f \in L^1(\mathbb{T})$  y para cierto  $x_0$  se tiene que

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty.$$

entonces  $S_N f(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x_0)$ .

EJEMPLOS de funciones que verifican las condiciones del criterio de Dini:

- $f$  Lipschitz, es decir,  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \forall x, y$  :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| dt \leq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{c|t|}{|t|} dt = c < \infty.$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

*Demostración (del criterio de Dini)* La demostración usa el lema de Riemann-Lebesgue. Para ello vemos que

$$\begin{aligned}
 S_N f(x_0) - f(x_0) &= \int_{-1/2}^{1/2} (f(x_0 - t) - f(x_0)) D_N(t) dt \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} (f(x_0 - t) - f(x_0)) \frac{\text{sen}(2N + 1)\pi t}{\text{sen } \pi t} (t) dt \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2i \text{sen } \pi t} \left( e^{(2N+1)\pi i t} - e^{-(2N+1)\pi i t} \right) dt \\
 &= \widehat{F}_1(N) - \widehat{F}_2(-N),
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

donde  $F_1(t) = \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2i \text{sen } \pi t} e^{\pi i t}$  y  $F_2(t) = \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2i \text{sen } \pi t} e^{-\pi i t}$ .

Si demostramos que  $F_1, F_2 \in L^1(\mathbb{T})$  podemos usar el Lema de Riemann-Lebesgue y habremos terminado. Pero esto se deduce de la hipótesis del criterio ya que para  $j = 1, 2$

$$\int_{-1/2}^{1/2} |F_j(t)| dt = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2 \text{sen } \pi t} \right| dt \leq \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty,$$

donde hemos usado que  $|\text{sen } \pi t| \geq |t|/2$  en  $(-1/2, 1/2)$ . ■

Si la función tiene derivadas, entonces la convergencia es de hecho uniforme y podemos medir la rapidez de dicha convergencia de acuerdo al orden de derivación:

**PROPOSICIÓN 5.9** Si  $f \in C^k(\mathbb{T})$ , entonces  $\|S_N f - f\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{k-\frac{1}{2}}}\right)$ .

Para ello necesitamos antes el siguiente

**LEMA 5.10** Si  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , entonces  $\widehat{f}'(n) = 2\pi i n \widehat{f}(n)$ . En general, por inducción, si  $f \in C^k(\mathbb{T})$

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\pi i n)^k \widehat{f}(n)$$

*Demostración*  $\widehat{f}'(n) = \int_0^1 f'(t) e^{-2\pi i n t} dt \stackrel{\text{por partes}}{=} 2\pi i n \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt = 2\pi i n \widehat{f}(n)$ . ■

Como consecuencia tenemos que si  $f \in C^k(\mathbb{T})$ , entonces

∞

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



*Demostración de la proposición:* Basta observar que

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N f(x)| &\leq \sum_{|n|>N} |\widehat{f}(n)| \leq \left( \sum_{|n|>N} |(2\pi in)^k \widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{|n|>N} \frac{1}{|(2\pi in)^k|^2} \right)^{1/2} \\ &\leq \|f^{(k)}\|_2 \frac{1}{4\pi^2} \left( 2 \sum_{n=N+1}^N \frac{1}{n^{2k}} \right)^{1/2} \leq \|f^{(k)}\|_2 \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} \frac{1}{N^{k-1/2}}. \end{aligned}$$

■

### 5.3. Espacios de Sobolev

Obsérvese que la única información que hemos usado en la demostración anterior es

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n) n^k|^2 < \infty.$$

**DEFINICIÓN 5.2** Dado  $\alpha > 0$ , se define el **espacio de Sobolev** de orden  $\alpha$  como

$$H^\alpha = H^\alpha(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n) n^\alpha|^2 < \infty \right\}.$$

**COROLARIO 5.11** Si  $\alpha > \frac{1}{2}$  y  $f \in H^\alpha$ , entonces  $\|S_N f - f\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{\alpha-\frac{1}{2}}}\right)$  (convergencia uniforme).

**PROPOSICIÓN 5.12**  $H^\alpha$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar dado por

$$\langle f, g \rangle_{H^\alpha} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha \widehat{f}(n) \overline{|n|^\alpha \widehat{g}(n)}. \quad (5.5)$$

Por tanto, la norma viene dada por

$$\|f\|_{H^\alpha} = \left( \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2\alpha} |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2}.$$

En general, se pueden definir espacios de Sobolev  $W^{\alpha,p}$  (en  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{T}^n$ ) con integrabilidad  $p$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

En nuestro caso particular,  $H^\alpha(\mathbb{T}) = W^{\alpha,2}(\mathbb{T})$ . De esta forma, tal y como hemos visto, si  $n = 1$ ,  $p = 2$ ,  $\alpha > \frac{1}{2}$ , y  $f \in H^\alpha$  se tiene que las sumas parciales de

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x},$$

convergen uniformemente. Por tanto  $f(x)$  se puede identificar a.e. con una función continua.

La otra idea destacada detrás de las series de Fourier es usarlas para resolver EDO a partir de la relación ya vista

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\pi i n)^k \widehat{f}(n).$$

Con más generalidad, si  $P(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$  y definimos

$$P(D)f = a_m f^{(m)} + \dots + a_2 f'' + a_1 f' + a_0,$$

entonces

$$\widehat{P(D)f}(n) = [a_m (2\pi i n)^m + \dots + a_1 2\pi i n + a_0] \widehat{f}(n) = P(2\pi i n) \widehat{f}(n).$$

Por tanto, para resolver la ecuación  $P(D)u(x) = g(x)$  basta resolver la ecuación algebraica

$$\widehat{P(D)u}(n) = P(2\pi i n) \widehat{u}(n) = \widehat{g}(n).$$

Entonces  $u$  es la función cuyos coeficientes de Fourier son  $\widehat{u}(n) = \frac{1}{P(2\pi i n)} \widehat{g}(n)$ . De hecho, si  $G$  es tal que  $\widehat{G}(n) = \frac{1}{P(2\pi i n)}$ , entonces  $\widehat{u}(n) = \widehat{G}(n) \widehat{g}(n)$ . Esto nos dice, usando la identidad  $\widehat{G * g}(n) = \widehat{G}(n) \widehat{g}(n)$ , que  $u(x) = (G * g)(x)$ .

\*\*\*\*\*

Nos fijamos ahora en el ejemplo  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \log n)} e^{2\pi i n x}$ . Claramente  $f \in L^2(\mathbb{T})$

ya que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1 + \log n)^2} < \infty$ , y la convergencia de la serie es al menos en  $L^2(\mathbb{T})$ :

Queremos estudiar si hay convergencia puntual y nos preguntamos si  $f$  pertenece a algún espacio de Sobolev  $H^\alpha$  con  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Sin embargo

$$\sum |n^\alpha \widehat{f}(n)|^2 = \sum n^{2\alpha} \frac{1}{n^2(1 + \log n)^2}, \quad \text{que es finito solo si } \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Luego  $f \in H^{1/2}$  que no es suficiente para asegurar la convergencia puntual

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

*Demostración* Si llamamos  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ , necesitamos probar que la sucesión  $\{s_n\}_n$  es de Cauchy. Para ello usaremos que  $b_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}$ . Entonces, si  $m > n > 1$ ,

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^m a_k (\sigma_k - \sigma_{k-1}) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m (a_k \sigma_k - a_{k-1} \sigma_{k-1}) + \sum_{k=n+1}^m (a_{k-1} - a_k) \sigma_{k-1} \right| \\ &\leq a_m C_0 + a_n C_0 + \sum_{k=n+1}^m (a_{k-1} - a_k) C_0 = 2 a_n C_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Al meter el módulo dentro hemos usado las hipótesis  $|\sigma_n| \leq C_0$  y  $a_{k-1} - a_k \geq 0$ . ■

Aplicando el resultado a la serie anterior con  $a_n = \frac{1}{n(1 + \log n)}$  y  $b_n = e^{2\pi i n x}$ , observamos que  $a_n$  es decreciente y  $a_n \rightarrow 0$ . Además

$$\text{si } x \neq 0, 1 \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k x} \right| \leq \dots \leq \frac{2}{|e^{2\pi i x} - 1|}, \forall n.$$

Por tanto la serie anterior converge puntualmente  $\forall x \notin \mathbb{Z}$ .

