

Tema 1.2 Espacios vectoriales

ÁLGEBRA LINEAL

DMATIC, ETSI Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

- 1 Espacio vectorial
- 2 Dependencia e independencia lineal
- 3 Bases y coordenadas
- 4 Matriz del cambio de base

Definición de cuerpo

Sea $\mathbb{K}$ un conjunto no vacío de elementos en el que se han definido dos operaciones llamadas suma y multiplicación:

$$\begin{array}{ccc} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a, b) & \rightsquigarrow & a + b \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a, b) & \rightsquigarrow & a \cdot b \end{array}$$

Se dice que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un **cuerpo** si verifica:

- Axiomas para la adición:

S1 Ley conmutativa: $a + b = b + a$

S2 Ley asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$

S3 Existe elemento neutro: $\exists 0 \in \mathbb{K}$ tal que $a + 0 = a$

S4 Existen opuestos: Para cada $a \in \mathbb{K}$, $\exists a' \in \mathbb{K}$ tal que $a + a' = 0$.

El opuesto de a es único y lo denotamos por $-a$

- Axiomas para la multiplicación:

P1 Ley conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

P2 Ley asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

P3 Existe elemento unidad: $\exists 1 \in \mathbb{K}$, con $1 \neq 0$, tal que $1 \cdot a = a$

P4 Existen inversos: Para cada $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\exists x \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot x = 1$.

El inverso de a es único y lo denotamos por a^{-1}

P5 Ley distributiva respecto a la adición: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ejemplo 1

- El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con la suma y multiplicación usuales es un cuerpo.
- El conjunto $Q = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, cuyos elementos son las clases de equivalencia respecto a la relación de equivalencia $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' = m'n$, con las operaciones de suma $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q}$ y multiplicación $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$ es un cuerpo.
- El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo.
- Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ con las operaciones suma y multiplicación definidas en las siguientes tablas (aritmética modular con módulo 2):

	$\mathbb{Z}_2$	
+	0	1
0	0	1
1	1	0

	$\mathbb{Z}_2$	
$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Se verifica que $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ es un cuerpo finito.

Definición de espacio vectorial

Sea V un conjunto no vacío de elementos (llamados vectores), en el que se han definido dos operaciones llamadas suma de vectores y multiplicación por elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$:

$$\begin{array}{ccc} + : V \times V & \longrightarrow & V \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \rightsquigarrow & \vec{u} + \vec{v} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot : \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ (c, \vec{v}) & \rightsquigarrow & c\vec{v} \end{array}$$

Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$** si verifica:

- Axiomas para la adición:

S1 Ley **conmutativa**: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

S2 Ley **asociativa**: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

S3 **Existe elemento neutro**: $\exists \vec{0} \in V$ tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

S4 **Existen opuestos**: Para cada $\vec{u} \in V$, $\exists \vec{u}' \in V$ tal que $\vec{u} + \vec{u}' = \vec{0}$

- Axiomas para la multiplicación por escalares:

M1 Ley **asociativa**: $c \cdot (d \cdot \vec{u}) = (cd) \cdot \vec{u}$

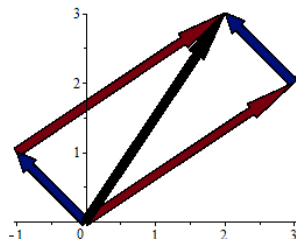
M2 **Multiplicación por e. unidad de $\mathbb{K}$** : $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

M3 Ley **distributiva para la adición en V** : $c \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = c \cdot \vec{u} + c \cdot \vec{v}$

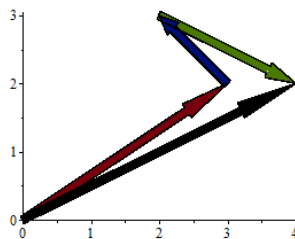
M4 Ley **distributiva para la adición en $\mathbb{K}$** : $(c + d) \cdot \vec{u} = c \cdot \vec{u} + d \cdot \vec{u}$.

Vectores del plano

En $\mathbb{R}^2$, se define la suma de dos vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ por $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$ y la multiplicación de un número real c y un vector $\vec{u}$ por $c\vec{u} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{pmatrix}$.



La suma de 2 vectores (en negro).



La suma de 3 vectores (en negro).

Ejemplo 2

Se denota por $P_2(\mathbb{R})$ al conjunto de los polinomios en la variable x de grado ≤ 2 con coeficientes reales.

