Tema 1: Señales en tiempo continuo

SEÑAL: una sola variable indep. $\Rightarrow$ TIEMPO

SISTEMAS: Modifican una señal.

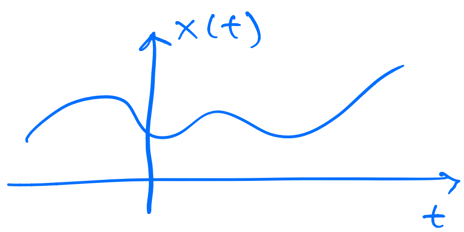
CLASIFICACIÓN

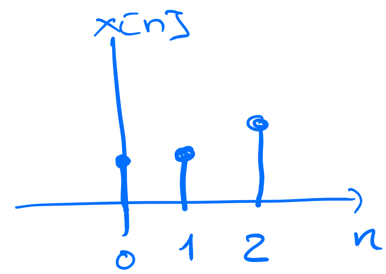
- $\boxed{\text{Tiempo continuo}}$ $\begin{bmatrix} x(t) \in \mathbb{C} \\ x(t) \in \mathbb{R} \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$
- Tiempo discreto

$\Downarrow$

$x[n] \in \mathbb{R}$

$x[n] \in \mathbb{C}$





Ej: $y(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} t\right)$

Ej: T^a en días

SEÑALES DE ENERGÍA Y DE POTENCIA

ENERGÍA

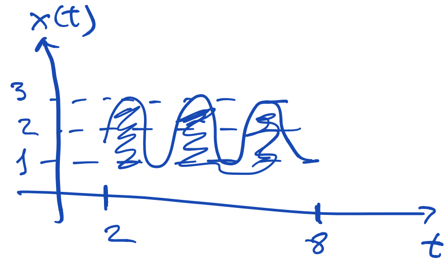
$x(t)$

$$\boxed{E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt} \quad [J]$$

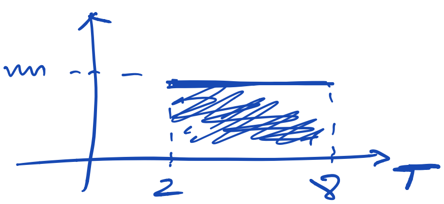
POTENCIA

$$\boxed{P} = \frac{1}{t_2 - t_1} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt}_{E} \quad [W] = [J/s]$$

VALOR MEDIO



$\Rightarrow$ m



Área rectángulo: Base × Altura

$$\text{área} = \int_{t_i}^{t_f} x(t) \, dt = m \cdot T \Rightarrow \boxed{m = \frac{\text{área}}{T}}$$

$$\begin{cases} \langle x(t) \rangle_{[T, t_0]} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} x(\tau) \, d\tau \quad \ldots\ldots \\ \langle x(t) \rangle_{(t_i, t_f)} = \dfrac{1}{t_f - t_i} \displaystyle\int^{t_f} x(\tau) \, d\tau \end{cases}$$

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

$$\Rightarrow m_\infty = \langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(\tau)\, d\tau \right\}$$

3 TIPOS DE SEÑALES:

1) Señales de energía total finita: $\boxed{E_\infty < \infty}$

$$\Rightarrow \boxed{P_\infty} = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} = \emptyset$$

SEÑAL DEFINIDA EN ENERGÍA.

2) Señal con potencia finita: $P_\infty < \infty$

$$\Rightarrow \boxed{E_\infty = \infty}$$

SEÑAL DEFINIDA EN POTENCIA

$\Rightarrow$ Ej: SEÑALES PERIÓDICAS

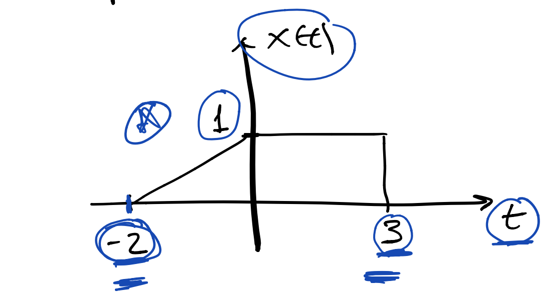
3) Señales para las cuales ni P_∞ ni E_∞ son finitas.

Ej: $x(t) = t$

Tema 1: Señales en tiempo continuo

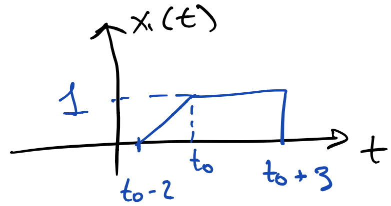
Transformaciones de la variable independiente

1) Desplazamiento en el tiempo



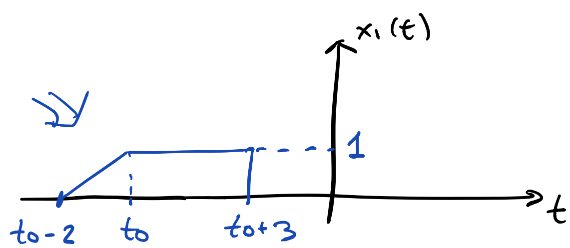
$x_1(t) = x(t - t_0)$

Si $t_0 > 0 \Rightarrow \boxed{x_1(t) = x(t - t_0)}$



RETARDO

Si $t_0 < 0 \Rightarrow \boxed{x_1(t) = x(t + t_0)}$



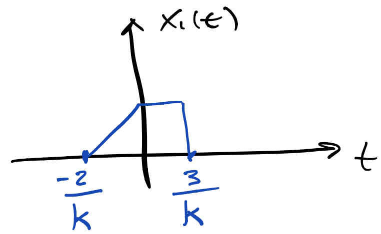
ADELANTO

2) Reflexión o inversión de tiempo

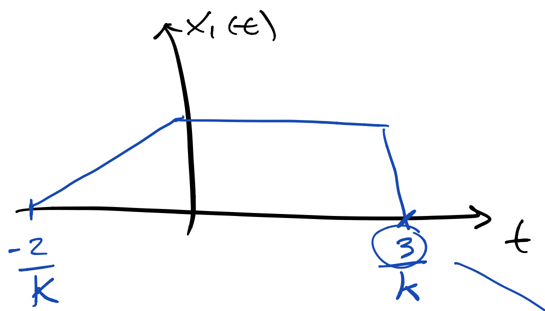
3) Escalado

$$x_1(t) = x(k \cdot t) \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Si $k > 1$: Duración de la señal es menor (se estrecha)



Si $0 < k < 1$: se expande. (Ej: $\frac{1}{2}$)



Ej: $k = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\dfrac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$ $\rightarrow$ $\dfrac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

Ej : ESCALADO Y DESPLAZAMIENTO A LA VEZ :

$(at - t_0)$

$x(t)$

1º Desplazamiento.
2º Escalado.

Mejor camino

① $z(t) = x(t - t_0)$

¿Por qué?