Otro ejemplo similar viene dado por las series

$$\sum \frac{1}{n^\beta} e^{2\pi i n x}, \quad \beta > 0,$$

que de nuevo convergen puntualmente  $\forall x \notin \mathbb{Z}$ .

Obsérvese que si  $\beta \leq 1/2$  la función obtenida no está en  $L^2$ . Por ejemplo

$$F(x) = \sum \frac{1}{n^{1/2}} e^{2\pi i n x} \notin L^2.$$

## 5.4. La serie de Fourier en un punto de discontinuidad

**PROPOSICIÓN 5.15 (Principio de localización de Riemann)** Sea  $h \in L^1(\mathbb{T})$  y supongamos  $h = 0$  para todo  $x$  de un cierto intervalo abierto  $I = (a, b)$ . Entonces  $S_N h(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 = h(x) \forall x \in I$  (de hecho, converge uniformemente sobre compactos de  $I$ ).

La demostración se sigue directamente del criterio de Dini.

**Aplicación:** Supongamos  $f = g$  para todo  $x \in I$  intervalo. Si  $S_N f \rightarrow f$  en  $I$  c.t.p., lo mismo es cierto para  $g$ . Esto es interesante porque da a entender que las series de Fourier

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

*Demostración* Definimos la función auxiliar

$$h(x) = \begin{cases} f(x_0^+), & \text{en } (x_0, x_0 + 1/2) \\ f(x_0^-), & \text{en } (x_0 - 1/2, x_0) \end{cases}$$

y extendida periódicamente. Observamos ahora que  $g = f - h$  es una función continua, vale 0 en  $x_0$  y tiene derivada por la izquierda y por la derecha en dicho punto. Por lo tanto se puede usar el criterio de Dini, de forma que

$$S_N f(x_0) - S_N h(x_0) = S_N g(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g(x_0) = 0.$$

De esta forma se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N h(x_0), \text{ y basta probar que } S_N h(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)], \forall N.$$

La última identidad se sigue de los cálculos

$$\begin{aligned} S_N h(x_0) &= \int_{x_0-1/2}^{x_0+1/2} h(t) D_N(x_0 - t) dt = \\ &= f(x_0^+) \int_{x_0}^{x_0+1/2} D_N(x_0 - t) dt + f(x_0^-) \int_{x_0-1/2}^{x_0} D_N(x_0 - t) dt = \\ &= f(x_0^+) \int_0^{1/2} D_N(s) ds + f(x_0^-) \int_{-1/2}^0 D_N(s) ds = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)]. \end{aligned}$$

En la última parte hemos usado que  $D_N$  es par y por tanto tiene la misma integral a la derecha que a la izquierda de 0. ■

**PROPOSICIÓN 5.17** *Si  $f$  es acotada y tiene una singularidad de salto en  $x_0$ , entonces la suma de Cesaro (de la serie de Fourier) converge a  $\frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)]$ .*

*Demostración* Sea  $h(x)$  la función auxiliar anterior. Entonces  $g = f - h$  es continua en  $x_0$  y acotada. Por tanto  $\sigma_N g(x_0) = F_N * g(x_0) \rightarrow g(x_0) = 0$  (porque  $\{F_N\}$  es un núcleo de sumabilidad). Como  $F_N * g = F_N * f - F_N * h$ , se tiene que  $\lim \sigma_N f(x_0) = \lim \sigma_N h(x_0)$ . Entonces basta comprobar que se tiene  $\sigma_N h(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)], \forall N$ :

$$\begin{aligned} \sigma_N h(x_0) &= \int_{x_0-1/2}^{x_0+1/2} h(t) F_N(x_0 - t) dt = \\ &= f(x_0^+) \int_{x_0-1/2}^{x_0+1/2} F_N(x_0 - t) dt + f(x_0^-) \int_{x_0-1/2}^{x_0+1/2} F_N(x_0 - t) dt = \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



### 5.4.1. El fenómeno de Gibbs

**TEOREMA 5.18 (Fenómeno de Gibbs)** En la proximidad de un salto en cierto punto  $x_0$  de una función  $f$  (derivable salvo en  $x_0$  y donde  $\exists f(x_0^+), f(x_0^-), f'(x_0^+), f'(x_0^-)$ ) la serie de Fourier se dispara para alcanzar un 9% del valor del salto.

*Demostración* Basta probarlo para la función auxiliar  $h$ .

Considerando  $h(x) = \frac{2}{m}h(x - x_0)$  podemos suponer que  $x_0 = 0, f(x_0^+) = 1, f(x_0^-) = -1$ .

Calculamos los coeficientes de Fourier:  $\hat{h}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} h dx = 0$  porque  $h$  es impar.

Por otro lado,  $n \neq 0 \Rightarrow \hat{h}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} h(t) e^{-2\pi int} dt =$

$$-2i \int_0^{1/2} \text{sen}(2\pi nt) dt = \frac{2i}{2\pi n} (\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{-2i}{\pi n} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} S_N h(x) &= \sum_{-N}^N \hat{h}(n) e^{2\pi inx} = \sum_{\substack{|n| \leq N \\ (n \text{ impar})}} \frac{-2i}{\pi n} e^{2\pi inx} \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ impar})}}^N -\frac{2i}{\pi n} (e^{2\pi inx} - e^{-2\pi inx}) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ impar})}}^N \frac{4}{\pi n} \text{sen}(2\pi nx). \end{aligned}$$

En particular,  $S_{2N-1}h(x) = \sum_{n=1}^N \frac{4}{\pi(2n-1)} \text{sen}(2\pi(2n-1)x)$ . Se puede ver que el primer punto crítico de esta función se da en  $x = \frac{1}{4N}$ . Además, llamando  $x_n = \frac{2n-1}{4N}$ , obtenemos por la teoría de sumas de Riemann

$$S_{2N-1}h\left(\frac{1}{4N}\right) = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N \frac{4}{2\pi x_n} \text{sen}(2\pi x_n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 4 \int_0^{1/2} \frac{\text{sen}(2\pi x)}{2\pi x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen } t}{t} dt.$$

El valor de esta última integral es  $1,178979744 \dots = 1 + 2 \times 0,089489872 \dots$ , que representa una variación del 9% del salto de la función (en este caso el salto es 2).



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

## Capítulo 6

# Transformada de Fourier en $\mathbb{R}$

### 6.1. Definiciones

Recordamos que si  $G$  es un grupo topológico, se define su *grupo dual* como la clase  $\widehat{G} = \{L : G \rightarrow \mathbb{C} : L \text{ aplicación continua tal que } |L(x)| = 1, L(x+y) = L(x)L(y) \forall x, y\}$ . A los elementos de  $\widehat{G}$  se les denomina caracteres. En nuestro caso:

Si  $G = \mathbb{T}$ ,  $\widehat{\mathbb{T}} = \{L : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } L(\theta) = e^{2\pi i n \theta}, \forall \theta\}$ . De esta forma el grupo dual de  $\mathbb{T}$  se puede identificar con  $\mathbb{Z}$ .