Si $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_2(\mathbb{R})$ y $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 \in P_2(\mathbb{R})$, entonces se define

$$p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$$

y si $c \in \mathbb{R}$ se define

$$c \cdot p(x) = ca_2x^2 + ca_1x + ca_0$$

$P_2(\mathbb{R})$ con las operaciones de suma de polinomios y multiplicación por números reales es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Proposición 1

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. El elemento neutro de V es único.
2. $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ para todo $\vec{u} \in V$.
3. $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$ para todo $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
4. Si $c \cdot \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow c = 0$ ó $\vec{u} = \vec{0}$
5. El opuesto de $\vec{u}$ es único y es de la forma $(-1) \cdot \vec{u}$.

Demos. 1. Supongamos que $\vec{0}$ y $\vec{0}'$ son dos elementos neutros. Se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \vec{0} + \vec{0}' = \vec{0} \text{ por ser } \vec{0}' \text{ elemento neutro} \\ \vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}' \text{ por ser } \vec{0} \text{ elemento neutro} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{0} = \vec{0}'$$

2. Sea $\vec{u} \in V$ arbitrario. Se tiene

$$\vec{u} = 1 \cdot \vec{u} = (1 + 0) \cdot \vec{u} = 1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u} = \vec{u} + 0 \cdot \vec{u}$$

Entonces $0 \cdot \vec{u}$ es elemento neutro y como es único se concluye que $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

3. Sea $c \neq 0$ y $\vec{u} \in V$. Se tiene

$$\vec{u} = (cc^{-1}) \cdot \vec{u} = c \cdot (c^{-1} \cdot \vec{u}) = c \cdot (c^{-1} \cdot \vec{u} + \vec{0}) = \vec{u} + c \cdot \vec{0}$$

Entonces $c \cdot \vec{0}$ es elemento neutro y como es único se concluye que $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

4. Se sigue de las propiedades 2 y 3.

5. Supongamos que $\vec{u}$ tiene dos opuestos $\vec{u}'$ y $\vec{u}''$, entonces

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{u}') + \vec{u}'' &= \vec{0} + \vec{u}'' = \vec{u}'' \\ \vec{u}' + (\vec{u} + \vec{u}'') &= \vec{u}' + \vec{0} = \vec{u}'\end{aligned}$$

Por S1 y S2, se tiene $(\vec{u} + \vec{u}') + \vec{u}'' = \vec{u}' + (\vec{u} + \vec{u}'')$, y por lo tanto, $\vec{u}' = \vec{u}''$.

Además,

$$(-1) \cdot \vec{u} + \vec{u} = (-1) \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{u} = (-1 + 1) \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

Lo anterior implica que $(-1) \cdot \vec{u}$ es elemento opuesto de $\vec{u}$.

El conjunto de vectores $C = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es **linealmente dependiente (LD)** si

$$\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}, \text{ no todos cero tales que } a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

El conjunto de vectores $C = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es **linealmente independiente (LI)** si

$$a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_n \vec{u}_n = \vec{0} \implies a_1 = \dots = a_n = 0$$

Proposición 2

Se cumplen las siguientes propiedades:

- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ LD $\Leftrightarrow \vec{v} = c\vec{u}$ para algún $c \in \mathbb{K}$.
- Todo sistema C que contenga al vector $\vec{0}$ es LD.
- Si C contiene un vector combinación lineal de otros dos vectores del sistema $\Rightarrow C$ es LD.
- Si C es LD y $\tilde{C}$ es el sistema formado añadiendo vectores a $C \Rightarrow \tilde{C}$ es LD.
- Si C es LI y $\tilde{C} = C \cup \{\vec{v}\}$ es LD $\Rightarrow \vec{v}$ es combinación lineal de los vectores de C .

Ejemplo 3

En $\mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ es LD:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + 3b - 2c = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = -\lambda \\ c = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

En $\mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ es LI:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 \\ a + 3b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Un vector $\vec{x}$ es **combinación lineal** de $C = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ si $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = c_1 \vec{u}_1 + \dots + c_n \vec{u}_n$$

Se dice que $C = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es un **sistema generador** de V si todo vector de V es combinación lineal del sistema C .

Se dice que $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es **base** de V si:

- ❶ B es **LI**.
- ❷ B es **SG** de V .

Bases canónicas: En $\mathbb{R}^2$, $B_c = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

En $\mathbb{R}^3$, $B_c = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

En $\mathbb{R}^4$, $B_c = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Si $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es base de V y $\vec{x}$ un vector de V , entonces existen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = c_1 \vec{u}_1 + \dots + c_n \vec{u}_n$$

y $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_B$ es el **vector de coordenadas de $\vec{x}$ respecto a la base B** .