Tengo que tratar de dejar la "t" sola:

$$x(\underline{2}t-\underline{5}) \rightarrow x(\underline{2}(\underbrace{t-\tfrac{5}{2}}))$$

Tendría $x(2t) \rightarrow$ desplazamiento $t-\frac{5}{2}$

Si hago escalado temporal 1°:

$$z(t) = x(at)$$

$$q(t) = z(\underbrace{t-\tfrac{t_0}{a}}) = [x(a(t-\tfrac{t_0}{a}))] =$$

$$= [x(at-t_0)]$$

$$y(t) = q(-t) = x(-at-t_0)$$

[La inversión lo último]

Ej: $x(t) \rightarrow x(\underline{2}t+6)$

① Desplaz. $\rightarrow x(t+6)$

② Escalado $\rightarrow x(2t+6)$
(compresión)

— o —

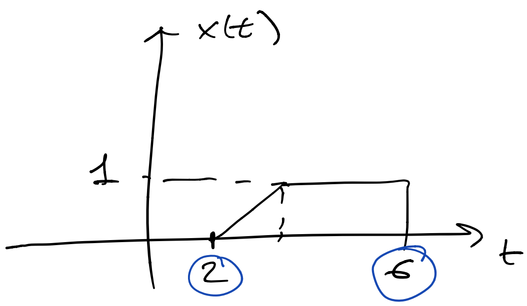
otro camino:

① Escalado: $x(2t)$

② Desplaz: $x(2(t+\frac{6}{2})) \rightarrow x(2(t+3)) \rightarrow$

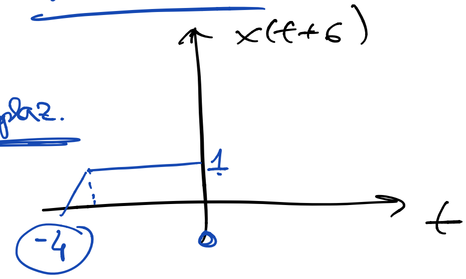
$\rightarrow x(2t+6)$

Quiero: $x(2t+6)$



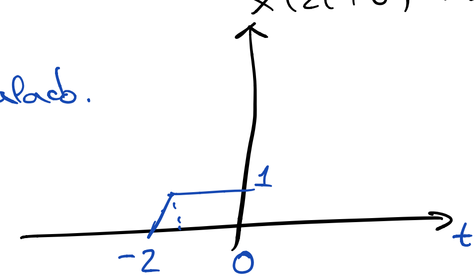
Método 1

Desplaz.



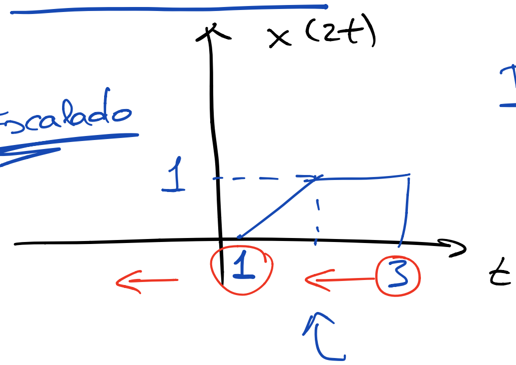
$x(2t+6) \Rightarrow$ Dividir

Escalado.



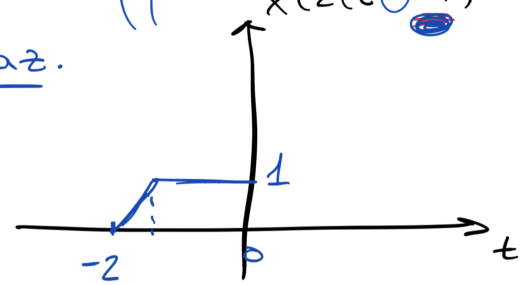
Método 2

Escalado



Desplaz.

$x(2(t+3))$ $\frac{6}{2}$



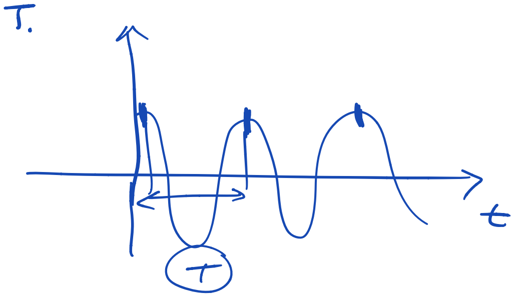
Periodicidad de señales

Una señal periódica $x(t)$ tiene un valor positivo T para el cual, se cumple:

$$\boxed{x(t) = \underline{x}(\underbrace{t+T}_{})}$$

para todos los valores de t.

La señal no cambia ante un desplazamiento de valor T.



Si $x(t)$ es periódica $\Rightarrow$ $x(t) = x(t+mT)$ para todo t y cualquier $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Periódica con periodos $2T$, $3T$, $4T$....

Periodo fundamental T_0

El valor positivo más pequeño de T.

(*) Esto se cumple excepto cuando $x(t) = cte$.

$\Downarrow$

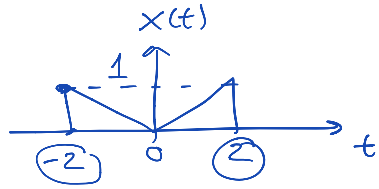
El periodo fundamental es

Simetría de señales

SIMETRÍA PAR

$$\left[x(t) = x(-t)\right]$$

Ej:



$t = -2 \rightarrow x(t) = 1$

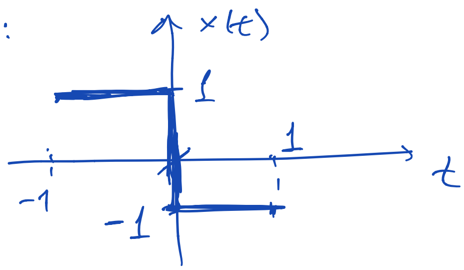
$x(-t) \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x(t) = 1$

SIMETRÍA IMPAR

$$\left[x(t) = -x(-t)\right]$$

- Si la señal es continua en $\varnothing$ (t), su valor ha de ser $\varnothing$ para presentar simetría impar.
  (CONDICIÓN NECESARIA, NO SUFICIENTE).

Ej:



En el origen no está definida ⇒ Discontinuidad

[Tiene simetría impar]

C.q. señal se puede descomponer en su parte par y su parte impar:

$$① \quad x(t) = x_P(t) + x_I(t)$$

$$x_p(t) = x(t) - x_p(t) + x(-t)$$

$$\Rightarrow \quad 2x_p(t) = x(t) + x(-t)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_p(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]} \; (*)$$

PARTE PAR.

$$x_I(t) = x(t) - x_I(t) - x(-t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\, x_I(t) = x(t) - x(-t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_I(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]} \; (*)$$

PARTE IMPAR

SIMETRÍA EN SEÑALES COMPLEJAS

① SIMETRÍA HERMÍTICA

$$\left[x(t) = x^*(-t)\right]$$

Si $x(t)$ es hermítica $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \text{Re}\{x(t)\} & \text{PAR} \\ \text{Im}\{x(t)\} & \text{IMPAR} \\ |x(t)| & \text{PAR} \\ \text{arg.} \angle & \text{IMPAR} \end{cases}$$

Ej: $x(t) = e^{it}$

$$x^*(t) = e^{-it}$$

$$x^*(-t) = e^{it}$$

② SIMETRÍA ANTIHERMÍTICA

$$\boxed{x(t) = -x^*(-t)}$$

Ej: $x(t) = i\cos(t)$

$x^*(t) = -i\cos(t)$

$x^*(-t) = -i\cos(-t)$

$-x^*(-t) = i\cos(-t) = i\cos(t)$

$$x(t) = x_h(t) + x_a(t)$$

$$x_h(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x^*(-t)\right]$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x^*(-t)\right]$$

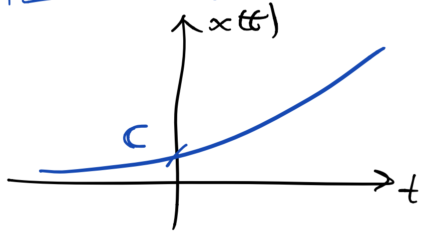
Señales básicas I

SEÑAL EXPONENCIAL COMPLEJA CONTINUA

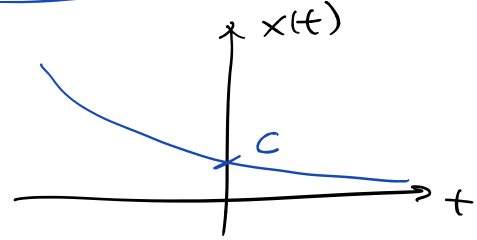
$$\left[x(t) = c\, e^{at}\right], \text{ con } c \text{ y } a \in \mathbb{C}$$

① Si c y $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Exponencial real.