Por otro lado, Si  $G = \mathbb{R}$ ,  $\widehat{\mathbb{R}} = \{L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \exists \xi \in \mathbb{R} \text{ tal que } L(x) = e^{2\pi i x \cdot \xi}, \forall x \in \mathbb{R}\}$ . De esta forma el grupo dual de  $\mathbb{R}$  se puede identificar consigo mismo.

**DEFINICIÓN 6.1** La transformada de Fourier para  $f \in L^1(\mathbb{R})$  se define como

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Es por tanto la integral de la función  $f$  contra los caracteres del grupo dual.

También podemos definir la transformada en varias dimensiones para cada  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ , interpretando el producto  $x \cdot \xi$  en el sentido vectorial:

si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ , entonces  $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_N \xi_N$ .

Estudiamos las primeras propiedades relevantes de la transformada de Fourier en  $L^1$

**PROPOSICIÓN 6.1** Si  $f \in L^1$  se tiene

i)  $\widehat{f} \in L^\infty$ ; de hecho  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$iv) \widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$$

$$v) \int f(y) \widehat{g}(y) dy = \int \widehat{f}(y) g(y) dy$$

*Demostración* El apartado *i)* es inmediato. Para *ii)* observamos

$$\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi) = \int f(x) \left( e^{-2\pi i x(\xi+h)} - e^{-2\pi i x \xi} \right) dx.$$

Cuando  $h \rightarrow 0$ , el integrando converge a 0 y está acotado puntualmente por  $2|f(x)|$  independiente de  $h$ . Usando el TCD se sigue  $\lim_{h \rightarrow 0} (\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)) = 0$ , lo que implica la continuidad de  $f$ .

Para *iii)* usaremos que  $e^{-i\pi} = -1$ :

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \left( \frac{1 - e^{-\pi i}}{2} \right) dx \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \left( x + \frac{1}{2\xi} \right)} dx \right| \\ &\stackrel{\bar{x} = x + \frac{1}{2\xi}}{\leq} \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}} \left( f(x) - f \left( x - \frac{1}{2\xi} \right) \right) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - f \left( x - \frac{1}{2\xi} \right) \right| dx = \frac{1}{2} \| f - \tau_{\frac{1}{2\xi}} f \|_{L^1} \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0, \end{aligned}$$

donde  $\tau_{\frac{1}{2\xi}}$  denota el operador traslación que, como sabemos, es continuo en 0 para la norma de  $L^1$ .

Finalmente *iv)* y *v)* se deducen ambos del Teorema de Fubini. Por un lado

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int \int f(x) g(y - x) e^{-2\pi i y \xi} dx dy = \int f(x) e^{-2\pi i x \xi} \left( \int g(y - x) e^{-2\pi i (y-x) \xi} dy \right) dx \\ &= \int f(x) e^{-2\pi i x \xi} \left( \int g(y) e^{-2\pi i y \xi} dy \right) dx = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi), \end{aligned}$$

y por otro

$$\int f(y) \widehat{g}(y) dy = \int f(y) \int g(x) e^{-2\pi i x y} dx dy = \int g(x) \int f(y) e^{-2\pi i x y} dy dx = \int g(x) \widehat{f}(x) dx.$$

■

## 6.2. La clase de Schwartz

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

es decir,

$$f \in L^2 \quad \Leftrightarrow \quad \int |f(x)e^{-2\pi i x \xi}| dx < \infty.$$

Por otro lado la transformada de Fourier no deja  $L^1$  invariante. Así por ejemplo, la función  $f(x) = \chi_{(-1/2, 1/2)}(x) \in L^1 \cap L^2$  tiene como transformada

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{e^{-\pi i \xi} - e^{\pi i \xi}}{-2\pi i \xi} = \frac{\operatorname{sen} \pi \xi}{\pi \xi}.$$

No es difícil ver que esta función verifica  $\widehat{f} \in L^2 \setminus L^1$ . La idea para resolver este problema es definir la transformada sobre una subclase de funciones contenida en  $L^1 \cap L^2$ , que sea densa en  $L^2$  y luego extender la definición a todo el espacio. Esa clase de funciones va a ser la clase de Schwartz, que se define de la siguiente forma:

**DEFINICIÓN 6.2** Se define la clase de Schwartz como :

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty : \forall m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, |x|^m |D^k f(x)| \leq C_{m,k} < \infty, \forall x \right\},$$

en donde  $D^k$  denota el operador diferencial  $\left(\frac{d}{dx}\right)^k$ .

Las siguientes **propiedades de  $\mathcal{S}$**  son inmediatas:

1. Si  $f \in \mathcal{S}$ , para todo polinomio,  $p(x)$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |p(x)f(x)| = 0$ .
2. Si  $f \in \mathcal{S}$ , entonces  $D^k f \in \mathcal{S}, \forall k$ .
3.  $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$ .
4.  $C_c^\infty \subset \mathcal{S}$ .
5.  $\mathcal{S}$  es densa en  $L^p, \forall 0 < p < \infty$ .

**Ejemplo :** Vamos a calcular la transformada de Fourier de  $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$ . Recordamos primero que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi|t|^2} dt = 1$  y que por tanto  $\widehat{g}(0) = 1$ . Como  $\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$ , por el TCD

$$\frac{d\widehat{g}}{d\xi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x|^2} (-2\pi i x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = i \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \left( e^{-\pi|x|^2} \right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Integrando por partes,

$$\frac{d\widehat{g}}{d\xi}(\xi) = i(2\pi i \xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = -2\pi \xi \widehat{g}(\xi).$$

Esto nos da una sencilla EDO cuya solución viene dada por  $\widehat{g}(\xi) = \widehat{g}(0)e^{-\pi|\xi|^2}$ . Por tanto  $\widehat{g} = g$ .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

### 6.3. Relación entre la transformada de Fourier y la derivación

**LEMA 6.3** Dada  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , si además se cumple que  $\exists \frac{df}{dx} \in L^1(\mathbb{R})$  y  $f \in C_0$ , entonces

$$\left(\frac{d}{dx}f\right)^\wedge(y) = 2\pi iy \widehat{f}(y)$$

Por inducción deducimos

**COROLARIO 6.4** Si  $f \in \mathcal{S}$ ,

- $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^k f\right]^\wedge(y) = (2\pi iy)^k \widehat{f}(y)$ .
- Con más generalidad, si  $P$  denota el polinomio  $P(t) = a_m t^m + \dots + a_1 t + a_0$ , entonces

$$P(\widehat{D})\widehat{f}(y) = P(2\pi iy)\widehat{f}(y).$$

*Demostración del Lema 6.3:* Queremos probar que  $(f')^\wedge(y) = (2\pi iy)\widehat{f}(y)$ . Pero esto es inmediato integrando por partes y usando que, por hipótesis,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ :

$$(f')^\wedge(y) = \int f'(x)e^{-2\pi ixy} dx = 2\pi iy \int f(x)e^{-2\pi ixy} dx = (2\pi iy)\widehat{f}(y).$$

■

**LEMA 6.5** Si  $f \in L^1$ ,  $x \cdot f(x) \in L^1$ , entonces existe  $\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$  y vale

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = \int (-2\pi ix)f(x)e^{-2\pi ix\xi} dx,$$

es decir,

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = [-2\pi i(\cdot)f(\cdot)]^\wedge(\xi).$$

**COROLARIO 6.6** Si  $f \in \mathcal{S}$ , entonces  $\widehat{f} \in C^\infty$  y dado  $P$ , un polinomio en  $n$  variables,

$$P(\widehat{D})\widehat{f}(y) = (P(-2\pi i \cdot)f)^\wedge(y).$$

*Demostración del Lema 6.5:* Se tiene

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int f(x) \frac{e^{-2\pi ix(\xi+h)} - e^{-2\pi ix\xi}}{h} dx.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

independientemente de  $h$ , por el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$\frac{d}{dy} \widehat{f}(y) = \int f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-2\pi i x(y+h)} - e^{-2\pi i x y}}{h} dx = \int (-2\pi i x) f(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