Teorema 1

Las coordenadas de un vector $\vec{x} \in V$ respecto a una base $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ son únicas.

Demos. Supongamos que $\vec{x} = c_1 \vec{u}_1 + \dots + c_n \vec{u}_n$ y $\vec{x} = c'_1 \vec{u}_1 + \dots + c'_n \vec{u}_n$. Entonces $\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = (c_1 - c'_1) \vec{u}_1 + \dots + (c_n - c'_n) \vec{u}_n$. Como $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ son LI se sigue que

$$\begin{array}{ccc} c_1 - c'_1 & = & 0, \\ & \vdots & \\ c_n - c'_n & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} c_1 & = & c'_1 \\ & \vdots & \\ c_n & = & c'_n \end{array}$$

lo que prueba la unicidad de las coordenadas.

Teorema 2

Si V tiene una base $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ con n elementos, entonces todo conjunto con $n + 1$ vectores de V es LD.

Demos. Sea $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1}\}$ $n + 1$ vectores de V y supongamos que

$$a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_{n+1} \vec{v}_{n+1} = \vec{0}.$$

Los vectores $\vec{v}_j$ se expresan en combinación lineal de la base B :

$$\vec{v}_j = c_{1j} \vec{u}_1 + \dots + c_{nj} \vec{u}_n, \quad j = 1, \dots, n + 1.$$

Así, $a_1(c_{11} \vec{u}_1 + \dots + c_{n1} \vec{u}_n) + \dots + a_{n+1}(c_{1n+1} \vec{u}_1 + \dots + c_{nn+1} \vec{u}_n) = \vec{0}$ y como B es base

$$\begin{array}{rcl} a_1 c_{11} + \dots + a_{n+1} c_{1n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 c_{n1} + \dots + a_{n+1} c_{nn+1} & = & 0 \end{array}$$

Sistema homogéneo con n ecuaciones y $n + 1$ incógnitas, luego existen soluciones $a_1, \dots, a_{n+1}$ no todos nulos. Por tanto, $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1}\}$ es LD.

Teorema 3 (de la base)

En un EV generado por un número finito de vectores, todas las bases son finitas y poseen el mismo número de elementos.

La **dimensión** de V , $\dim(V)$, es el número de vectores de una base de V

Teorema 4 (de la base incompleta)

Si $\dim(V) = n$, entonces a todo sistema de vectores $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ que sea LI, se le pueden añadir $n - k$ vectores hasta completar una base de V .

Matriz del cambio de base B_1 a base canónica B_c .

Sean B_1 es una base de $\mathbb{R}^n$ y B_c es la base canónica:

$$B_1 = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad B_c = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

La **matriz del cambio de base B_1 a base canónica B_c** es:

$$\mathcal{C}(B_1, B_c) = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} := Q$$

La ecuación del cambio de coordenadas de base B_1 a B_c es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_c} = Q \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{B_1}$$

Sea Q la matriz del cambio de base B_1 a base B_c . Se tiene que Q es regular. **La matriz del cambio de base canónica a base B_1** es:

$$\mathcal{C}(B_c, B_1) = Q^{-1}$$

La ecuación del cambio de coordenadas de B_c a B_1 es:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{B_1} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_c} .$$

Matriz del cambio de base B_1 a base B_2 .

Sean B_1 y B_2 dos bases de $\mathbb{R}^n$:

$$B_1 = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_2 = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \vec{w}_n = \begin{pmatrix} w_{1n} \\ \vdots \\ w_{nn} \end{pmatrix} \right\}$$

Sea $\mathcal{C}(B_1, B_c)$ la matriz del cambio de base B_1 a base canónica B_c y sea $\mathcal{C}(B_2, B_c)^{-1}$ la matriz del cambio de base B_c a base B_2 .

La matriz del cambio de base B_1 a base B_2 es:

$$\mathcal{C}(B_1, B_2) = \mathcal{C}(B_2, B_c)^{-1} \mathcal{C}(B_1, B_c)$$

Con las asignaciones $P = \mathcal{C}(B_1, B_2)$, $Q = \mathcal{C}(B_1, B_c)$ y $R = \mathcal{C}(B_2, B_c)$. Se tiene que

$$P = R^{-1}Q$$

La ecuación del cambio de coordenadas de base B_1 a base B_2 es:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}_{B_2} = R^{-1}Q \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{B_1}.$$