$\boxed{\text{Si } a > 0}$



$\boxed{\text{Si } a < 0}$



② Señal periódica exponencial compleja

$$\boxed{x(t) = e^{j\omega_0 t}} \equiv \left| \underbrace{e^{j\omega_0 t}}_{\cos() + i\,\text{sen}()} \right| = 1$$

Como es periódica $\Rightarrow e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)}$

↳ Puesto que $e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 T}$

$$\Rightarrow \boxed{e^{j\omega_0 T} = 1} = \underbrace{\cos(\omega_0 T)}_{=1} + \underbrace{i\,\text{sen}(\omega_0 T)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \omega_0 T = 2\pi$$

Será $\underline{\omega_0 T = 2\pi}$ $\Rightarrow$ $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}}$ $\rightarrow$ $\left[\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right]$

(*) Se dice que un cjto. de funciones están armónicamente relacionadas, cuando sus frecuencias fundamentales son múltiplos de una sola frecuencia.

$$\phi_k(t) = e^{j\underline{k\omega_0} t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

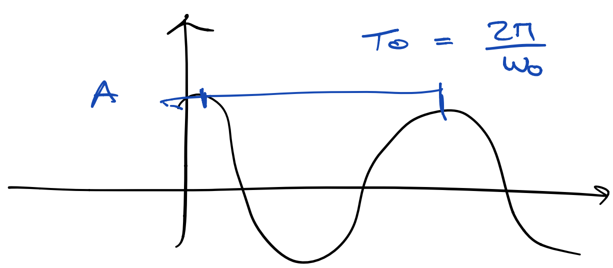
(Tengo ∞ armónicas)

$\Rightarrow$ $e^{j\omega_0 t}$ y $e^{-j\omega_0 t}$ tienen mismo período fundamental.

- SEÑALES SENOIDALES

$$\left[x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)\right] \quad \underline{\omega_0} = 2\pi \underline{f_0}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



Usando Euler:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \,\text{sen}(\omega_0 t)$$

$$A\cos(w_0 t+\phi) = \frac{A}{2}e^{j(w_0 t+\phi)} + \frac{A}{2}e^{-j(w_0 t+\phi)}$$

esto se traduce:

$$A\cos(w_0 t+\phi) = A\,\mathrm{Re}\{e^{j(w_0 t+\phi)}\}$$

$$A\,\mathrm{sen}(w_0 t+\phi) = A\,\mathrm{Im}\{e^{j(w_0 t+\phi)}\}$$

Recordatorio Euler

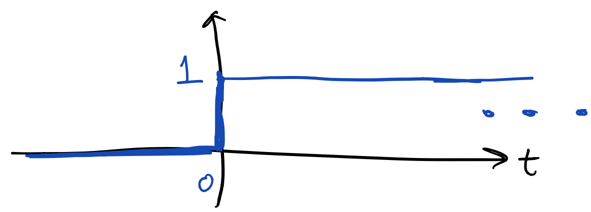
$$\cos(z) = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}$$

$$\mathrm{sen}(z) = \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}$$

Señales básicas II

FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} \Rightarrow \text{Discontinuo en } t=0$$

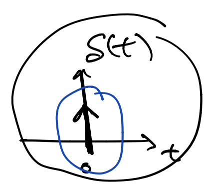


FUNCIÓN IMPULSO UNITARIO (Delta de Dirac)

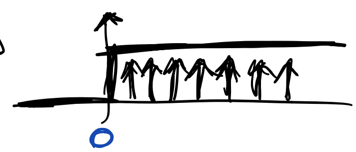
$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\delta(t) = \frac{d\,u(t)}{dt}}$$



$\Rightarrow$



$$u(t) = \int^{\infty} \delta(t-\sigma)\,d\sigma = (*)$$

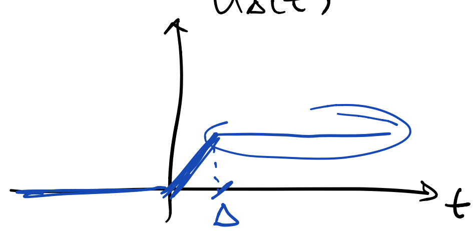
$$(*) = \int_{t}^{-\infty} \delta(\tau)(-d\tau) =$$

$$= -\int_{t}^{-\infty} \delta(\tau)\, d\tau =$$

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau}$$

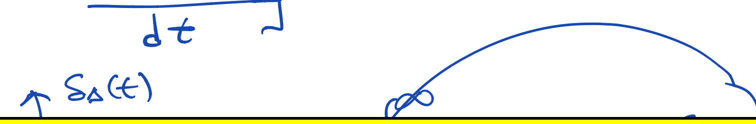
$u(t)$ es discontinua en $t=0 \Rightarrow$ No es diferenciable

Consideramos aproximación al escalón unitario, donde $u(t)$ se eleva de 0 a 1 en un corto intervalo (Δ)



Ahora podemos considerar la derivada:

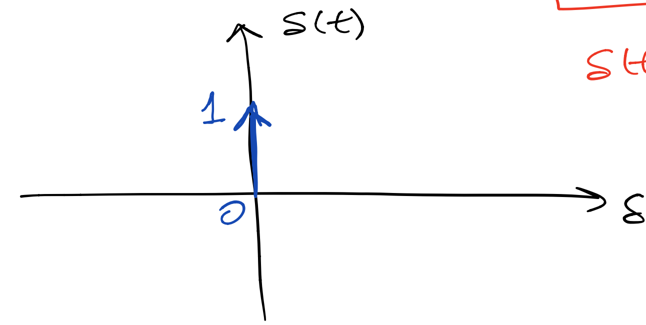
$$\boxed{\delta_\Delta(t) = \frac{d\, u_\Delta(t)}{dt}}$$



Si $\Delta \to 0 \Rightarrow \delta_\Delta(t)$ se vuelve más estrecha, y más alta, mantiene su área unitaria.

$$\Rightarrow \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) \Rightarrow \boxed{\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}}$$

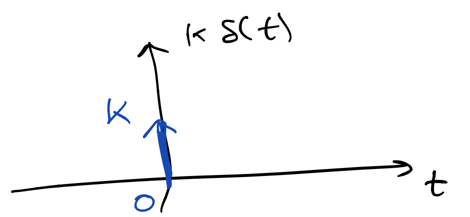
$\delta(t)$ tiene área $= 1$



No tiene duración! sino área.

Así,

$$\int_{-\infty}^{t} k\,\delta(\tau)\,d\tau = \boxed{k\,u(t)}$$



Si $x(t) = k\,\delta(t - t_0)$ $\Rightarrow$

si $t_0 > 0$ si $t_0 < 0$

$$\Rightarrow \quad k\,\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\,\delta(t-t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} k\,\underbrace{\delta(t')\,dt'} = \boxed{k}$$

$t' = t - t_0$

$\frac{dt'}{dt} = 1 \Rightarrow dt' = dt$

- Si $\quad x(t) = \delta(3t) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \delta(3t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3t)\,dt = \frac{1}{3}$$

Dem.

$t' = 3t$

$dt' = 3\,dt$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t') \cdot \frac{1}{3}\,dt' = \frac{1}{3} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t')\,dt'}_{1} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Pulso rectangular

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 : & -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

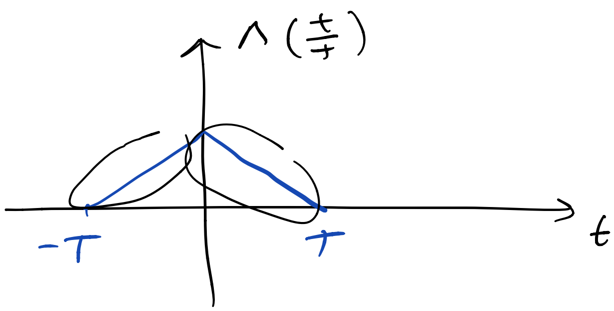
Ej: $A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$ Duración.