■

**TEOREMA 6.7** *La transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  es una aplicación lineal que preserva la clase  $\mathcal{S}$ .*

*Demostración* La linealidad, es decir, el que  $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$ , es inmediata a partir de la definición. Dada  $f \in \mathcal{S}$  queremos probar que  $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ . Ya sabemos por el Corolario 6.6 que  $\widehat{f} \in C^\infty$ . Nos falta probar que dados  $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  entonces

$$\left| y^m D^k \widehat{f}(y) \right| \leq C_{m,k} < \infty, \quad \forall y.$$

Por los corolarios anteriores, si  $P_m(x) = x^m$  y  $P_k(x) = x^k$  se tiene

$$\begin{aligned} \left| y^m D^k \widehat{f}(y) \right| &= \left| \frac{1}{(2\pi i)^m} P_m(2\pi i y) (P_k(-2\pi i \cdot) f(\cdot))^\wedge (y) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{(2\pi i)^m} [P_m(D) (P_k(-2\pi i \cdot) f(\cdot))]^\wedge (y) \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left| D^m \left( (2\pi i x)^k f(x) \right) \right|}_{\in \mathcal{S}} dx = C_{m,k} < \infty. \end{aligned}$$

■

### 6.4. Teorema de inversión de la transformada de Fourier

**TEOREMA 6.8 (Teorema de Inversión en  $\mathcal{S}$ )** *La transformada de Fourier  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  es biyectiva con la inversa dada por  $\mathcal{F}^{-1} f(x) = \mathcal{F} f(-x) = \widehat{f}(-x)$*

**Notación** Se define la transformada inversa de Fourier para  $f \in L^1$  de la siguiente forma

$$\check{f}(x) = \int f(y) e^{2\pi i x \cdot y} dy$$

**Observación:** Como  $\check{f}(x) = \widehat{f}(-x)$ , las propiedades de la transformada inversa de Fourier se deducen de las propiedades de la transformada de Fourier. En particular  $\check{\cdot} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Recordamos que si  $g(x) = e^{-\pi x^2}$ , entonces  $\widehat{g} = g = g^\vee$  (esto último por ser una función par) y que  $g_t(x) = \frac{1}{t}g\left(\frac{x}{t}\right)$  es un núcleo de sumabilidad para  $t \rightarrow 0$ . Por tanto si  $f \in \mathcal{S}$

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f * g_t(x), \quad \text{entendiendo el límite tanto puntualmente como en norma.}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} f * g_t(x) &= \int f(y) \frac{1}{t} g\left(\frac{x-y}{t}\right) dy \stackrel{g=\widehat{g}}{=} \int f(y) \frac{1}{t} \widehat{g}\left(\frac{x-y}{t}\right) dy = \\ &= \int f(y) \left( \int \frac{1}{t} g(u) e^{2\pi i u \left(\frac{x-y}{t}\right)} du \right) dy \stackrel{u=\frac{v}{t}}{=} \int f(y) \left( \int g(vt) e^{2\pi i v(x-y)} dv \right) dy = \\ &= \int \left( \int f(y) e^{-2\pi i v y} \right) g(vt) e^{2\pi i v x} dv = \int \widehat{f}(v) g(tv) e^{2\pi i v x} dv. \end{aligned}$$

Usando el TCD

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f * g_t(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int \widehat{f}(v) \underbrace{g(tv)}_{g(0)=1} e^{2\pi i v x} dv = \int \widehat{f}(v) e^{2\pi i v x} dv$$

NOTA: obsérvese que para el resultado no hace falta que  $f \in \mathcal{S}$  sino solamente  $f, \widehat{f} \in L^1$ . ■

**TEOREMA 6.9** La transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico en  $\mathcal{S}$  con la norma de  $L^2$ , es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S} &\mapsto \mathcal{S} \\ f &\mapsto \widehat{f}, \end{aligned}$$

verifica,  $\forall f, g \in \mathcal{S}$ ,

$$1. \text{ la identidad de Parseval: } \langle f, g \rangle = \int f \bar{g} = \int \widehat{f} \widehat{\bar{g}} = \langle \widehat{f}, \widehat{\bar{g}} \rangle$$

$$2. \text{ la identidad de Plancherel: } \|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$$

*Demostración* Basta probar la identidad de Parseval. Para ello recordamos la Proposición 6.1 v): si  $f, h \in L^1$ ,  $\int f \widehat{h} = \int \widehat{f} h$ .

Dadas  $f, g \in \mathcal{S}$ , tomamos  $h = \widehat{\bar{g}}$ . De esta forma se tiene  $h \in \mathcal{S}$  y  $\widehat{h} = \bar{g}$ . Luego por el

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

### 6.5. Extensión a $L^2$ de la transformada de Fourier

**Ejemplo** (repetido): Sea  $f = \chi_{(-1,1)}$ . Claramente  $f \in L^1 \cap L^2$  y se tiene

$$\widehat{f}(y) = \int_{-1}^1 e^{-2\pi ixy} dx = \frac{1}{-2\pi iy} e^{-2\pi ixy} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{e^{2\pi iy} - e^{-2\pi iy}}{2\pi iy} = \frac{\text{sen}(2\pi y)}{\pi y}.$$

Esta función no está en  $L^1$  porque

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\text{sen}(2\pi y)}{\pi y} \right| dy = \infty.$$

Sin embargo, sí está en  $L^2$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\text{sen}(2\pi y)}{\pi y} \right|^2 dy < \infty.$$

Nos preguntamos que si  $\widehat{f} = \widehat{\chi}_{(-1,1)} \notin L^1$ , ¿cómo podemos definir  $(\widehat{f})^\vee$  y concluir que vale  $f$ ?

En general si  $g \in L^2$ , pero no es integrable, ¿cómo definimos  $\widehat{g}(y) = \int g(x)e^{-2\pi ixy} dx$ ? La respuesta viene dada por la siguiente

**DEFINICIÓN 6.3** Sea  $g \in L^2$ . Como  $\mathcal{S}$  es densa en  $L^2$ , existe una sucesión  $\{g_n\} \subset \mathcal{S}$  tal que  $g_n \xrightarrow{L^2} g$  (i.e.  $\|g_n - g\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ). Por tanto,  $\{g_n\}$  es de Cauchy. Entonces  $\{\widehat{g}_n\} \subset \mathcal{S}$ , también es de Cauchy ya que

$$\|\widehat{g}_n - \widehat{g}_m\|_{L^2} = \|\widehat{g_n - g_m}\|_{L^2} \stackrel{\text{Plancherel}}{=} \|g_n - g_m\|_{L^2} \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

Como  $L^2$  es completo,  $\{\widehat{g}_n\}$  tiene límite en  $L^2$  y a este límite lo llamaremos la transformada de Fourier de  $g$ , es decir

$$\widehat{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g}_n.$$

**TEOREMA 6.10** En las condiciones anteriores se tiene:

1. La definición anterior es consistente, es decir, no depende de la sucesión  $\{g_n\}$  de  $\mathcal{S}$  elegida.
2. La definición anterior define un isomorfismo isométrico en  $L^2$ , es decir

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R}),$$

es lineal u biyectiva. Además cumple:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