FUNCIÓN SINC

$$\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}$$

FUNCIÓN TRIANGULAR

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{t}{T}+1 : & -T\le t\le 0 \\ -\frac{t}{T}+1 : & 0\le t\le T \\ 0 : & \text{resto.} \end{cases}$$



Sistemas en el dominio del tiempo

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t)$$

Ej: Sistema integrador

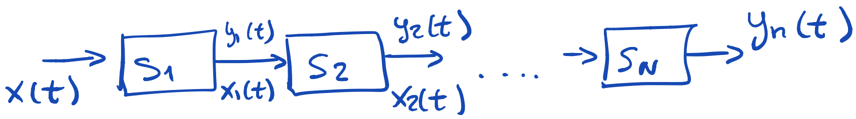
$[x(t) = t\,u(t)]$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} \tau\,d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2} \Rightarrow$$

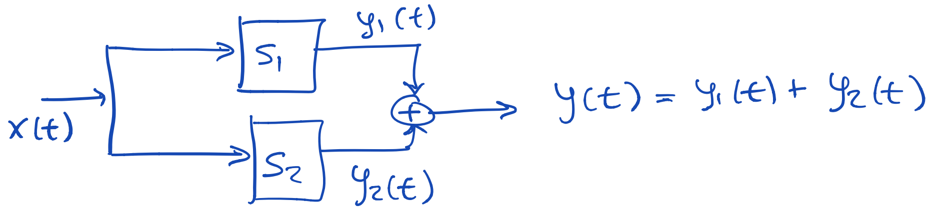
$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2}t^2\,u(t)}$$

Interconexión de sistemas

1) Interconexión en serie o cascada.



2) Interconexión en paralelo



3) Interconexión de retroalimentación

Propiedades de los sistemas I

1) Sistemas con y sin memoria

- Un sist. es sin memoria si su salida para cada valor de t, depende solamente de la entrada en ese instante.

Ej

$$y(t) = 3x(t) + x(t-1)$$

[Memoria]

$$y(t) = x(-t)$$

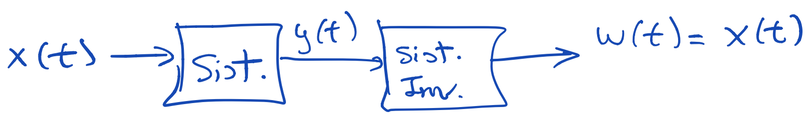
[Memoria]

[Todos los sistemas SIN MEMORIA son CAUSALES]

- Con memoria: Salida en el instante actual, depende del pasado o futuro de las señales.

2) Invertibilidad o Sistemas inversos

- Un sist. es invertible cuando exista un sist. que al conectarlo a la salida del 1º, obtengamos la señal de entrada.



Ej: $y(t) = 3x(t) \rightarrow x(t) = \frac{1}{3}y(t)$

- Si es invertible → encontrar su inverso
- Si no invertible → Contraejemplo

2 entradas distintas → Misma salida

Donde se destruye la info. ?

3) CAUSALIDAD

- Un sist. es causal si su salida en c.q. instante depende solo de los valores de la entrada o salida en el momento presente (ese instante) y/o del pasado (instantes anteriores).

[Todos los sist. sin memoria → causales]

- Sistema anticausal: su salida presente depende solo de la entrada o salida en el futuro.

Ej: $y(t) = x(t-2) + 3x(t)$

CAUSAL

$\underset{t=2}{y(t)} = \underbrace{x(t+1)}_{x(3)} + \underbrace{x(t)}_{x(2)}$

NO CAUSAL

Propiedades de los sistemas II

4) ESTABILIDAD

- Cuando al introducir al sistema una señal acotada, la salida también está acotada.

$$|x(t)| < K \longrightarrow |y(t)| < M \quad \Big\} \; K, M \in \mathbb{R}^+$$

Ej: $y(t) = 3\,x(t)$

$$|x(t)| < K \Rightarrow |y(t)| = 3\,|x(t)| < 3K$$

ACOTADO $\longrightarrow$ ESTABLE

Ej: $y(t) = e^t \cdot x(t)$

$$|x(t)| < K$$

$$|y(t)| = e^t \cdot |x(t)| \Rightarrow \text{INESTABLE}$$

(si $t = \infty$)

5) INVARIANZA EN EL TIEMPO

- Si ante un desplazamiento de la señal de entrada, se produce en la salida el mismo desplazamiento.

Ej: $y(t) = \text{sen}(x(t))$

$$\Rightarrow \boxed{y_1(t) = \text{sen}(x_1(t))} \quad 1^\circ$$

Supongamos que $x_2(t) = x_1(t - t_0)$

6) LINEALIDAD

Si entrada es suma ponderada de varias señales, la salida " " " " respuestas a cada una de esas señales de entrada.

① Propiedad aditiva

② " escalamiento u homogeneidad

$x_1(t) \to y_1(t)$
$x_2(t) \to y_2(t)$ $\Rightarrow$ Lineal si : ① $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$

② $a x_1(t) + b x_2(t) \to a y_1(t) + b y_2(t)$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 x_1(t) + b\, x_2(t) \Rightarrow a y_1(t) + b y_2(t)}$$

LINEAL.

(*) Si el sistema es LINEAL : a una entrada nula le corresponde salida nula

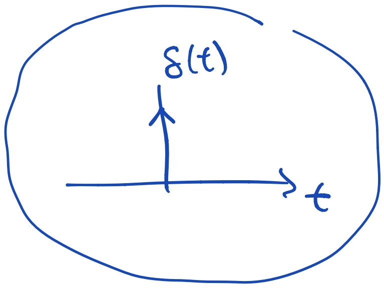
Ej : $y(t) = x^2(t)$

$x_1(t) \to y_1(t) = x_1^2(t)$

$x_2(t) \to y_2(t) = x_2^2(t)$

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow y_3(t) = \left(a x_1(t) + b\, x_2(t)\right)^2$

Sistemas LTI



$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow h(t)$$

- Supongamos que podemos expresar $x(t)$:

$$x(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \delta_k(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \delta(t-kT)$$

- La respuesta del sistema a $\delta_k(t)$ es $V_k(t)$, por ser el sistema lineal:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{V_k(t)}$$

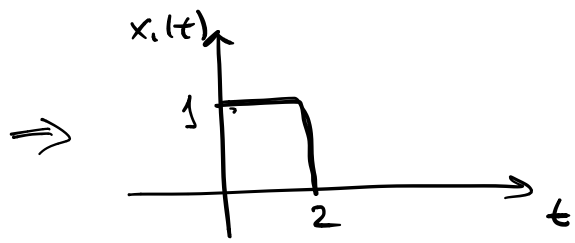
- Si la respuesta a $\delta(t)$ es $V_0(t)$, y el sistema es invariante $\Rightarrow$ la respuesta a $\delta(t-kT)$ es $V_0(t-kT)$

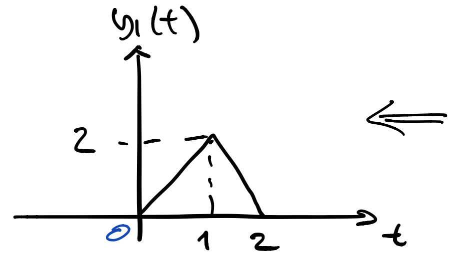
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \delta_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \delta(t-kT)$$

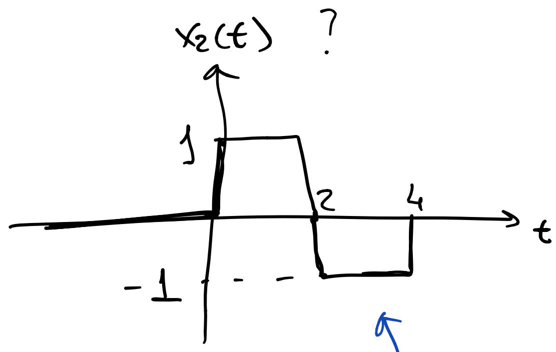
$$y(t) = \sum^{\infty} a_k \, V_k(t) = \sum^{\infty} a_k \, V_0(t-kT)$$

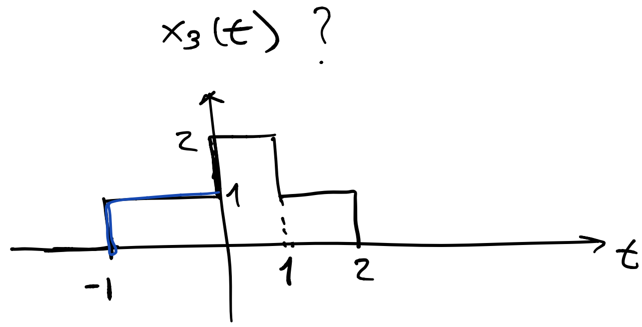
C.13 Considerar un SLTI cuya entrada es $x_1(t)$ y salida es $y_1(t)$.