1. Supongamos que  $\exists \{g_n\} \subset \mathcal{S}$ ,  $\{h_n\} \subset \mathcal{S}$  tales que  $h_n \xrightarrow{L^2} g \xleftarrow{L^2} g_n$  y queremos ver que  $\widehat{h_n} \xrightarrow{L^2} \widehat{g} \xleftarrow{L^2} \widehat{g_n}$ . Ya sabemos de la existencia del límite en ambos casos, pero queremos asegurarnos de que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{h_n}$ . Esto se sigue de la identidad de Plancherel:

$$\|\widehat{g_n} - \widehat{h_n}\|_{L^2} = \|g_n - h_n\|_{L^2} \leq \|g_n - g\|_{L^2} + \|g - h_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2.  $\mathcal{F}$  es lineal: dadas  $f, g \in L^2$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , elegimos

$$\mathcal{S} \ni g_n \xrightarrow{L^2} g, \quad \mathcal{S} \ni f_n \xrightarrow{L^2} f.$$

Entonces se tiene, por un lado  $\alpha g_n + \beta f_n \xrightarrow{L^2} \alpha g + \beta f$  y  $\alpha \widehat{g_n} + \beta \widehat{f_n} \xrightarrow{L^2} \alpha \widehat{g} + \beta \widehat{f}$  y por otro

$$\alpha \widehat{g_n} + \beta \widehat{f_n} = \alpha \widehat{g_n} + \beta \widehat{f_n} \begin{cases} \xrightarrow{L^2} \alpha \widehat{g} + \beta \widehat{f}, \\ \xrightarrow{L^2} \alpha \widehat{g} + \beta \widehat{f}. \end{cases}$$

Esto nos da la linealidad. Para probar el teorema de inversión, dada  $g \in L^2$  se define  $g^\vee$  de la misma manera:  $\mathcal{S} \ni g_n \xrightarrow{L^2} g$ ,  $\{g_n^\vee\}$  tiene límite en  $L^2$ , lo llamaremos  $g^\vee$  y es la inversa porque

$$g_n \xrightarrow{L^2} g, \quad \widehat{g_n} \xrightarrow{L^2} \widehat{g},$$

luego

$$g_n = (\widehat{g_n})^\vee \xrightarrow{L^2} (\widehat{g})^\vee. \text{ Como } g_n \xrightarrow{L^2} g, \text{ se sigue } (\widehat{g})^\vee = g.$$

Plancherel y Parseval se deducen del correspondiente resultado en  $\mathcal{S}$  y de la continuidad del producto escalar:

$$\mathcal{S} \ni f_n \xrightarrow{L^2} f, \quad \mathcal{S} \ni g_n \xrightarrow{L^2} g, \\ \langle f, g \rangle = \langle f_n, g_n \rangle = \langle \widehat{f_n}, \widehat{g_n} \rangle \longrightarrow \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle, \quad \text{luego} \quad \langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle.$$

■

## 6.6. La Transformada de Fourier y las ecuaciones “elementales” de la Física

En el último capítulo mostramos como utilizar la transformada de Fourier para el estudio de ciertas ecuaciones en Derivadas Parciales de valores iniciales en  $\mathbb{R}_+^{N+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^N, t > 0\}$

$$\begin{cases} \square_{x,t} u(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x, t) = 0, & |x| = R, t > 0, \end{cases}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

En esta sección sin embargo trataremos solamente las dos primeras (calor y Laplace) en el caso unidimensional (N=1).

### 6.6.1. La ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta_x u(x,t) = P(D)u(x,t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde  $P(x) = x^2$ . Fijamos  $t$  y llamamos  $V^t(x) = u(x,t)$

Calculamos la transformada de Fourier con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{V^t}(\xi) = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi) = \widehat{\Delta u} = P(2\pi i \xi) \widehat{V^t}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{V^t}(\xi)$$

$$\widehat{V^0}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$

Fijamos  $\xi$  y escribimos  $y(t) = \widehat{V^t}(\xi)$ .

Nos queda una EDO de orden 1 :  $\begin{cases} y'(t) = -4\pi |\xi|^2 y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi), \end{cases}$

cuya solución es:  $y(t) = \widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}$ . Buscamos una función cuya transformada de Fourier sea  $e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}$ .

**Nota.** Si  $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces llamando  $h_t(x) = \frac{1}{t} h\left(\frac{x}{t}\right)$  se tiene  $\widehat{h}_t(\xi) = \widehat{h}(t\xi)$ .

Sabemos que si  $g(x) = e^{-\pi |x|^2}$ , entonces  $\widehat{g}(\xi) = e^{-\pi |\xi|^2}$ . Poniendo  $s = (4\pi t)^{1/2}$ , tenemos

$$e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} = e^{(-4\pi t)\pi |\xi|^2} = e^{-\pi |s\xi|^2} = \widehat{g}(s\xi) = \widehat{g}_s(\xi)$$

La función que buscamos es por tanto

$$g_s(x) = \frac{1}{s} g\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = G_t(x) : \text{ Núcleo del Calor}$$

Hemos probado  $\widehat{G}_t(\xi) = e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}$ , y de esta forma se tiene

$$\widehat{V^t}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{G}_t(\xi) = \widehat{f * G_t}(\xi).$$

Luego

$$u(x,t) = V^t(x) = f * G_t(x)$$

Por tanto, la solución de la ecuación del calor, con dato inicial  $f$  es:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Propiedades de la solución  $u(x, t)$ . Sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

1.  $G_t(x) \in \mathcal{S}$ , luego  $u(x, t) \in C^\infty$ ,  $\forall t > 0$ .
2.  $G_t$  es la solución fundamental de la ecuación del calor.

**Ejercicio:** Probar directamente:  $\frac{\partial}{\partial t} G_t(x) = \Delta_x G_t(x)$ .

3.  $\{G_t\}_{t>0}$  es un núcleo de sumabilidad para  $t \rightarrow 0^+$ . Por tanto

$$G_t * f \longrightarrow f \begin{cases} \text{Uniformemente continua si } f \text{ es unif. continua.} \\ \text{Puntualmente si } f \text{ continua y acotada.} \\ \text{En norma } L^p \text{ si } f \in L^p \text{ y } 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

Además si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < \infty$

$$G_t(x) * f \xrightarrow{t \rightarrow 0} f \text{ puntualmente c.t.p.}$$

Para ello se usa el mismo argumento que en el Teorema de diferenciación de Lebesgue a través del operador de Hardy-Littlewood.

### 6.6.2. La ecuación de Laplace

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta_x u(x, t) = \Delta_{x,t} u(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Fijamos  $t$ , y llamamos como antes  $V^t(x) = u(x, t)$ . Tomamos la transformada de Fourier en  $x$ :  $\partial_{tt} \widehat{V}^t(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{V}^t(\xi)$ . Fijemos  $\xi$  y sea  $y(t) = \widehat{V}^t(\xi)$ , resultando una EDO:

$$\begin{cases} y''(t) = -4\pi^2 |\xi|^2 y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$$

El polinomio característico es  $r^2 - 4\pi^2 |\xi|^2 = 0 \iff (r - 2\pi |\xi|)(r + 2\pi |\xi|) = 0$ , y las soluciones asociadas son  $e^{\pm 2\pi |\xi| t}$ . Elegimos la solución acotada para  $t > 0$ :

$$y(t) = \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi |\xi| t}.$$

Definimos ahora

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + |x|^2}, \text{ (Núcleo de Poisson)} \quad \text{de forma que} \quad \int_{\mathbb{R}} P(x) dx = 1.$$

Entonces, como veremos,  $\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi |\xi|}$ . En particular, si llamamos  $P_t(x) = \frac{1}{t} P\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t} \frac{t}{x^2 + t^2}$  se tiene

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

$$V^t(x) = u(x, t) = f * P_t(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{t}{t^2 + (x - y)^2} dy.$$

Propiedades de la solución  $u(x, t)$ . Sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

De nuevo nos preguntamos por las propiedades de  $u(x, t)$  para  $t \rightarrow 0^+$ .