Respuesta del sistema si meto $x_2(t)$ y $x_3(t)$?

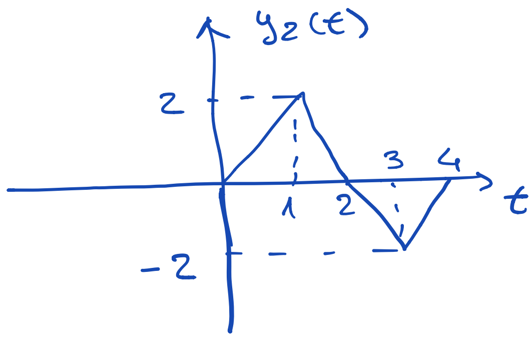






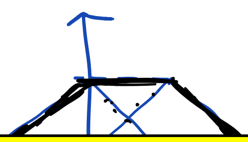


$$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$$
$$y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$



$$x_3(t) = x_1(t+1) + (2-1)\, x_1(t) = x_1(t+1) + x_1(t)$$

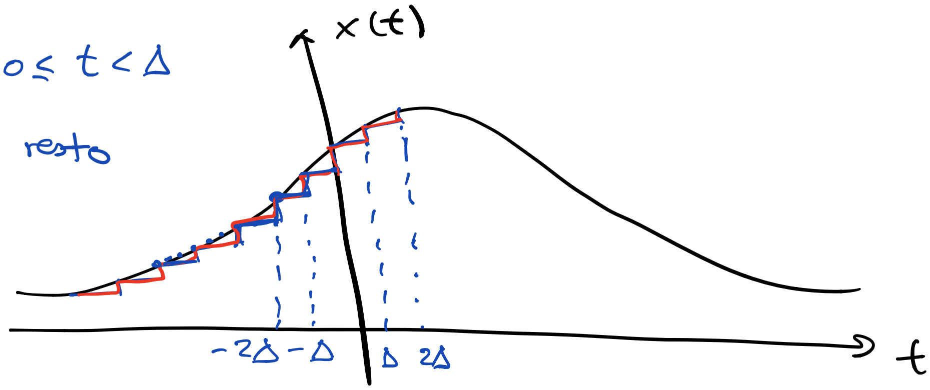
$$y_3(t) = y_1(t+1) + y_1(t)$$

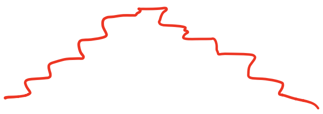


La integral de convolución

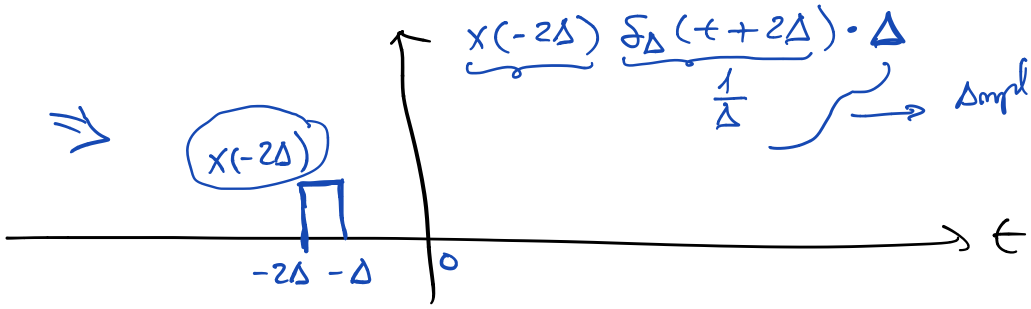
• Consideramos una aproximación, $\hat{x}(t)$, para $x(t)$

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \le t < \Delta \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

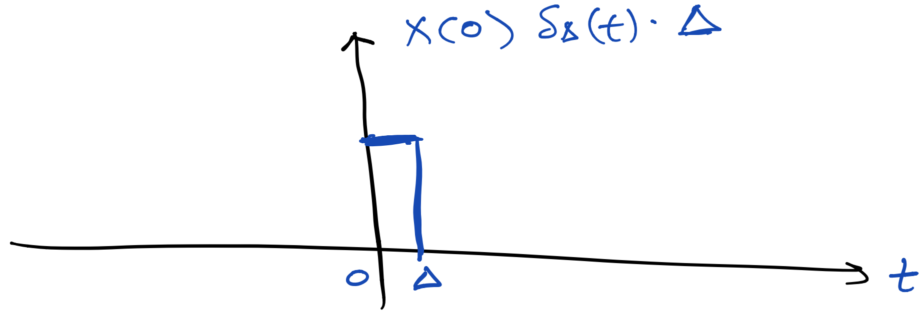




$$\underbrace{x(-2\Delta)}\ \underbrace{\delta_\Delta(t+2\Delta)\cdot\Delta}_{\frac{1}{\Delta}} \rightarrow \text{Amplitud } 1.$$



$$x(0)\,\delta_\Delta(t)\cdot\Delta$$



Si definimos: $\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \le t < \Delta \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ ya que

$\delta_\Delta(t)\,\Delta$ tiene amplitud unitaria:

Conforme $\Delta \to 0$ la aprox. $\hat{x}(t)$ mejora cada vez más. En el lim será igual a $x(t)$.

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta (t - k\Delta) \cdot \Delta$$

Asimismo, a medida que $\Delta \to 0$, el sumatorio se aproxima a una integral.

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau}$$

Ej: $x(t) = u(t)$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau$$

ya que: $u(\tau) = 0$ para $\tau < 0$

$u(\tau) = 1$ para $\tau > 0$

- Si $h_\tau(t)$ a la respuesta del sistema al impulso que llega en el instante τ $(\delta(t-\tau))$, y el sistema es invariante:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau}$$

INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

OPERACIÓN DE CONVOLUCIÓN

- En un SLTI si conozco $h(t)$, se conoce la respuesta a cualquier señal.

  $h(t)$: caracteriza completamente a un SLTI.

- Se ayuda de gráficas!

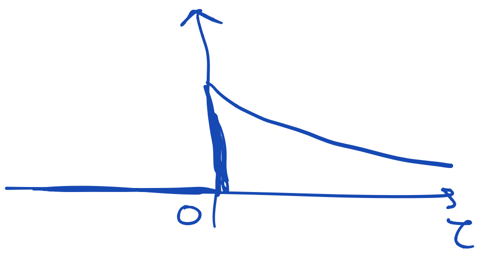
Ejemplo convolución

Sea $x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$, $a > 0$

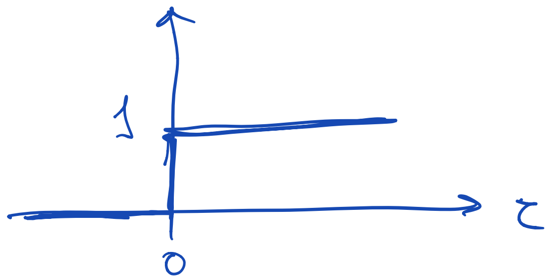
y $h(t) = u(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x(\tau)} \cdot \underline{h(t-\tau)}\, d\tau$$

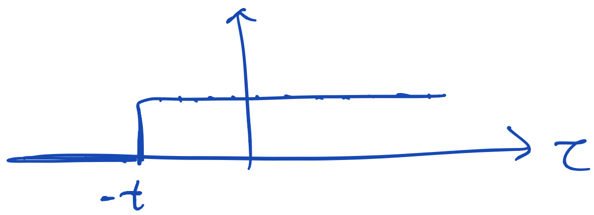
$x(\tau)$

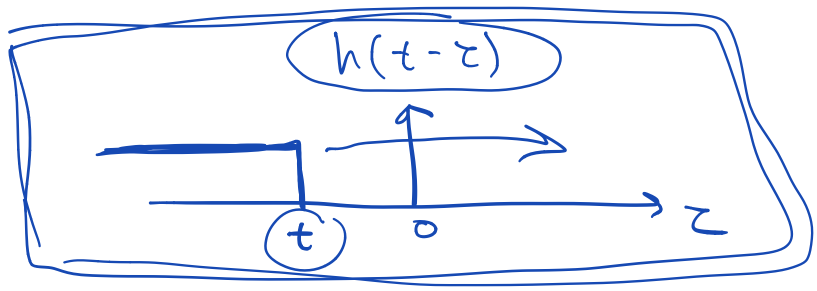


$h(t) = h(\tau)$

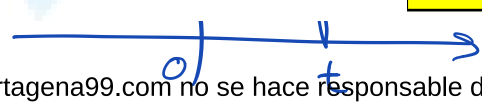


$h(\tau + t)$





Para $t < 0 \Rightarrow x(\tau)\, h(t-\tau) = 0$



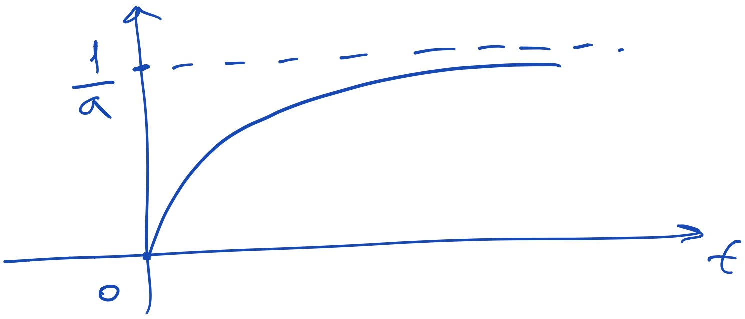
Para $t>0$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{-a\tau}\, d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau}\Big]_0^t =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)}$$

Para todo t:

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)\cdot \underline{u(t)}}$$



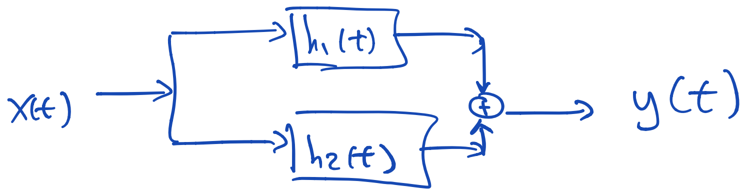
Propiedades de los sistemas LTI I

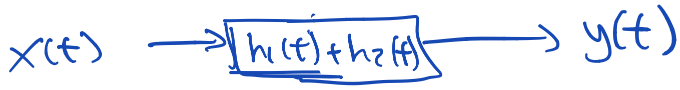
1) Propiedad conmutativa

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

2) Propiedad distributiva

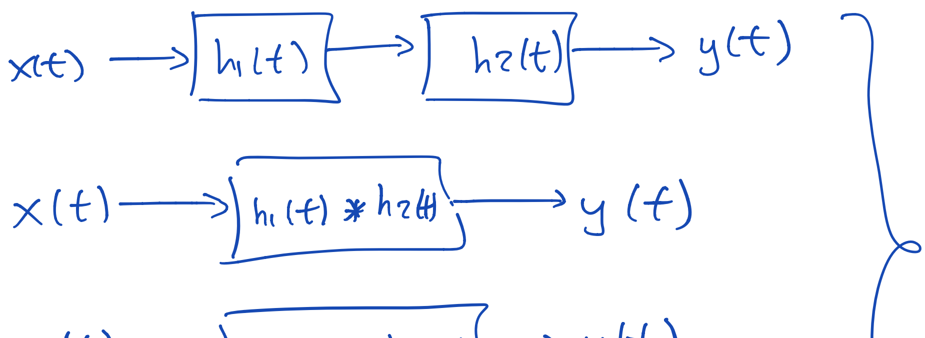
$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$





3) Propiedad asociativa

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$



4) El elemento neutro de la convolución

- El impulso unitario

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta(t)} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

5) Convolución con un impulso desplazado

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

Dem.

$$y(t) = x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \underline{\delta(t-t_0-\tau)}\, d\tau$$

$$t - t_0 - \tau = 0 \rightarrow \underline{\tau = t - t_0}$$

$$\boxed{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, \delta(t-t_0-\tau)\, d\tau =$$

$$= x(t-t_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0-\tau)\, d\tau}_{= 1} = \boxed{x(t-t_0)}$$

Propiedades de los sistemas LTI II

6) SLTI con o sin memoria

Sin memoria: salida en c.q. instante depende de entrada en ese instante.
Para que esto se cumpla en LTI:

$$h(t) = 0 \quad \text{para } t \neq 0$$

$$y(t) = K\,x(t)$$

7) Invertibilidad

El inverso es un SLTI caracterizado por $h_1(t)$ que cumple:

$$\boxed{h(t) * h_1(t) = \delta(t)}$$

Ej: $h(t) = \delta(t-3)$; $h_1(t) = \delta(t+3)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot h_1(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3) \cdot \delta(t-\tau+3)\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\cancel{3}+t-\cancel{3}) \cdot \delta(t-\tau+3)\,d\tau =$$

$t-\tau+3=0$

$\tau = 3+t$

$$\delta(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau+3)\,d\tau = \delta(t)$$

$$h(t) = h(t) \cdot u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\, d\tau$$

9) Estabilidad

Entradas acotadas $\longrightarrow$ salidas acotadas.

$$|x(t)| \leq K \Rightarrow |y(t)| = |x(t) * h(t)| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)|\, |h(\tau)|\, d\tau \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} K\, |h(\tau)|\, d\tau \leq K \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau \leq K_h \leq \infty}$$

10) Respuesta al escalón

Sea $s(t) = u(t) * h(t) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$$

• Exploraremos una representación alternativa →

→ Exponenciales complejas.

(*) Expresar señales periódicas como suma de exponenciales:

⟹ SERIES DE FOURIER

(*) Expresar cualquier señal como suma (con integral) de exponenciales:

TRANSFORMADA DE FOURIER.

Respuesta de SLTI a exponenciales complejas

$$e^{st} \longrightarrow \underbrace{H(s)\,e^{st}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} e^{st} \equiv \text{Función propia del sistema} \\ H(s) \equiv \text{Valor propio del sistema} \end{array}\right\} \equiv \text{AUTOFUNCIÓN}$$

$$\boxed{y(t)} = x(t) * h(t) = e^{s_0 t} * h(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s_0 (t-\tau)} \cdot h(\tau)\, d\tau = e^{s_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s_0 \tau}\, d\tau}_{\substack{\text{CONVERGE} \\ \shortparallel \\ H(s_0)}} =$$

$$= \boxed{x(t) \cdot H(s_0)}$$

$H(s_0) \equiv$ cte. compleja

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \equiv \text{FUNCIÓN DEL SISTEMA}}$$

Ej: Calcular $y(t)$ mediante función del sistema:

SLTI $\quad h(t) = u(t)$

$$x(t) = A \cdot e^{s_1 t} + B e^{s_2 t} + C e^{s_3 t}$$

① Calculamos función del sistema:

$$\boxed{H(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau =$$

$$= \int^{\infty} \ldots \left[e^{-s\tau} \right]^{\infty} = -\frac{1}{\ldots} [0-1] =$$

② Por linealidad:

$$\boxed{y(t)} = H(s_1)\cdot A\cdot e^{s_1 t} + H(s_2)\cdot B\cdot e^{s_2 t} + H(s_3)\cdot C\cdot e^{s_3 t} =$$

$$= \boxed{\frac{A}{s_1} e^{s_1 t} + \frac{B}{s_2} e^{s_2 t} + \frac{C}{s_3} e^{s_3 t}}$$

(*) ¿Cómo responde un SLTI a exp. imaginarias puras?