1.  $P \in C^\infty$  pero  $P \notin \mathcal{S}$  porque  $\widehat{P} \notin C^\infty$ . Aun así,  $u(x, t) \in C^\infty, \forall t > 0$ .
2.  $P_t$  es solución fundamental porque

$$\begin{cases} \partial_{tt} [P_t(x)] + \Delta_x [P_t(x)] = 0, \\ P_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \delta_0. \end{cases}$$

3.  $\{P_t\}_{t>0}$  es un núcleo de sumabilidad para  $t \rightarrow 0^+$ , porque

$$P_t = \frac{1}{t} P\left(\frac{\cdot}{t}\right), \quad P \geq 0 \quad y \quad \int P = 1$$

En particular,

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x) \begin{cases} \text{Puntualmente,} & \text{si } f \in C \text{ y acotada,} \\ \text{Uniformemente,} & \text{si } f \in C_0, \\ \text{En norma } L^p, & \text{si } f \in L^p \text{ y } 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

Como en el caso de la ecuación del calor también se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x) \text{ en c.t.p. } x \text{ si } f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad 1 \leq p < \infty$$

Para ver que  $\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$ , basta con probar que si  $F(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$  entonces  $F^\vee(x) = \widehat{F}(x) = P(x)$ , porque  $F, P \in L^1$ .

*Demostración* (Usamos integración compleja, cuya justificación es sencilla pero se deja a los interesados).

$$\begin{aligned} F^\vee(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|\xi|} e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_0^\infty e^{-2\pi(1-ix)\xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi(1-ix)\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi(1-ix)} + \frac{1}{2\pi(1+ix)} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2}{(1+ix)^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{1+x^2} \right) \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, irregular shape that resembles a splash or a stylized 'C'. Below the text is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

## Capítulo 7

# Las ecuaciones “elementales” de la Física

En este capítulo mostramos como utilizar la transformada de Fourier para el estudio de ciertas ecuaciones en Derivadas Parciales de valores iniciales en  $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$  de la forma

$$\begin{cases} \square_{x,t} u(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

En concreto, estamos interesados en el problema de la convergencia al dato inicial de las soluciones; es decir, en qué sentido se tiene  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$ . Como ejemplos, estudiaremos la ecuación del calor, la de ondas, la de Laplace y la de Schrödinger.

### 7.1. La ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u = P(D)u \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad \text{Donde } x = (x_1, \dots, x_n); \quad P(D) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

Fijamos  $t$ :  $V^t(x) = u(x, t)$

Calculamos la transformada de Fourier con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{V}^t = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = \widehat{\Delta u} = P(2\pi i \xi) \widehat{V}^t(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{V}^t(\xi)$$

$$\widehat{V}^0(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$

Fijamos  $\xi$ ,  $y(t) = \widehat{V}^t(\xi)$

Nos queda una EDO de orden 1:  $\begin{cases} y'(t) = -4\pi^2 |\xi|^2 y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

Sabemos que si  $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$ , entonces  $\widehat{g}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$ . Poniendo  $s = (4\pi t)^{1/2}$ , tenemos

$$e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} = e^{(-4\pi t)\pi |\xi|^2} = e^{-\pi |s\xi|^2} = \widehat{g}(s\xi) = \widehat{g}_s(\xi)$$

La función que buscamos es por tanto

$$g_s(x) = \frac{g\left(\frac{x}{s}\right)}{s^n} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = G_t(x) : \text{ Núcleo del Calor}$$

Hemos probado  $\widehat{G}_t(\xi) = e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}$ , y de esta forma se tiene

$$\widehat{V}^t(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{G}_t(\xi) = \widehat{f * G}_t(\xi).$$

Luego

$$u(x, t) = V^t(x) = f * G_t(x)$$

Por tanto, la solución de la ecuación del calor, con dato inicial  $f$  es:

$$u(x, t) = G_t * f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

Propiedades de la solución  $u(x, t)$ . Sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Observación:**  $G_t(x) \in \mathcal{S}$ , luego  $u(x, t) \in C^\infty$ ,  $\forall t > 0$ .

**1º Paso:** Si  $u(x, t) = G_t * f(x)$ , se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial t} (G_t * f) = \left( \frac{\partial}{\partial t} G_t \right) * f(x)$$

$$\Delta u = \Delta (G_t * f) = (\Delta G_t) * f(x)$$

**Ejercicio:**  $\frac{\partial}{\partial t} G_t(x) = \Delta_x G_t(x)$ .

$G_t$  es la solución fundamental de la ecuación del calor, luego  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ .

**2º Paso:**  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$  ¿En que sentido? (en norma, puntual, uniforme...).

$\{G_t\}_{t>0}$  es un núcleo de sumabilidad para  $t \rightarrow 0^+$ :

Llamemos  $h(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ ,  $G_t(x) = \frac{1}{t^{n/2}} h\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right)$ , con  $h \in L^1$ ,  $\int h = 1$  y  $h \geq 0$ , por tanto

$$\int_{|x|>\delta} G_t(x) dx \rightarrow 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Además si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < \infty$

$$G_t(x) * f \xrightarrow{t \rightarrow 0} f \text{ puntualmente c.t.p.}$$

Para ello observamos que  $G_t(x)$  es par, radial, decreciente y  $\int_{\mathbb{R}^n} G_t(x) dx = 1$ . El siguiente resultado nos dice que la convolución está acotada por el operador de **Hardy-Littlewood**, es decir  $|G_t * f(x)| \leq \mathcal{M}f(x)$ ,  $\forall t > 0$ .

**LEMA 7.1** Si  $K$  es una función positiva,  $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , radial y decreciente, es decir  $\exists K_0 : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , decreciente tal que  $K(x) = K_0(|x|)$ , entonces  $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  se tiene

$$|K * f| \leq 2 (\|K\|_{L^1}) \mathcal{M}f(x)$$

**Consecuencia:** Si  $\{K_t\}_t$  es un núcleo de sumabilidad para  $t \rightarrow a^+$  donde cada  $K_t$  es radial y decreciente se tiene

$$\sup_t |K_t * f(x)| \leq C \mathcal{M}f$$

y por tanto (usando el mismo argumento que en la demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue) se tiene que

$$k_t * f(x) \xrightarrow{t \rightarrow a^+} f(x) \text{ c.t.p.}$$

si  $f \in L^p$   $1 \leq p < \infty$ , como anunciábamos (ver el argumento con detalle en la siguiente sección).

*Demostración del Lema:* Por ser radial y decreciente, en particular el conjunto de nivel  $A_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : K(x) > \lambda\}$  es una bola centrada en el origen. Recordemos que

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{x+B_r} |f(y)| dy = \sup_{r>0} \left( |f| * \frac{1}{|B_r|} \chi_{B_r}(x) \right)$$

Para  $k \in \mathbb{Z}$ , sea  $A_k = \{x : K(x) > 2^k\}$ ,  $A_k$  es una bola y  $\dots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \dots$ . Además se tiene,  $K(x) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \chi_{A_n}(x)$ , porque si  $2^{k_0} < K(x_0) \leq 2^{k_0+1}$  entonces  $x_0 \in A_k$   $\forall k \leq k_0$ , lo que implica

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \chi_{A_k}(x_0) = \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^k = \frac{2^{k_0}}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{k_0+1} \geq K(x).$$

Así



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Solo falta por probar

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k |A_k| \leq 2 \|K\|_{L^1}.$$