$$s = \sigma + j\omega \rightarrow \boxed{s = j\omega}$$

$$y(t) = H(s=j\omega)\cdot x(t) = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= H(j\omega)\cdot e^{j\omega t}$$

$$\boxed{H(j\omega) \equiv \text{RESPUESTA EN FRECUENCIA}}$$

Ej: Dado un SLTI caracterizado por $h(t) = e^{-t} u(t)$

Respuesta en frecuencia?

$$x(t) = 2\cdot e^{j2t} + 3 e^{j\pi t}$$

$$\boxed{H(j\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau = -\frac{1}{\ldots}\left[e^{-(1+j\omega)\tau}\right]_0^{\infty} =$$

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{1+2j} e^{j2t} + \frac{3}{1+\pi j} e^{j\pi t}}$$

Desarrollo en serie de Fourier para señales periódicas (DSF)

- En el tema 1 se definió que una señal era periódica si:

$$x(t) = x(t+T) \text{ para todo } t.$$

$$\begin{cases} T \equiv \text{periodo fundamental} \\ w_0 = \frac{2\pi}{T} \equiv \text{frec. fundamental} \end{cases}$$

- 2 señales periódicas básicas (senoidales):

$$\begin{cases} x(t) = \cos w_0 t \\ x(t) = e^{jw_0 t} \end{cases}$$

$$w_0 \qquad T = \frac{2\pi}{w_0}$$

- Asociados a e^{jw_0t} está el cjto. de exp. complejas relacionadas armónicamente:

$$\phi_k(t) = e^{jkw_0t} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

(Para $|k| \geq 2$, el T de $\phi_k(t)$ es una fracción de T).

De esta forma, una combinación lineal del exp.

también es periódica con periodo T DE LA SERIE DE FOURIER.

Cálculo de los coeficientes del DSF

$$\left[\, x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} \,\right]$$

- Para obtener a_k, multiplicamos ambos miembros por: $e^{-jl\omega_0 t}$ e integramos en un periodo T_0:

$$\int_0^{T_0} x(t)\cdot e^{-jl\omega_0 t}\,dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}\cdot e^{-jl\omega_0 t}\,dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^{T_0} \underbrace{e^{jk\omega_0 t}\, e^{-jl\omega_0 t}}_{=\, e^{j(k-l)\omega_0 t}}\,dt$$

Ojo

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t}\,dt = \int_0^{T_0} \cos((k-l)\omega_0 t)\,dt + j\int_0^{T_0} \operatorname{sen}((k-l)\omega_0 t)\,dt$$

Para $\boxed{k \neq l}$ $\rightarrow$ cos y sen son periódicas de periodo

$$\frac{T_0}{|k-l|}$$

$\Rightarrow$ Al integrar sobre intervalo de longitud T_0, que corresponde a un nº entero de periodos de estas señales:

$$\int^{T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t} \quad \text{se anulan}$$

Para $\boxed{k = \ell}$

$$\Rightarrow \quad e^{j(k-\ell)w_0 t} = 1 \quad \Rightarrow \int_0^{T_0} e^{j(k-\ell)w_0 t}\,dt = \boxed{T_0}$$

Resumiendo:

$$\int_0^{T} e^{j(k-\ell)w_0 t}\,dt = \begin{cases} T_0, & k = \ell \\ 0, & k \neq \ell \end{cases}$$

$$\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j\ell w_0 t}\,dt = a_\ell T_0 \Rightarrow \underline{\underline{a_\ell}} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cdot e^{-j\ell w_0 t}\,dt$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk w_0 t}} \equiv \text{Ec. de SÍNTESIS}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cdot e^{-jk w_0 t}\,dt} \equiv \text{Ec. de ANÁLISIS}$$

- El coeficiente a_0 $(k=0)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{a_0}} = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt} \equiv \text{Valor promedio de } x(t) \text{ sobre un periodo.}$$

... respuesta en frecuencia

- Si además $x(t) = x(t + T_0)$ (periódica).

↓

admite DSF

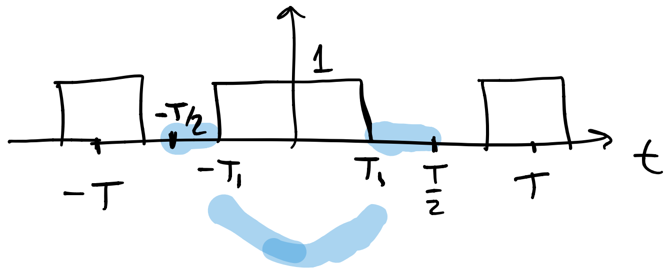
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(j\omega_0 k) e^{jk\omega_0 t}}$$

Ejemplo DSF

Ej: Calcular coef. DSF de $x(t)$ periódica dada por:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$



$$+\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right) = \frac{T}{2} + \frac{T}{2} = \boxed{T}$$

Para $\boxed{k=0}$

$$\boxed{a_0} = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\,dt = \boxed{\frac{2T_1}{T}}$$

Para $\boxed{k \neq 0}$

$$\boxed{a_k} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\left(\frac{-1}{jk\omega_0}\right)\left[e^{-jk\omega_0 t}\right]_{-T_1}^{T_1} =$$

$$= -\frac{1}{jk\omega_0 T}\left[e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{+jk\omega_0 T_1}\right] =$$

$$= \frac{2}{k\omega_0 T}\,\mathrm{sen}(k\omega_0 T_1) = \frac{\quad}{k\pi}$$

sustituye $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Ej: Cálculo coef. DSF por inspección:

$x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$, en este caso:

$x(t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$

Comparando ecuaciones:

$k=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2j}$; $k=-1 \Rightarrow a_{-1} = -\frac{1}{2j}$

$a_k = 0 \quad \forall\, k \neq \pm 1$

Propiedades del DSF

1) VALOR MEDIO

El coef. a_0 en todo DSF es el valor medio de la señal:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, \underset{k=0}{\underset{\downarrow}{e^{jk\omega_0 t}}}\, dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt}$$

2) LINEALIDAD

Sean $x(t) = x(t+T)$ e $y(t) = y(t+T)$

$$x(t) \xrightarrow{DSF} a_k$$

$$y(t) \xrightarrow{DSF} b_k$$

$$\Rightarrow \; z(t) = A\, x(t) + B\, y(t) = z(t+T)$$

$$z(t) \xrightarrow{DSF} \boxed{c_k = A a_k + B b_k}$$

Dem.

$$z(t) = A\, x(t) + B\, y(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + B \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{(A a_k + B b_k)}\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

3) DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

$x(t - t_0)$ ... conserva periodo T

$t = \ell + t_0$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{T}\int_{-t_0}^{-t_0+T} x(\ell)\, e^{-jkw_0(\ell+t_0)}\, d\ell =$$

$$= e^{-jkw_0t}\underbrace{\frac{1}{T}\int_T x(\ell)\, e^{-jkw_0\ell}\, d\ell}_{a_k} =$$

$$= e^{-jkw_0t}\cdot a_k$$

$$\boxed{x(t-t_0) \xrightarrow{DSF} b_k = a_k\, e^{-jkw_0t_0}}$$

4) INVERSIÓN EN EL TIEMPO

Sea $y(t) = x(-t)$, si $y(t)$ es periódica:

$$\boxed{y(t) = x(-t) \xrightarrow{DSF} b_k = a_{-k}}$$

$$\begin{cases} \text{Si } x(t) \text{ es par} \rightarrow x(t) = x(-t) \rightarrow a_{-k} = a_k \\ \text{'' '' es impar} \rightarrow x(t) = -x(-t) \rightarrow a_{-k} = -a_k \end{cases}$$

5) ESCALADO EN EL TIEMPO

Sea $y(t) = x(at)$. Entonces, si $y(t)$ es

periódica, su periodo $T_1 = T$ ...

$K=-\infty$

6) MULTIPLICACIÓN

Sea $z(t) = x(t) \cdot y(t)$ periódica de periodo T

$$\boxed{z(t) = x(t)\cdot y(t) \xrightarrow{DSF} c_k = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \, b_{k-\ell}}$$

convolución discreta.

7) CONJUGACIÓN Y SIMETRÍA CONJUGADA

Sea $y(t) = x^*(t)$ periódica de periodo T:

$$\boxed{y(t) = x^*(t) \xrightarrow{DSF} b_k = a^*_{-k}}$$

8) RELACIÓN DE PARSEVAL

$$\boxed{P_m = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2}$$

9) DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

$$\boxed{y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{DSF} b_k = jk\omega_0 a_k}$$

$$\boxed{z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xrightarrow{DSF} c_k = \frac{1}{jk\omega_0} a_k}$$

07/10/2021

C2) DSF $x(t) = \cos(5\pi t + \pi/3) + \text{sen}(10\pi t)$

sin resolver ec. de análisis

1) $x(t)$ suma 2 señales sinusoidales. Estudiar periodicidad:

$$\left.\begin{array}{l} w_a = 5\pi = 2\pi/T_a \Rightarrow T_a = 2\pi/5\pi = 2/5 \text{ seg} \\ w_b = 10\pi = 2\pi/T_b \Rightarrow T_b = 2\pi/10\pi = 1/5 \text{ seg} \end{array}\right\} T_0 = \text{m.c.m}\{2/5,\ 1/5\} = 2/5 \rightarrow w_0 = 5\pi \text{ rad/s}$$

2) $$x(t) = e^{j(5\pi t + \pi/3)} + e^{-j(5\pi t + \pi/3)} + \frac{1}{2j} e^{j(10\pi t)} - \frac{1}{2j} e^{-j(10\pi t)}$$

Por ser period. admite DSF:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} = \ldots + a_{-2} e^{-j2w_0} + a_{-1} e^{-jw_0} + a_0 + a_1 e^{jw_0} + a_2 e^{-j2w_0} + \ldots$$

Por tanto:

$$\begin{cases} a_{-2} = \dfrac{-1}{2j} = \dfrac{1}{2} j \\ a_{-1} = \dfrac{1}{2} e^{-j\pi/3} \\ a_1 = \dfrac{1}{2} e^{j\pi/3} \\ a_2 = \dfrac{1}{2j} \\ a_k = 0 \quad \forall k \neq \pm 1, \pm 2 \end{cases}$$

C3) Es posible DSF de $x(t) = \cos(5\pi t + \pi/3) + \mathrm{sen}(10t)$

Estudiamos periodicidad

$$\left.\begin{array}{l} w_a = 5\pi \rightarrow T_a = 2/5 \\ w_b = 10 \rightarrow T_b = \pi/5 \end{array}\right\} T_0 = \mathrm{m.c.m}\{2/5, \pi/5\} \nexists$$

$\Rightarrow x(t)$ no es periódica no admite DSF

Coeficientes del DSF de una señal cuadrada

Partimos del ejemplo de onda cuadrada:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

que se repite periódicamente con periodo T.

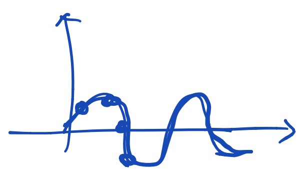
Coef. del DSF.

$$a_k = \frac{2 \operatorname{sen}(k \omega_0 T_1)}{k \omega_0 T}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad a_k = \frac{\operatorname{sen}(k \omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$\Rightarrow$ Forma alternativa de a_k:

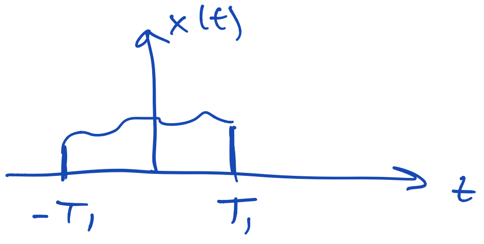
$$T a_k = \left. \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega} \right|_{\omega = \omega_0 k}$$

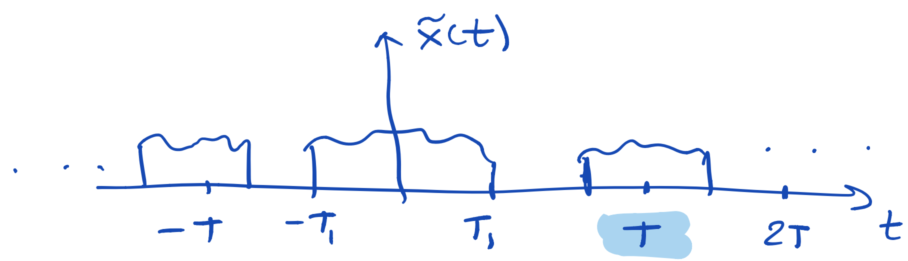
$\Rightarrow$ $\dfrac{2 \operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega}$ envolvente de $T a_k$



$$\lim_{T\to\infty} x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_1}\right)$$

- Supongamos $x(t)$ finita. (aperiódica)





Conforme $T\to\infty \Rightarrow \tilde{x}(t) = x(t)$ para c.q. valor finito de t.

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)$$

La señal $\tilde{x}(t)$ es periódica de periodo T, admite DSF:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad [1]$$

Como $\tilde{x}(t) = x(t)$ para $|t| < \frac{T}{2}$, podemos reescribir a_k:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

y puesto que $x(t) = 0$ fuera de ese intervalo:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Por tanto, si $T a_k = X(j\omega)$

$$\Rightarrow \boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt} \quad [3]$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

Podemos escribir los coef. a_k como:

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) \quad [4]$$

Combinando [1] y [4], $\tilde{x}(t)$ se puede expresar:

$$\tilde{x}(t) = \sum^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

Cuando $T \to \infty$

$\tilde{x}(t) \longrightarrow x(t)$; $k \cdot w_0 \longrightarrow w$

$\Sigma \longrightarrow \int$; $w_0 \longrightarrow dw$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw}$$

TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER.

Resumen de TF

Ec. SÍNTESIS $\equiv$ $\left[\; x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw \;\right] \equiv TF^{-1}$

Ec. ANÁLISIS $\equiv$ $\left[\; X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt \;\right] \equiv TF$

Espectro de $x(t)$

Ejemplos TF

Ej: TF de $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a>0$

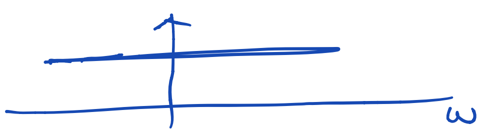
$$\boxed{X(j\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-at} \cdot e^{-j\omega t}}_{e^{-(a+j\omega)t}}\, dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big]_0^{\infty} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{a+j\omega}\ ,\quad a>0}$$

Ej: TF de $x(t) = \delta(t)$

$$\boxed{X(j\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \boxed{1}$$



Propiedades de la TF

- Notación: $x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j\omega)$

1) LINEALIDAD

Si
$$x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j\omega)$$
$$y(t) \xrightarrow{T.F.} Y(j\omega)$$

$$\boxed{a\,x(t) + b\,y(t) \xrightarrow{T.F.} a\,X(j\omega) + b\,Y(j\omega)}$$

2) DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

Si $x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j\omega)$

$$\Rightarrow \boxed{x(t-t_0) \xrightarrow{T.F.} e^{-j\omega t_0} \cdot X(j\omega)}$$

Dem.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\rightarrow x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega(t-t_0)}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int^{\infty} \left[e^{-j\omega t_0} \cdot X(j\omega)\right] e^{j\omega t}\, d\omega$$

3) CONJUGACIÓN Y SIMETRÍA CONJUGADA.

Si $x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j\omega)$

$$\Rightarrow \boxed{x^*(t) \xrightarrow{T.F.} X^*(-j\omega)}$$

4) DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega\, X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{T.F} j\omega\, X(j\omega)}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega)}$$

5) ESCALADO EN EL TIEMPO

Si $x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j\omega)$

$$\boxed{x(at) \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)}$$

7) RELACIÓN DE PARSEVAL

$$\boxed{E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega}$$

8) PROPIEDAD DE CONVOLUCIÓN

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{T.F.} Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)}$$

$$\boxed{z(t) = x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{T.F.} Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)}$$