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k |A_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k (|A_k \setminus A_{k+1}| + |A_{k+1}|) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k |A_k \setminus A_{k+1}| + 1/2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1} |A_{k+1}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k |A_k \setminus A_{k+1}| + \frac{I}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k |A_k \setminus A_{k+1}| \right) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{A_k \setminus A_{k+1}} 2^k dx \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{A_k \setminus A_{k+1}} K(x) dx = 2 \int_{\mathbb{R}^n} K(x) dx = 2 \|K\|_{L^1} \end{aligned}$$

■

## 7.2. La ecuación de Laplace

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta_x u = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \text{ donde } x = (x_1, \dots, x_n)$$

Fijamos  $t$ , y llamamos  $v_t(x) = u(x, t)$ . Tomamos la transformada de Fourier en  $x$ :  $\partial_{tt} \widehat{v}_t(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{v}_t(\xi)$ . Fijemos  $\xi$  y sea  $y(t) = \widehat{v}_t(\xi)$ , resultando una EDO:

$$\begin{cases} y''(t) = -4\pi^2 |\xi|^2 y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$$

El polinomio característico es  $r^2 - 4\pi^2 |\xi|^2 = 0 \iff (r - 2\pi |\xi|)(r + 2\pi |\xi|) = 0$ , y las soluciones asociadas son  $e^{\pm 2\pi |\xi| t}$ . Elegimos la solución acotada para  $t > 0$ :

$$y(t) = \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi |\xi| t}.$$

Escribiremos

$$P(x) = c_n \left( \frac{1}{1 + |x|^2} \right)^{\frac{n+1}{2}},$$

donde  $c_n$  es la constante que hace que  $\int P(x) dx = 1$ , es decir

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

Entonces, como veremos,  $\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$ . En particular, si llamamos  $P_t(x) = \frac{P(\frac{x}{t})}{t^n}$  se tiene

$$\widehat{P}_t(\xi) = \widehat{P}(t\xi) = e^{-2\pi|\xi|t},$$

es decir

$$y(t) = \widehat{v}_t(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{P}_t(\xi) = \widehat{f * P_t}(\xi).$$

Finalmente, por el teorema de inversión:

$$v_t(x) = u(x, t) = f * P_t(x)$$

De nuevo nos preguntamos por las propiedades de  $u(x, t)$  para  $t \rightarrow 0^+$ .

**Justificación:**  $\{P_t\}_{t>0}$  es un núcleo de sumabilidad para  $t \rightarrow 0^+$ , porque

$$P_t = \frac{1}{t^n} P\left(\frac{\cdot}{t}\right), \quad P \geq 0 \text{ y } \int P = 1$$

$$P(x) = c_n \left(\frac{1}{1 + |x|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \quad \text{se le llama **Núcleo de Poisson**}$$

**Nota:** Es diferente al del caso periódico.

En particular,

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x) \begin{cases} \text{Puntualmente si } f \in C \text{ y acotada} \\ \text{Uniformemente si } f \in C_0 \\ \text{En norma } L^p \text{ si } f \in L^p \text{ y } 1 \leq p < \infty \end{cases}$$

Además  $P$  es radial y decreciente, por tanto  $P_t$  también, así:

$$\sup_{t>0} |u(x, t)| = \sup_{t>0} |P_t * f(x)| \leq \mathcal{M}f(x) \quad : \text{ operador de H-L}$$

y se deduce que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x) \quad \text{en c.t.p. } x \text{ si } f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad 1 \leq p < \infty$$

- $P \in C^\infty \setminus \mathcal{S}$  y  $\widehat{P} \notin C^\infty$  porque  $\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$
- $P_t$  es solución fundamental porque

$$\begin{cases} \partial_{tt} [P_t(x)] = -\Delta_x [P_t(x)] \\ P_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \delta_0 \end{cases}$$

Para ver que  $\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$ , basta con probar que si  $F(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$  entonces  $F^\vee(x) = \widehat{F}(x) = P(x)$ , porque  $F, P \in L^1$ .

*Demostración* El caso  $n = 1$  (ver el Capítulo 6).

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





**NOTA:** Detallamos aquí el argumento de por qué la acotación

$$\sup |P_t * f(x)| \leq \mathcal{M}f(x)$$

nos da la convergencia

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P_t * f(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.} \quad \text{si } f \in L^p, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Si  $f \in C_c$  el resultado es cierto porque  $\{P_t\}_{t>0}$  es núcleo de sumabilidad.

Solo necesitamos probar por tanto que

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} P_t * f(x) \quad \text{c.t.p.} \quad (\text{si } f \in L^p).$$

Si sabemos que existe, como también  $P_t * f \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$  en norma  $L^p$ , ese límite puntual debe ser  $f$ , es decir, si  $P_t * f \xrightarrow{L^p} f$  entonces existe una subsucesión tal que  $P_{t_k} * f \rightarrow f$ , y como existe el límite y es único, entonces  $P_t * f \rightarrow f$  en c.t.p..

Luego lo que tenemos que probar es

$$\limsup P_t * f = \liminf P_t * f \quad \text{c.t.p.}$$

es decir, que el conjunto

$$A_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : \limsup P_t * f - \liminf P_t * f > \lambda\}$$

tiene medida cero  $\forall \lambda > 0$ .

*Demostración*  $\forall g \in C_c$ .

$$\begin{aligned} |A_\lambda| &= |\{x : \limsup P_t * (f - g)(x) - \liminf P_t * (f - g)(x) > \lambda\}| \leq \\ &\leq |\{x : 2\mathcal{M}(f - g)(x) > \lambda\}| \stackrel{\text{Teor. H-L}}{\leq} \frac{C}{\lambda^p} \int |f - g|^p dx \end{aligned}$$

Dado  $\epsilon > 0$ , elegimos  $g \in C_c$  tal que

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

### 7.3. La ecuación de ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \text{ donde } x = (x_1, \dots, x_n)$$

Para  $t$  fijo, tomamos  $v_t(x) = u(x, t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{v}_t(\xi) = (2\pi i \xi)^2 \widehat{v}_t(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{v}_t(\xi),$$

$$\widehat{v}_0(\xi) = \widehat{f}(\xi) \text{ y } \left. \frac{\partial}{\partial t} \widehat{v}_t(\xi) \right|_{t=0} = \widehat{g}(\xi)$$

Fijamos  $\xi$ ,  $y(t) = \widehat{v}_t(\xi)$ , así resulta una EDO:

$$\begin{cases} y''(t) = -4\pi^2 |\xi|^2 y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi) \\ y'(0) = \widehat{g}(\xi) \end{cases}$$

$$y(t) = a \cos(2\pi |\xi| t) + b \operatorname{sen}(2\pi |\xi| t) = \widehat{f}(\xi) \cos(2\pi |\xi| t) + \frac{\widehat{g}(\xi)}{2\pi |\xi|} \operatorname{sen}(2\pi |\xi| t)$$

reescribiendo:

$$y(t) = \widehat{f}(\xi) \frac{e^{2\pi i |\xi| t} + e^{-2\pi i |\xi| t}}{2} + \frac{\widehat{g}(\xi)}{2\pi |\xi|} \operatorname{sen}(2\pi |\xi| t)$$

**Nota:** Si llamamos el operador de traslación en  $\mathbb{R}$ :

$$\tau_t f(x) = f(x - t) \quad ; \quad \widehat{\tau_t f}(\xi) = e^{2\pi i \xi t} \widehat{f}(\xi)$$

Luego

$$1/2 \widehat{\chi_{(-t,t)}}(\xi) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|}$$

por tanto, en dimensión  $n = 1$

$$\widehat{v}_t(\xi) = y(t) = \frac{1}{2} \left( \widehat{\tau_t f}(\xi) + \widehat{\tau_{-t} f}(\xi) \right) + \widehat{g}(\xi) \frac{1}{2} \widehat{\chi_{(-t,t)}}(\xi)$$

para finalizar, por el teorema de inversión

$$v_t(x) = \frac{1}{2} (\tau_{-t} f(\xi) + \tau_t f(\xi)) + \frac{1}{2} g * \chi_{[-t,t]}(x) =$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u & \text{en } \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g \end{cases}$$

$$\widehat{v}_t(\xi) = \widehat{u}(\xi, t) = \widehat{g}(\xi) \frac{\text{sen}(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$$

$$\frac{\text{sen}(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} = \widehat{\sigma}_t(\xi) \quad \text{con } S_t = \{u \in \mathbb{R}^3 : |u| = t\} \text{ Esfera de radio } t$$

y  $\sigma_t$  es la medida invariante sobre  $S_t$ , normalizada. Finalmente,  $u(x, t) = g * \sigma_t(x)$ .

Convergencia al dato inicial (en dimensión  $n = 1$ ):

$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2} (f'(x+t) - f'(x-t) + g(x+t) + g(x-t))$ : necesitamos que  $f$  sea derivable y que  $g$  sea continua.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{1}{2} (f''(x+t) + f''(x-t) + g'(x+t) - g'(x-t))$ : necesitamos que  $f$  tenga 2 derivadas y que  $g$  sea derivable.

(1)  $u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$  si  $f$  es continua en  $x$  y  $g$  localmente integrable.

(2)  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} g$  si  $f'$  es continua en  $x$  y  $g$  continua en  $x$ .

Los espacios naturales son los espacios de Sobolev. Para (1) necesitamos que  $f \in W^{2,p}$  (dos derivadas en  $L^p$ ) y  $g \in W^{1,r}$  (una derivada en  $L^r$ )

$$\left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : |\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi) \in L^2 \right\} = W^{\alpha,2} \stackrel{\text{notación}}{=} H^\alpha = \left\{ f : (1 + |\xi|^\alpha) |\widehat{f}(\xi)| \in L^2 \right\}$$

**LEMA 7.2**  $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$  es un espacio de Hilbert con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) (1 + |\xi|^\alpha)^2 d\xi$$

y con norma:

$$\|f\|_{H^\alpha} = \left( \int |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^\alpha)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

**LEMA 7.3 (de inmersión de Sobolev.)** Si  $f \in W^{\alpha,p}$ , y  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} > 0$  entonces  $f \in L^q$ . Si se tiene  $\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} < 0$ . Entonces  $W^{\alpha,p} \subset C_0$

*Demostración* Probaremos este segundo caso para  $p = 2$ . Es decir,  $H^\alpha \subset C_0$ , si  $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n} < 0$  ( $\alpha > \frac{n}{2}$ ). Basta probar que si  $f \in H^\alpha \implies \widehat{f} \in L^1$ .

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^\alpha) \frac{d\xi}{1 + |\xi|^\alpha} \stackrel{\text{C-Sw}}{\leq}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

### 7.4. La ecuación de Schrödinger

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i}{2\pi} \Delta_x u \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right. \text{ donde } x = (x_1, \dots, x_n)$$

Fijado  $t$ ,  $v_t(x) = u(x, t)$ .  $\frac{\partial}{\partial t} \widehat{v}_t(\xi) = \frac{i}{2\pi} (2\pi i)^2 |\xi|^2 \widehat{v}_t(\xi) = -2\pi i |\xi|^2 \widehat{v}_t(\xi)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = -2\pi i |\xi|^2 y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi) \end{array} \right.$$

$y(t) = \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i |\xi|^2 t}$ : No tiene propiedades de decaimiento,  $\nexists K \in L^1 \cup L^2$  tal que  $\widehat{K}(\xi) = e^{-2\pi i |\xi|^2 t}$ . Formalmente:

$$u(x, t) = \left( \widehat{v_t(x)} \right)^\vee \stackrel{\text{Tma. Inversión}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i |\xi|^2 t} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

**DEFINICIÓN 7.1** Dada una función medible  $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  se define el operador  $T_m f$  a través de su transformada de Fourier:

$$\widehat{T_m f}(\xi) = m(\xi) \widehat{f}(\xi)$$

Se les conoce como multiplicadores de la transformada de Fourier

**Nota:**  $T_m : L^2 \rightarrow L^2$  es continua si y solo si  $m \in L^\infty$ . (Ver hoja 7 de problemas).

Para la ecuación de Schrödinger,  $m_t(\xi) = e^{-2\pi i |\xi|^2 t}$ .

**TEOREMA 7.4 (Principio de conservación de la energía)** Si  $u_f(x, t)$  es la solución de la ecuación de Schrödinger con dato  $f \in L^2$  se tiene:

1.  $\forall t, \|u_f(\cdot, t)\|_{L^2} = cte$
2.  $\|u_f(\cdot, t) - f\|_{L^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

*Demostración*

1.

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} = \|m_t \widehat{f}\|_{L^2} \stackrel{|m_t(\xi)|=1}{=} \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

2.

$$\int |u_f(x, t) - f(x)|^2 dx = \int |\widehat{f}(\xi) (1 - e^{-2\pi i |\xi|^2 t})|^2 d\xi \leq \int |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

**TEOREMA 7.5** Si  $R > 1$ , entonces existe  $\beta > 0$  tal que

$$\int_{|x| < R} |u_f^*(x)|^2 dx \leq R \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^\beta)^2 d\xi = R \|f\|_{H^\beta}^2$$

**Nota:** El resultado es cierto de forma relativamente sencilla en cualquier dimensión si  $\beta > 1/2$ . Para  $n = 1$  el valor óptimo viene dado por  $\beta = 1/4$  (L. Carleson, 1974). Recientemente se ha demostrado que, para cada  $n \geq 2$ , el valor óptimo viene dado por  $\beta = \beta_n$  con  $1/4 < \beta_n < 1/2$  satisfaciendo además  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1/2$ .

Veamos que este resultado es suficiente para probar la convergencia puntual al dato:

$$u_f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x) \quad \text{c.t.p.} \quad \text{si } f \in H^\beta$$

**Nota:** El resultado es fácil si  $\widehat{f} \in L^1$  (en particular si  $f \in \mathcal{S}$ ), porque entonces por el T.C.D.

$$u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (\widehat{f})^\vee = f \quad \text{puntualmente}$$

En general, como  $u_f(x, t) \rightarrow f(x)$  en  $L^2$ , basta probar que  $\exists \lim_{t \rightarrow 0} u_t(x, t)$  en c.t.p., es decir,  $\forall \lambda > 0$ , se tiene

$$|\{x : |x| < R \quad \limsup u_f(x, t) - \liminf u_f(x, t) > \lambda\}| = 0$$

$\forall g \in \mathcal{S}$  se tiene

$$\begin{aligned} & |\{x : |x| < R \quad \limsup u_{(f-g)}(x, t) - \liminf u_{(f-g)}(x, t) > \lambda\}| \leq \\ & \leq |\{x < R : 2u_{(f-g)}^*(x) > \lambda\}| \stackrel{\text{Chebychev}}{\leq} \frac{4}{\lambda^2} \int_{|x| < R} |u_{(f-g)}^*(x)|^2 dx \leq \\ & \leq \frac{4}{\lambda} CR \|f - g\|_{H^\beta}^2 \end{aligned}$$

Tomando  $g \in \mathcal{S}$  próxima a  $f$  se obtiene el resultado. ■

**TEOREMA 7.6 (Desigualdad de Heisenberg)** Si  $f \in \mathcal{S}$ , se tiene

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} |\xi \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

*Demostración*

$$\int 1 \cdot (f(x))^2 dx \stackrel{dv=dx; u=f^2}{=} - \int 2xf(x)f'(x)dx \leq \int 2|xf(x)||f'(x)|dx \stackrel{\text{C-Sw}}{\leq}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99